

кнб. н-3107
41-96107

А. П. КИСЕЛЕВ

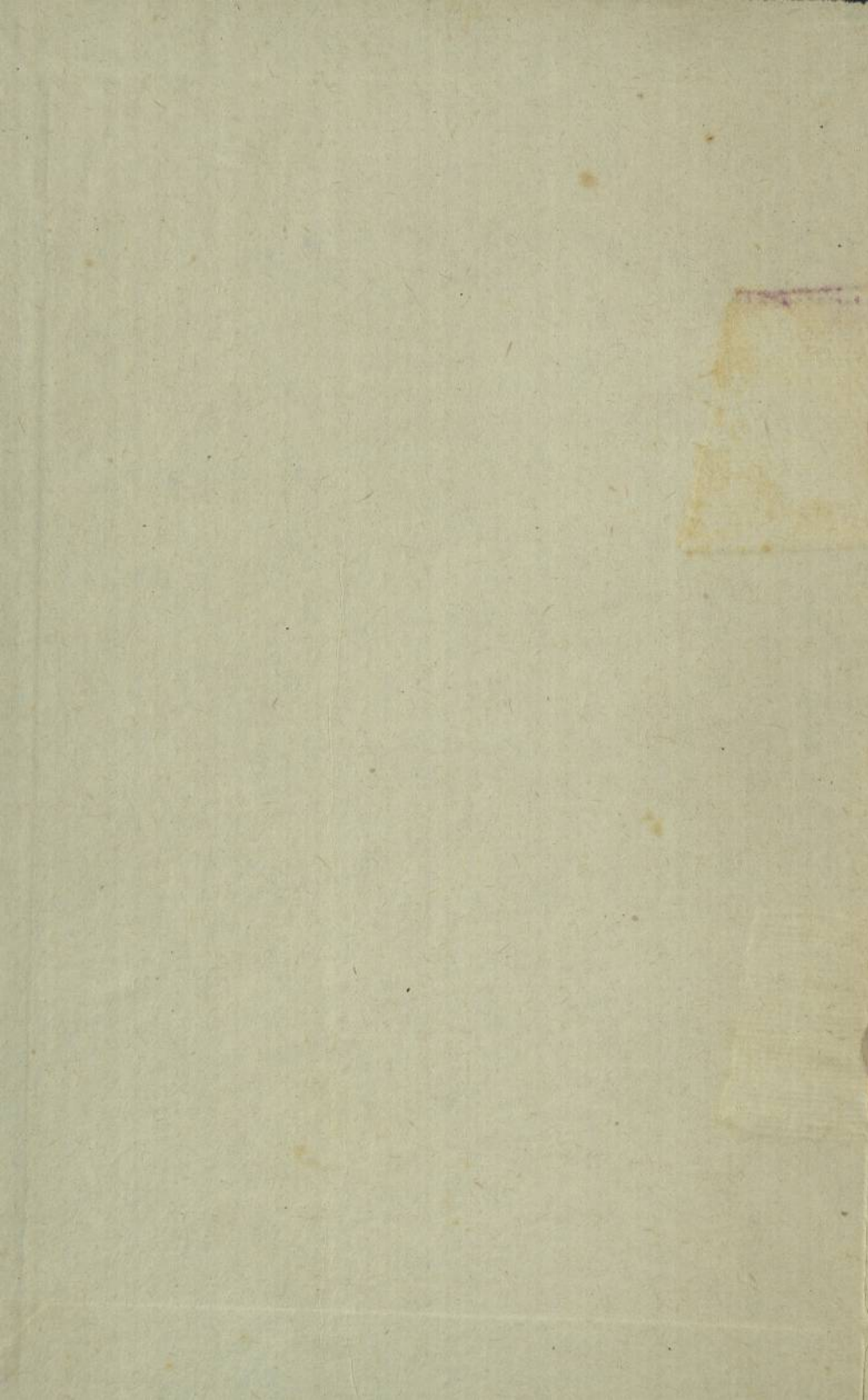
АЛГЕБРА

ТУЛЛИМАР ВĂТАМ ТАТА
ВĂТАМ ШКУЛСЕМ ВАЛЛИ

I

ПАЙĔ

ЧАССР ГОСУДАРСТВО ИЗДАТЕЛЬСТВИ
Шупашкар ♦ 1941





II-мөш ИЗДАНИ УМСАМАХЁ

Кёнекен пёрремёш пайне Фүтёс халъх комиссариачё каларнă юлашки программасем тăрăх вăтам школăн 6-мөш тата 7-мөш сүлёсенче вёренме мён-мён кирлине пурне те кёртнё.

Алгебралла ваксен уйрăмёсёр пуçне, кёнекене йалтах программăра кă-тартнă йёркепе сырнă. Кёнекене пёр сирёп йёркепе сырас шутпа ку уйрăма пёр пая кёртнё, анчах программа тăрăх ку материалтан пёр пайне 6-мөш сүлёнче, тепёр пайне 7-мөш сүлёнче вёренеçсё. Преподаватель въл пайсене сямă-лах уйърса илме пултарать.

Алгебра учебникён сак сёне изданинче пур асърханă йапăшсене те тўр-летнё, савнашкалах тёрёс мартарах е яках мар вырăнсене те юсанă; хăшпёр вырăнсене, йланмалларах пултър тесе, хушса тата улăштарса сырнă.

Ханăхтаруллă ёссен хисепне ўстернё (кёнекен пёрремёш пайёнче вёсем 200 пулнă, халё 279) тата кёнеке вёсёниче пур упражненисен отвечёсене те панă.

А. Киселев.

Ленинград, 1934 с. Октябрь.

ПЁРРЕМЁШ СЫПЌК.
МАЛТАНХИ ЂНЛАНУСЕМ.

I. Алгебрђри паллђсен йёрки.

1. Саспаллисемпе усђ курасси. а) Числосен пуриншён те пёр пек свойствисене саспаллисемпе кђтартасси. Калђпђр, хутланиканнипе хутлаканин вырђнёсене улђштарнђшђн икё число произведенийё улђшнмасть тенине ёырса кђтартмалла пултђр. Пёр числине a саспаллипе, теприне b саспаллипе ёырса, эфир ёакђн пек пёртанлђх ёырса хума пултартпђр: $a \times b = b \times a$, е кёскен: $ab = ba$, вара яланах, икё саспалли хушшинче нимёнле паллђ та ёук пулсан, вёсене хутламалла тесе йышђнђпђр. Пёр-пёр свойство хђшпёр уйрђм числошђн кђна мар, кирек мёнле числошђн та тёрёс пулнине яланах ёавђн пек ёырса кђтартаёёё.

Числосене паллђ туса ёырма яланах тенё пек латинла (е французла) алфавитђн саспаллийёсемпе усђ кураёёё.

б) Задача шутламалли правилђсене кёскен ёырасси. Задаёсен условийёсем пёр евёрлё пулсан, вёсен панђ числисем кђна уйрђм пулсан, ун пек задаёсене шутламалли правилђна кёскен ёырма пулать.

Калђпђр, пирён ёакђн пек задача шутламалла:

520 числон 3% -не тупмалла.

Вара ёапла хушђшлатпђр:

Кирек мёнле числон та 1% ёав числон $\frac{1}{100}$ пайё пулать;

ёапла вара:

$$520 \text{ числон } 1\% \text{-чё } \frac{520}{100} = 5,2 \text{ пулать;}$$

$$\text{„ „ } 3\% \text{-чё } \frac{520}{100} \times 3 = 15,6$$

Ёакна майлђ темиёе задаёђна шутласа пђхсан, эфир асђрхатпђр: пёр-пёр числон процентне тупас тесен ёав числона 100 ёине пайласа, результатне процент шучё ёине хутламалла кђна. Задаёђна ёапла пётёмёшле май шутласа пђхар:

a числон $p\%$ -не тупмалла.

Задаёђна ёапла шутлђпђр:

$$a \text{ числон } 1\% \text{-чё } \frac{a}{100} \text{ Пулать,}$$

$$\text{„ „ } p\% \text{-чё } \frac{a}{100} \times p.$$

Тупмалли числона x саспаллипе паллә туса, җакън пек пёртанлӑх җырма пултаратпӑр:

$$x = \frac{a}{100} \times p;$$

ку пёртанлӑх кирек мёнле панӑ числоран та процент епле тупмаллине кӑтартса парать.

Татах тӑслӑх илсе пӑхар. Арифметикӑра ваксене хутламалли правилӑна эфир сӑмахпа җапла калатпӑр: вака вак җине хутлас тесен, числителӑсене тата знаменателӑсене уйрӑммӑн хутламалла та пёрремӑш произведение иккӑмӑшӑ җине пайламалла. Саспаллисемпе усӑ курса, эфир ку правилӑна питӑ кӑскен җырма пултаратпӑр. Пёрремӑш вакӑн числителӑ a , знаменателӑ b пултӑр; иккӑмӑш вакӑн числителӑ c , знаменателӑ d пултӑр, вара эфир җапла җырма пултаратпӑр:

$$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}.$$

Кун пек җырни кирек мёнле вака хутлама та юрӑхлӑ пӑтӑмӑшле правило пулса тӑрать, мёншӑн тесен саспаллисем вырӑнӑнче кирек мёнле число та пулма пултарать. Җакън пекех, вака вак җине пайламалли правилӑна та кӑскен җырма пулать:

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{ad}{bc}.$$

Саспаллисемпе тата действи паллисемпе числосем пёр-пӑринне җыхӑнса тӑйине кӑтартакан пёртанлӑха е танмарлӑха формула теҗҗӑ.

Тӑслӑхрен, хӑшпӑр формулӑсене илсе пӑхар.

Прямоугольникӑн тӑпӑне җӑллӑшне пёр линилӑ единицӑпах виҗсе, тӑпне валли b число, җӑллӑшӑ валли h число тупсан, ку прямоугольникӑн квадратлӑ единицӑсемпе кӑтартна s лаптӑкӑ җак формула тӑрӑх шутланать: $s = bh$. Җакън пек паллә тунисемпех треугольник лаптӑкӑн формулине те тупатпӑр:

$$s = \frac{1}{2}bh \text{ пулать.}$$

Физикӑран җакна пӑлетпӑр: япалан танлаштарулла йывӑрӑшне пелес тесен, җак япалан панӑ количествин йывӑрӑшне унӑн объёмӑ җине пайламалла. Япала йывӑрӑшне (грампа шутласа) p саспаллипе, объёмне (куб. сантиметрпа) v саспаллипе, танлаштарулла йывӑрӑшне d саспаллипе паллә тусан, эфир танлаштарулла йывӑрӑшне тупмалли правилӑна җапла җырма хума пултаратпӑр:

$$d = \frac{p}{v}.$$

2. Алгебрӑлла выражени. Числосене саспаллисемпе (е саспаллисемпе тата цифрӑсемпе) җырма, вӑсемпе мёнле действисем тумаллине тата вӑл действисене мёнле йӑркеле тумаллине палләсемпе җыхӑнтарса кӑтартнине *алгебрӑлла выражени* теҗҗӑ.

Тӑслӑхрен, җапла выраженисем: $\frac{a}{100} \times p$; ab ; $2x + 1$.

„Алгебрӑлла выражени“ тесе калас вырӑнне час-часах эфир кӑскен „выражени“ тейӑпӑр.

Выражение саспаллисен панă числолла пѣлтерѣшѣсем тӳрӳх шутлас тени—ҫак панă числосене саспаллисем вырӳнне лартса, выраженире кӳартнӳ пур действисене те тӳвас тени пулать; вара шутланӳ хыҫҫӳн пулнӳ числона алгебрӳлла выраженин саспаллисен панӳ числолла пѣлтерѣшѣсем тӳрӳх пулнӳ *числолла пысӳкӳшѣ* теҫҫѣ. Ҫапла $p = 3$, $a = 520$ пулсан, $\frac{a}{100} \times p$ выраженин

$$\frac{520}{100} \times 3 = 5,2 \times 3 = 15,6 \text{ пулать.}$$

3. Алгебрӳра пӳхса тухакан дейвисем ҫаксем пулаҫҫѣ: *хушасси, кӳларасси, хутласси, пайласси, степене хӳпартасси, корене тупасси.* Малтанхи тӳватӳ дейвине эфир арифметикӳранах пѣлетпѣр. Пиллѣкмѣш дейвине—степене хӳпартасси—пѣртан хутланакансене хутланин уйрӳм тѣслѣхе пулать. Ҫавӳн пек пѣртан хутланакан числосен произведенине *степень* теҫҫѣ; хутланакансен хисепне—*степень кӳартӳвѣ* теҫҫѣ. Степене хӳпартакан числона *степень основанийѣ* теҫҫѣ. Пѣр-пѣр числона хӳйне хӳй ҫине 2 хут хутласан, произведенине ҫав числон *иккѣмѣш степене* теҫҫѣ, пѣр-пѣр числона хӳйне хӳй ҫине 3 хут хутласан, унӳн произведенине *виҫҫѣмѣш степень* теҫҫѣ, малалла та ҫаплах. Сӳмахран, 5-ѣн иккѣмѣш степене 5×5 произведени, урӳхла каласан, 25 пулать; $\frac{1}{2}$ -ѣн виҫҫѣмѣш степене $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}$ произведени, урӳхла каласан, $\frac{1}{8}$ пулать. Числон *пѣрремѣш степене* тесе числона хӳйне калаҫҫѣ.

Иккѣмѣш степене урӳхла *квадрат*, виҫҫѣмѣш степене—*куб* теҫҫѣ. Вѣсене акӳ мѣншѣн ҫапла ят панӳ: квадрат енѣ линиллѣ единиҫӳпа a пулсан, унӳн лаптӳкѣ (квадратлӳ единиҫӳпа) $a \times a$ произведени пулать, кубӳн хысакѣ линиллѣ единиҫӳпа a пулсан, унӳн объёмѣ (кублӳ единиҫӳпа) $a \times a \times a$ произведени пулать.

Корене тупасси ҫинчен халѣ каламӳпӳр, мѣншѣн тесен алгебра пуҫламѣшѣнчех вӳл дейвине кирлѣ пулмасть,

4. Алгебрӳра йышӳннӳ паллӳсем. Малтанхи тӳватӳ дейвине алгебрӳра та арифметикӳри паллӳсемпех ҫыраҫҫѣ, анчах хутлас паллине, эфир ун ҫинчен каланӳччѣ, хутланаканнисем иккѣшѣ те е вѣсенчен пѣри саспалли пулсан, ҫырмасӳрах хӳвараҫҫѣ. Сӳмахран, $a \times b$ ($e a \cdot b$) ҫырас вырӳнне кѣскен ab ҫыраҫҫѣ, ҫавӳн пеккех, $3 \times a$ ($e 3 \cdot a$) вырӳнне $3a$ ҫыраҫҫѣ. Пайлас дейвине паллине икѣ точкӳпа та „:“, горизонтальлѣ йѣрпе те ҫыраҫҫѣ; сӳмахран, $a : b$ тата $\frac{a}{b}$ ҫырни иккѣшѣ те пѣрех, вѣсем a числона b число ҫине пайланине пѣлтересҫѣ.

Степене хӳпартассине кѣскен ҫапла ҫырма йышӳннӳ: хутланаканни пулакан числона (степень основанине) илсе ҫыраҫҫѣ те ун тӳррине, сылтӳм енне, тепѣр число—степене хӳпартакан число хутланаканни пулса миҫе хут илѣннине кӳартакан число (степень кӳартӳвѣ) ҫыраҫҫѣ. Сӳмахран, 3^4 (*виҫҫѣ тӳватӳмѣш степеньре* тесе вулаҫҫѣ) вӳл 3-не хӳйне хӳй ҫине тӳватӳ хут хутламаллине пѣлтерет:

Число сүмөнче нимөнле степень катартавё те сук пулсан, въл числон степень катартавё единица теме пулатъ; сѣмахран, a сырви a^1 сырнипе пѣрех пулатъ.

Кирек мѣнле икѣ выраженин пѣртанлѣхне те = паллѣпа кѣ-тартацѣѣ, танмарлѣха > паллѣпа, кѣтес тѣррине пѣчек число еннелле туса, кѣтартацѣѣ. Сѣмахран, сѣкѣн пек сырнѣ пултѣр:

$$5 + 2 = 7; \quad 5 + 2 < 10; \quad 5 + 4 > 6.$$

Въл сѣкна пѣлтерет: $5 + 2$ сумма 7 пулатъ; $5 + 2$ сумма 10-ран пѣчеккѣ; $5 + 2$ сумма 6-ран пысѣк.

5. Действисене йѣрки. Алгебрѣлла выраженире кѣтартиѣ дей-ствисене сѣк йѣркепе тума йышѣннѣ: малтан аслѣ сypѣкри действисене—степене хѣпартассипе корене тупассине шутлацѣѣ, унтан хутлассипе пайлассине, юлашкинчен, хушассипе кѣларассине тѣвацѣѣ.

Сѣмахран, $3a^2b - \frac{b^3}{c} + d$ выражение панѣ пултѣр, ѣна шутлас тесен малтан степене хѣпартас действиене тумалла (a числона квадрата, b числона куба хѣпартмалла), унтан хутлас тата пай-лас действисене (3-не a^2 сине, пулнѣ резултатне b сине хутла-малла; b^3 числона c сине пайламалла), юлашкинчен, хушас тата кѣларас действисене тумалла ($3a^2b$ числоран $\frac{b^3}{c}$ кѣларса, резуль-тачѣ сүмне d хушмалла).

Задача условийѣсем тѣрѣх действисен сѣк йѣркинчен тухмал-ла пулсан, скобка сѣмпе усѣ курацѣѣ. Скобкасем скобка ѣшѣнчи числосен действииѣсене ытгисенчен малтан тумаллине кѣтартацѣѣ. Сѣмахран:

$$5 + 7 \cdot 2 \quad \text{тата} \quad (5 + 7) \cdot 2$$

выраженисем пѣр мар. Пѣрремѣшѣ 7-е 2 сине хутласа резуль-татне 5 сүмне хушмаллине пѣлтерет (19 пулатъ). Иккѣмѣшѣ малтан 5-пе 7 хушса, резултатне 2 сине хутламаллине пѣлтерет (24 пулатъ).

Сѣвѣн пекех:

$$(a + b)c - d$$

выражени сырнѣ пулсан, въл малтан a -па b хушса, пулнѣ число-на c сине хутламаллине, вара мѣн пулнинчен d кѣлармаллине пѣлтерет.

Скобкаллѣ выражение татах скобка ѣшне илмелле пулсан, сѣнѣ скобкасене урѣх тѣрлѣ сырацѣѣ. Сѣмахран:

$$a\{b - [c + (d - e)]\}$$

выражени малтан d -рен e кѣлармаллине, пулнѣ разносѣне c сүмне хушмаллине, пулнѣ суммѣна b -рен кѣларса, разносѣне a сине хут-ламаллине пѣлтерет.

Яланхи пек скобкасене сѣпла ят панѣ: сѣврака скобкасем (), квадратлѣ е хуцѣк скобкасем [], фигурѣллѣ скобкасем { }.

Выраженире темиҗе төрлө скобкаҗем пулсан, малтан җаврака скобкаҗи числосене, унтан квадратла скобкаҗи числосене, юлаш-кинчен, фигуралла скобкаҗи числосене шутлаҗҗе. Җаван пек, скобкаҗен ашәнчи дейвисене туса пырса, эпир скобкаҗене пө-теретпөр, урәхла каласан, эпир скобкаҗене „уҗатпәр“. Сәмахран:

$$5 \cdot \{24 - 2 \cdot [10 + 2 \cdot (6 - 2) - 3 \cdot (5 - 2)]\}$$

выраженире малтан җаврака скобкаҗене уҗатпәр:

$$5 \cdot \{24 - 2 \cdot [10 + 2 \cdot 4 - 3 \cdot 3]\}$$

Унтан квадратла скобкаҗене уҗатпәр:

$$5 \cdot \{24 - 2 \cdot 9\}$$

Юлашкинчен, фигуралла скобкаҗене уҗатпәр:

$$5 \cdot 6 = 30.$$

Упраженисем.

1. Квадратан ене a м; унан периметрне тата лаптәкне җырар.
2. Кубан хысаке m см пулсан, унан җийне тата объемне мәнле җырм пулатъ?
3. Прямоугольникан төпө x м, җүллөшө төпәнчен d м кәскерех. Унан лаптәкне тупар.
4. Икцифралла числора теҗеткесем x , ахаль единиҗасем y . Җав числора пурө миҗе единиҗа?
5. Вицифралла числора җөрсем a , теҗеткисем b , ахаль единиҗасем c . Җак числора пөтөм единиҗасен шутне мәнле формулапа кәтартса пама пулатъ?
6. Икө сорт чей хуташтарна: пөрремөш сортне a кг, иккөмөш сортне b кг илнө. Пөрремөш сорчөн килограмө m тенкө, иккөмөшөн n тенкө тарать. Хуташтарна чейөн пөр килограмө мөн чухлө танне җырса кәтартар.
7. Алгебра йышайна палласемпе җырар: 1) x -па y квадратөсен суммине; 2) x -па y суммин квадратне; 3) x -па y квадратөсен произведенине; 4) вөсен произведенине квадратне; 5) a -па b числосен суммине вөсен разноҗөн произведенине; 6) m -па n числосен суммине вөсен разноҗө җине пайласа пулна частнайне (куна икө төрлө җырар, урәхла каласан, икө точкапа „:“ тата горизонтальлө йөрпе).

8. $a = 20$, $b = 8$, $c = 3$ хурса, җак выраженисен пысәкәшне тупар:

$$1) (a + b) c; \quad 2) a + bc; \quad 3) (a + b) a - b;$$

$$4) (a + b) (a - b); \quad 5) (a + b) : c; \quad 6) \frac{a + b}{b - c}.$$

9. $3ab$ произведенире a вырәнне $x + y$ сумма, b вырәнне $x - y$ разность лартсасан пулакан выражение җырса кәтартар.

Историллө сведенисем.

„Алгебра“ сәмах арабсенен тухна. Арабсен ученайө Альхваризми хайөн математика кәнеки ятне „алгебра“ сәмахпа пусланә (840 җ.).

Европа ку сәмахпа чи малтан Итали математикө Бомбелли уса курна, вәл хайөн 1572 җ. җырна математика кәнекине җак сәмахпа пусланә; каярапа вара вәл сәмахпа пур математиксем те уса курма пуланә.

Уравненисем җинчен вөреннө хыҗҗан ку сәмах мөне пөлтернине аңланса илме пулатъ.

Числосем вырәнне саспаллисем җырассине чи малтан 1591 җ. французсен математикө Виета пуланә. Ун хыҗҗан французсен чапла философө тата математикө Рене Декарт (1596—1650 җҗ.) саспаллисемпе питө анлан уса курна.

Хальхи вәхәтра алгебра уса куракан палласене төрлө математиксем төрлө вәхәтра көртсе пына. Авал дейвисене сәмахпа е пөтөм пулвөсемпе җырна.

Пурнăсра хăвăртах шутлама тивнĕрен, çав ялан сыракан хăшпĕр сăмахсене кĕскетсе пынă, юлашкинчен вара вăл сăмахсене ятарласа йышăннă паллăсемпе сырма тытăннă. Хальхи вăхăтри хăшпĕр паллăсем хăсан тухиние илсе пăхар.

Хушас „+“ тата кăларас „-“ паллисене нимĕçсен математикĕ Видман 1489 ç. сырма пуçланă. Унчен вăл паллăсем Итали аслă художникĕ Леонардо-д-Авинчи сырнă алсырăвĕсенче тĕл пулаççĕ.

Пĕртанлăха кăтарتما Англи алгебраисчĕ Рекорд 1557 ç. „=“ паллăна кĕртнĕ, „мĕншĕн тесен, нимĕнле икĕ япала та икĕ параллельлĕ пĕртан ливирен ытла пĕртан пулма пултараймасть“, — тенĕ вăл. Англичансен тепĕр математикĕ Херриот танмарлăхн „>“ тата „<“ паллисене (1631 ç.) тата хутлас палла вырăнне точка сырма тытăннă.

Нимĕçсен чаплă математикĕ Лейбниц (1694 ç.) пайласине пуçласа „:“ паллăпа сырма тытăннă; унчен пайласине тўрĕ йĕрпе паллă тунă пулнă.

(), [] тата { } скобкасем чи малтан фламан математикĕ Жирар сырнă кĕнекесенче тĕл пулаççĕ (1629 ç.).

Ку паллăсемпе пуринче те пĕр вăхăтрах усă курма тытăнман. Хăшпĕр математиксем хушăран авадхи паллăсемпе те усă курнă. Алгебран хальхи вăхăтри лек символика XVIII ĕмĕрте тин сирĕпленсе çитнĕ теме юрат. Ку тĕлĕшрен Англи ученăйĕ Исаак Ньютон (1642—1727 çç.) сырнă кĕнекесемнитĕ нумай пулăшу кунĕ.

II. Арифметикалла малтанхи тăватă дейстин свойствисем.

Малтан хушас, кăларас, хутлас тата пайлас действисен арифметикара вĕреннĕ тĕп свойствисене аса илер, мĕншĕн тесен вĕсемпе алгебра та усă курмалла пулат.

6. Хушасси. а) Хушăнакансен вырăнĕсене улăштарса лартнăран сумма улшăнмасть (хушассин ылмаштару законĕ). Çапла:

$$3 + 8 = 8 + 3; \quad 5 + 2 + 4 = 2 + 5 + 4 = 4 + 2 + 5.$$

Пĕтĕмлетсе каласан:

$$a + b = b + a; \quad a + b + c + \dots = b + a + c + \dots = c + a + b + \dots$$

Точкасем хушăнаканнисем виçĕрен ытларах та пулма пултарнине пĕлтересçĕ.

б) Темиçе хушăнакантан хăшпĕрисене вĕсен суммипе улăштарсан, пĕтĕм сумма улшăнмасть (хушассин пĕрлештерĕв законĕ). Çапла:

$$3 + 5 + 7 = 3 + (5 + 7) = 3 + 12 = 15;$$

$$4 + 7 + 11 + 6 + 5 = 7 + (4 + 5) + (11 + 6) = 7 + 9 + 17 = 33.$$

Пĕтĕмлетсе каласан:

$$a + b + c = a + (b + c) = b + (a + c) \text{ т. ыт. те.}$$

Хăш чухне ку закона: хушăнакансене кирек мĕнле ушкăнлама та пулат, теççĕ.

в) Пĕр-пĕр число сумме темиçе число суммине хушас тесен, кашни хушăнаканне уйрăммăн пĕрин хыççăн теприне хушма юрат. Çапла:

$$5 + (7 + 3) = (5 + 7) + 3 = 12 + 3 = 15.$$

Пĕтĕмлетсе каласан:

$$a + (b + c + d + \dots) = a + b + c + d + \dots$$

7. Каларасси. а) Пёр-пёр числоран темиҗе число суммине каларас тесен, кашни хушанаканне уйрамман пёрин хысқан теприне каларма юрать. Ҷапла:

$$20 - (5 + 8) = (20 - 5) - 8 = 15 - 8 = 7.$$

Пётёмлетсе каласан:

$$a - (b + c + d + \dots) = a - b - c - d - \dots$$

б) Икё числои разноҗе хушас тесен пёчкленекеннине хушса, унтан пёчклетекеннине каларма юрать. Ҷапла:

$$8 + (11 - 5) = 8 + 11 - 5 = 14.$$

Пётёмлетсе каласан:

$$a + (b - c) = a + b - c.$$

в) Разноҗе каларас тесен, малтан пёчклетекеннине хушса, унтан пёчкленекеннине каларма юрать. Ҷапла:

$$18 - (9 - 5) = 18 + 5 - 9 = 14.$$

Пётёмлетсе каласан:

$$a - (b - c) = a + c - b.$$

8. Хутласси. а) Хутланакансен вырәнёсене улаштарса лартнаран произведени улшанмасть (хутлассин ылмаштару законё). Ҷапла:

$$4 \cdot 5 = 5 \cdot 4; \quad 3 \cdot 2 \cdot 5 = 2 \cdot 3 \cdot 5 = 5 \cdot 3 \cdot 2.$$

Пётёмлетсе каласан:

$$ab = ba; \quad abc \dots = bac \dots = cba \dots$$

б) Темиҗе хутланакантан хашпёрисене вёсен произведенийёпе улаштарсан, пётём произведени улшанмасть (хутлассин пёрлештерёу законё). Ҷапла:

$$7 \cdot 3 \cdot 5 = 5 \cdot (3 \cdot 7) = 5 \cdot 21 = 105.$$

Пётёмлетсе каласан:

$$abc = a(bc) = b(ac) \text{ т. ыт. те.}$$

в) Пёр-пёр числоран темиҗе число произведенийё җине хутлас тесен, җав числоран пёрремёш хутлакан җине, пулна результатне тепёр хутлакан җине, малалла та җаван пекех хутласа пыма юрать. Ҷапла:

$$3 \cdot (5 \cdot 4) = (3 \cdot 5) \cdot 4 = 15 \cdot 4 = 60.$$

Пётёмлетсе каласан:

$$a(bcd \dots) = (ab)cd \dots$$

г) Темиҗе число произведенине пёр-пёр число җине хутлас тесен, җав числоран хутланакансенчен пёрин җине хутласа, ытисене җаплипех хаварма юрать. Ҷапла:

$$(3 \cdot 2 \cdot 5) \cdot 3 = (3 \cdot 3) \cdot 2 \cdot 5 = 3 \cdot (2 \cdot 3) \cdot 5 = 3 \cdot 2 \cdot (5 \cdot 3).$$

Пётёмлетсе каласан:

$$(abc \dots) m = (am) bc \dots = a (bm) c \dots \text{ т. ыт. те.}$$

д) Суммăна пёр-пёр число ҫине хутлас тесен, ку число ҫине кашни хушăнаканне хутласа, пулнă результатсене хушса тухмалла. Ҷапла:

$$(5 + 3) \cdot 7 = 5 \cdot 7 + 3 \cdot 7.$$

Пётёмлетсе каласан:

$$(a + b + c + \dots) m = am + bm + cm + \dots$$

Хутлассин ылмаштару законё тӑрах ҫак свойствӑнах тепёр майлӑ калама пулать: пёр-пёр числона темиҫе число сумми ҫине хутлас тесен, ку числона кашни хушăнакан ҫине уйрӑм-мӑн хутласа, пулнӑ результатсене хушса тухмалла. Ҷапла:

$$5 \cdot (4 + 6) = 5 \cdot 4 + 5 \cdot 6.$$

Пётёмлетсе каласан:

$$m(a + b + c + \dots) = ma + mb + mc + \dots$$

Ку свойствӑна хутлассин *валесӑ* законё теҫҫё, мёншён тесен сумма ҫине хутланӑ чухне хутласси кашни хушăнакан ҫине *саланать*.

е) Разноҫе хутланӑ чухне те валесӑ законёпе усӑ курма пулать. Ҷапла:

$$(8 - 5) \cdot 4 = 8 \cdot 4 - 5 \cdot 4; \quad 7 \cdot (9 - 6) = 7 \cdot 9 - 7 \cdot 6.$$

Пётёмлетсе каласан:

$$(a - b)c = ac - bc; \quad a(b - c) = ab - ac,$$

урӑхла каласан, разноҫе пёр-пёр число ҫине хутлас тесен, пёчкленекеннипе пёчклетекеннине ҫак число ҫине уйрӑммӑн хутласа, пёрремёш результатран иккёмёшне кӑлармалла; пёр-пёр числона разность ҫине хутлас тесен, ҫак числона пёчкленекеннипе пёчклетекенни ҫине уйрӑммӑн хутласа, пёрремёш результатран иккёмёшне кӑлармалла.

9. Пайласси. а) Суммăна пёр-пёр число ҫине пайлас тесен, ҫав число ҫине кашни хушăнаканне уйрӑммӑн пайласа, пулнӑ результатсене хушмалла.

$$\frac{30+12+5}{3} = \frac{30}{3} + \frac{12}{3} + \frac{5}{3} = 10 + 4 + 1\frac{2}{3}.$$

Пётёмлетсе каласан:

$$\frac{a+b+c+\dots}{m} = \frac{a}{m} + \frac{b}{m} + \frac{c}{m} + \dots$$

б) Разноҫе пёр-пёр число ҫине пайлас тесен, ҫав число ҫине пёчкленекеннине те, пёчклетекеннине те уйрӑммӑн пайласа, пёрремёш результатран иккёмёшне кӑлармалла:

$$\frac{20-8}{5} = \frac{20}{5} - \frac{8}{5} = 4 - 1\frac{3}{5}.$$

Пётёмлетсе каласан:

$$\frac{a-b}{m} = \frac{a}{m} - \frac{b}{m}.$$

в) Произведение пёр-пёр число ҫине пайлас тесен, хутлакан-сенчен пёрне ҫав число ҫине пайласа, ыттисене ҫаплипех хъ-вармалла:

$$(40 \cdot 12 \cdot 8) : 4 = 10 \cdot 12 \cdot 8 = 40 \cdot 3 \cdot 8 = 40 \cdot 12 \cdot 2.$$

Пётёмлетсе каласан:

$$(abc \dots) : m = (a : m)bc \dots = a(b : m)c \dots \text{ т. ыт. те.}$$

г) Пёр-пёр числона теміҫе число произведенийё ҫине пай-лас тесен, ҫак числона пёр хутлаканё ҫине пайламалла, пул-нә результатне тепёр хутлаканё ҫине пайламалла т. ыт. те.:

$$120 : (2 \cdot 5 \cdot 3) = [(120 : 2) : 5] : 3 = (60 : 5) : 3 = 12 : 3 = 4.$$

Пётёмлетсе каласан:

$$a : (bcd \dots) = [(a : b) : c] : d \dots \text{ т. ыт. те.}$$

д) Пайлассин тата ҫакән пек свойствине катартар:

Пайланаканёпе пайлаканне пёр число ҫинех хутласан (е пайласан), частное улшәнмасть.

Ку свойствана ҫакән пек икё төслөх илсе катартса парар:

$$1) 8 : 3 = \frac{8}{3},$$

пайланаканёпе пайлаканне, калъпәр, 5 ҫине хутлар; вара

$$(8 \cdot 5) : (3 \cdot 5) = \frac{40}{15} \text{ пулать.}$$

Ку вака 5 ҫине кёскетсен, малтанхи частное $\frac{8}{3}$ пулать.

$$2) \frac{3}{4} : \frac{5}{6} = \frac{3 \cdot 6}{4 \cdot 5},$$

пайланаканёпе пайлаканне, калъпәр, $\frac{2}{7}$ ҫине хутлар; вара ҫенё частное

$$\left(\frac{3}{4} \cdot \frac{2}{7}\right) : \left(\frac{5}{6} \cdot \frac{2}{7}\right) \text{ пулать,}$$

въл ваксене хутлассипе пайлассин правилисем тәрәх, ҫапла пулать:

$$\frac{3 \cdot 2}{4 \cdot 7} : \frac{5 \cdot 2}{6 \cdot 7} = \frac{3 \cdot 2 \cdot (6 \cdot 7)}{4 \cdot 7 \cdot (5 \cdot 2)} = \frac{3 \cdot 2 \cdot 6 \cdot 7}{4 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 2}.$$

Ку вака 2-пе 7 ҫине кёскетсен, малтанхи частное $\frac{3 \cdot 6}{4 \cdot 5}$ пулать.

Пёр сәмахпа каласан, a , b , m кирек мёнле число пулсан та, яланах $(am) : (bm) = a : b$ пулать, аңа ҫапла та ҫырма пулать:

$$\frac{am}{bm} = \frac{a}{b}.$$

Пайланаканёпе пайлаканне пёр число ҫинех хутланăран частное улшăнмасть пулсан, въл пайланаканёпе пайлаканне пёр число ҫинех пайланăран та ҫавах улшăнмасть, мёншён тесен пёр-пёр число ҫине пайлани въл тўнтерле число ҫине хутланипе пёрех.

10. Действисен свойствисемпе усă курасси. Действисен ҫак пăхса тухнă свойствисемпе час-часах алгебралла выраженисене урăхлатнă чухне усă кураҫҫё; сăмахран:

а) $a + b + a + 2 + b + a + 8$. Хушассин пёрлештерў законёпе усă курса, хушăнакансене ҫакн пек ушкăнлатпър:

$$(a + a + a) + (b + b) + (2 + 8).$$

Ку суммăна кёскен ҫапла ҫырма пулать:

$$(a \cdot 3) + (b \cdot 2) + 10.$$

Хутлассин ылмаштару законёпе усă курса, ку суммăна ҫапла улăштарса ҫырма пулать:

$$3a + 2b + 10.$$

б) $a + (b + a)$ выражени илер; a ҫумне $(b + a)$ сумма хушас тесен, a ҫумне b , унтан тата a хушма юрать; вара $a + b + a$ пулать. Хушăнакансене ҫапла ушкăнлатпър:

$$(a + a) + b.$$

Ку суммăна кёскен ҫапла ҫырма пулать:

$$a \cdot 2 + b, \text{ е } 2a + b.$$

в) $a \cdot (3x^2a)$ выражени илер; a числа $3x^2a$ произведени ҫине хутлас тесен, a числа 3 ҫине хутласа, пулнă результатне x^2 ҫине хутлама пулать т. ыт. те. Вара $a3x^2a$ пулать. Саспаллисене алфавит йёркипе ҫырса, числине мала лартса, ку произведение ҫапла ҫырма пулать: $3a^2x^2$.

г) $(\frac{1}{5}ax) \cdot 10$ выражени илер. Произведение 10 ҫине хутлас тесен, 10 ҫине пёр-пёр хутланаканнинне хутласан та ҫитет. Ҫавăнпа $\frac{1}{5}$ хутланаканне 10 ҫине хутлăпър; вара $2ax$ пулать.

д) $(a+x+1) \cdot 3$ выражени илер. Хутлассин валеҫў свойстви тăрăх ҫакн пек пулать:

$$(a \cdot 3) + (x \cdot 3) + (1 \cdot 3),$$

ăна вара ҫапла ҫырма юрать:

$$3a + 3x + 3.$$

е) $\frac{9ab}{3}$ выражени илер. $9ab$ произведение 3 ҫине пайлас тесен, 3 ҫине пёр хутланаканнинне 9 -не пайласан та ҫитет; пайласан, $3ab$ пулать.

Упражненисем.

Сак выраженисене җәмәлләтсә парәр; кашни тәсләхәнчех действисен мәнле свойствисемпе усә курмаллине каласа әнлантарәр.

10. $a + b + a + b + a;$ $x + 10 + (12 - x) + 3.$

11. $5 + a(b - 5) + a;$ $x + (a + x).$

12. $m + (n - m);$ $5aabxabbx.$

13. $(3xy) \cdot (2z);$ $\left(\frac{2}{3}ax\right) \cdot 3.$

14. $(x + 3) \cdot 5;$ $7(x + y + z).$

15. $(2a + 8b - 4c) : 4;$ $(10a^2b) : 2.$

16. $(72x - 18y) : 9;$ $(20a^2x^3) : (5ax^2).$

17. $\frac{a}{4} : \frac{b}{4};$ $\frac{15ax}{7} : \frac{5a}{7}.$

ОТНОСИТЕЛЬНӦЙ ЧИСЛОСЕМ ТАТА ВЁСЕМПЕ ДЕЙСТВИСЕМ ТӦВАССИ.

1. Икё тёрлё хире-хирёсле ӧнланмалли пысӦкӧшсем синчен ӧнлантарни.

11. 1-мёш задача. Термометр сурсёрте 2° , кӧнтӧрла 5° кӧ-
тартнӧ. Сурсёртен кӧнтӧрла ситиччен температура мице градус
тата мёнле улшӧннӧ?

Ку задачӧра условине сителёклё тулли каламан: кунсӧр
пусне сурсёрте термометр 2° ӧшша, е 2° сивве кӧтартнине ка-
лас пулать; савнашкалах ӧна кӧнтӧрлахи температура синчен
каланӧ чухне те кӧтартмалла. Сӧмахран, термометр сурсёрте
те, кӧнтӧрла та ӧшӧ синче пулнӧ пулсан, температура ку вӧхӧт
хушшинче 2° тытӧнса 5° таран, урӧхла каласан, 3° хӧпарнӧ пу-
лать; сурсёрте термометр 2° сивё (0° -ран аяларах) кӧтартнӧ пул-
сан, кӧнтӧрла 5° ӧшӧ (0° -ран сӧлрех) кӧтартнӧ пулсан, вара
температура $2 + 5$, урӧхла каласан, 7° хӧпарнӧ пулать, т. ыт. те.

Ку задачӧра икё хире-хирёсле шутлама юрӧхлӧ пысӦкӧшё
синчен сӧмах пырать: температурӧн градусёсене термометр син-
чен нуль тёлёнчен сӧлелле те, аялалла та шутласа кайма пу-
лать. 0° сӧделли температурӧна (ӧшша) положительнӧй тесе,
унӧн градус хисепне $+$ паллӧпа сӧрма йышӧннӧ, 0° аялалли
температурӧна отрицательнӧй тесе, унӧн градус хисепне —
паллӧпа сӧрма йышӧннӧ (малтанхи числona нимён паллӧсӧр илсен
те йӧнӧш пулмась).

Малтанхи задачӧна халё ёнтё сӧпла тӧватпӧр: термометр
сурсёрте — 2° , кӧнтӧрла $+ 5^{\circ}$ кӧтартнӧ. Сурсёртен кӧнтӧрла
ситиччен температура мице градус тата мёнле улшӧннӧ? Капла
каласан, задачӧшӧн пӧр паллӧ ответ пулать: температура $2 + 5$,
урӧхла каласан, 7° хӧпарнӧ.

2-мёш задача. Октябрь чугун сӧлё синче (Мускавпа Ленин-
град хушшинче) скорый поезд Болое станцинчен 100 км-та
пулнӧ чух, сӧк сӧл синчи почтовый поезд Болое станцинчен
50 км-та пулнӧ (ку станци Мускавпа Ленинград хушшинче сӧр-
ма сӧлта пекех ларать). Сӧк икё поезд пӧр-пӧринчен мён чухлё
инсе пулнӧ?

Сӧпла кӧна каланипе ку задача усӧмлах пулмась: поездсем
иккёшё те Болое станцин пӧр енче, сӧмахран Ленинград енче,

пулнă-и, е вѣсем Бологое станцинчен икѣ енче пулнă-и—задăчăра кун ҫинчен каламан. Поездсем Бологое станцинчен иккѣшѣ те пѣр енче пулнă пулсан, паллах, поездсен хушши 100—50 е 50 км пулатъ; Бологое станцинчен икѣ енче пулсан, поездсен хушши 100 + 50 е 150 км пулатъ. Ҫавăнпа та, задача тулли пултăр тесен, поездсем Бологое станцинчен мѣн чухлѣ инҫере пулнине пѣлни ҫитмест, унсăр пуҫне ҫак инҫешсем Бологое станцинчен хăш еннелле пулнине кăтартмалла.

Кунта эфир каллех виҫисѣр пуҫне тата унăн енне пѣлме кирлѣ пысăкăшĕн тĕслĕхне куртăмăр. Поездпа Бологое хушшин пѣр пысăкăшнех (сăмахрян 100 км) Бологое станцинчен Мускав еннелле шутласа кайма та, Ленинград еннелле шутласа кайма та пулатъ. Ахаль арифметикалла числосем тăршшĕн пысăкăшне кăна кăтартаҫҫĕ, анчах ҫав тăршшĕ хăш еннелле пулнине нимĕн те кăтартмаҫҫĕ.

Панă задăчăра тăршшĕн пысăкăшне кăтартакан число ҫумне тата вăл хăш еннелле пулнине кăтартни кирлѣ, сăмахран 100 км Мускавалла, 50 км Ленинградадалла т. ыт. те. Вара тин задача уҫăмлă пулатъ.

Енсене ҫапла кăтартма пулатъ:

Октябрь ҫулĕпе икѣ майлă кайма пулатъ, ҫак майсенчен хăшне те пулин пѣрне (сăмахран Ленинградран Мускавалла пынине) положительнай тейĕпѣр, хиреҫ килнине (Мускавран Ленинградадалла пынине) отрицательнай тейĕпѣр; ҫавна май положительнай еннелле каякан ҫула положительнай ҫул, отрицательнай еннелле каякан ҫула отрицательнай ҫул тейĕпѣр. Малтанхине + (плюс) паллăллă е нимĕн паллăсар числосемпе ҫырăпăр, иккĕмĕшне—(минус) паллăллă числосемпе ҫырăпăр.

Ҫапла ĕнтĕ, поезд Бологое станцинчен Мускав енче 100 км-та пулсан, эфир вара поездпа Бологое хушши + 100 км (е просто 100 км) тетпѣр; поезд Бологое станцинчен Ленинград енче 50 км-та пулсан, вара Бологое станципе унăн хушши — 50 км пулатъ. Паллах, кунта + тата — паллăсем хушаспа кăларас деиствисене пѣлтермеҫҫĕ, вĕсене енсене кăтартма кăна ҫырнă.

Хайхи задăчана ĕнтĕ ҫапла майласа ҫырăпăр: Октябрь чугун ҫулĕ ҫинче скорый поезд Бологое станцинчен + 100 км-та (е просто 100 км) пулнă чух, почтовый поезд Бологое станцинчен — 50 км-та пулнă. Ҫак поездсен хушши мѣн чухлѣ пулнă? Халĕ задăчана уҫăмлă ҫырнă, унăн ответĕ те татакля тухать (7 ук. ҫине пăхăр, стрелка положительнай еннелли ҫула кăтартать); поездсен хушши 100 + 50 е 150 км пулнă.

12. Икѣ тĕрлѣ хире-хиреҫле аңланмалли ытти пысăкăшсем. Ҫўлте асăннă задăчасенче кăтартнă пысăкăшсемсѣр пуҫне, ҫакан пек икѣ хире-хиреҫ аңланмалли пысăкăшсем татах та нумай. Сăмахран ҫаксем:

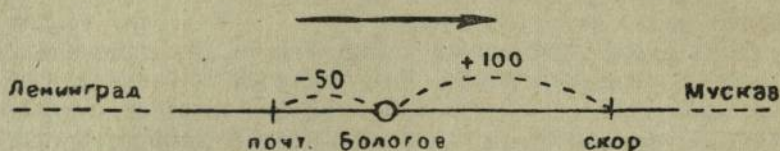
Дохода хиреҫле пысăкăш расход пулатъ

Выляса илнине	"	"	выляса яни	"
Тупăша	"	"	убыток	"
Пурлăха	"	"	парăм	"

т. ыт. те.

Дохода, выляса илнине, тупаша, пурлаха т. ыт. те положительнай пысакашсем тесе шутласа, вёсене + паллала (е нимён палласар) числосемпе сыратпар пулсан, расхода, выляса янине, убытока, парама т. ыт. те саван пек пысакашсемех, анчах отрицательнай пысакашсем тесе, вёсене — паллала числосемпе сырма йышанна; вара расхода отрицательнай доход, выляса янине отрицательнай выляса илни теме пулать т. ыт. те. Сакан пек килешсен пире сакнашкал каланя самахсем те анланмалла пулашсе: килсурт юлташлахё хваттерсенчен январте + 200 тенке, февральте + 150 тенке, марта — 50 тенке доход илне (март уйахенче 50 тенке убыток пулна ёнте); е тата: асла ывалён пурлахё 500 тенке, ваталаххин 300 тенке, кёсёнин — 500 тенке пулна тени те анланмалла пулать (кёсён ывалён 500 тенке парам пулна ёнте).

Анчах, калас пулать, сак асанна пысакашсемпе перлех тата урах терле пысакашсем те нумай, вёсен „енне“ катарта пама сук, самахран, объёме, лаптакне т. ытти савнашкал пысакашсене икё хире-хирёс майла анланма сук.



1 черт.

13. Относительнай числосем. Арифметикара пахса тухакан числосем енге катартаман пысакашёсене кана пертерешсе (самахран, пер-пер таршешёне илсе, апа хаш енгелле шутламаллине мар, пысакашне кана перлес тесен, апа арифметикалла числопа катартама пулать). Алгебра ра пахса тухакан числосем пысакашсен виёине тага енге катартама парашсе. Саванпа та пер майла анланмалли пысакашсене катартакан числосем умне + палла, сав пысакашнех тепер майла анланмалла пулсан, вара число умне — палла сырашсе.

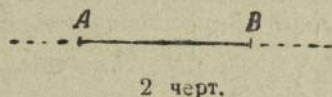
Плюс (+) паллапа сырна числа (+ паллана сырмасар та хаварма йышанна) *положительнай число* тешсе; минус (—) паллапа сырна числа *отрицательнай число* тешсе. Самахран, + 10, + $\frac{1}{2}$, + 0,3 — положительнай числосем, анчах — 8, — $\frac{5}{7}$, — 3,25 — отрицательнай числосем. Числосен шутне тата 0 (нуль) кертешсе, анчах апа положительнай число тесе те, отрицательнай число тесе те шутламашсе. Саванпа та + 0, — 0 е ахаль 0 пер пекех шутланашсе.

Положительнай, отрицательнай числосене тата нуле, нимёнге палласар ахаль (е арифметикалла) числосенчен уйарса, *относительнай* числосем тешсе.

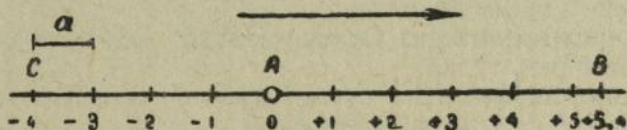
Палласар сырна относительнай числа относительнай числом *абсолютла пысакашё* тешсе; саван пек — 10 числом абсолютла пысакашё 10 пулать, + 5 числом абсолютла пысакашё 5 пулать.

Икё относительнай числон абсолютлă пысăкăшĕсем те, паллисем те пĕрпек пулсан, вĕсем *пĕртан* пулаççĕ.

14. Числосене число тĕнĕлĕ *çинче* кăтартасси. Тўрĕ лини икё енчен те татăлса тăракан пĕр-пĕр пайне, сăмахран пĕр енчен *A* точкăпа, тепĕр енчен *B* точкăпа татăлса тăракан пайне тўрĕ лини татăкĕ теççĕ (2 черт.). Кашни лини татăкĕнче унăн тăршшене, хăш енелле кайнине кăтартма пулат; панă лини татăкĕ хăш енелле каясси икё тĕрлĕ пулма пултарать. Сăмахран, эфир илнĕ татăк *çинче* *A* точкăран *B* точка енелле, е каялла, *B* точкăран *A* точка енелле каяссине кăтартма пулат. *A* точкăран *B* точка енелле каймалла пулсан, *A* точкăна татăк пуçламĕшĕ, *B* точкăна унăн вĕçĕ тейĕпĕр.



Çакан пек татăксемпе относительнай числосене ўкерчĕк *çинче* сăпла кăтартма пулат. Пĕр-пĕр тўрĕ лини (сăмахран горизонтальĕ лини) илĕпĕр те, çак тўрĕ лини *çинчи* икё енĕнчен хăшне положительнай тесси *çинчен* калаçса татăлăпăр (3 черт.). Сăмахран, сулахайран сылтăмаллине (стрелкăпа кăтартнине) положительнай тейĕпĕр, вара хирĕçле енне—сылтăмран сулахаялине—отрицательнай тесе шутлăпăр. Малалла пĕр-пĕр *a* татăка (чертеж *çинче* кăтартнă пек) тăршшĕн единици вырăнне илĕпĕр. Халĕ ĕнтĕ пĕр-пĕр положительнай число, сăмахран $+5,4$ панă пултар. Тўрĕ лини *çинче* пĕр-пĕр *A* точкăна татăксен пуçламĕшĕ тесе йышăнапăр; унтан çак точкăран сылтăмалла тăршшĕн



a единиципе виçсе 5,4 единица хурса тухăпăр. Вара 5,4 единица тăршшĕ, положительнай енелле каякан *AB* татăк пулса тăрат. Çак татăкăн вĕçĕ *B* $+5,4$ числona кăтартса парать. Халĕ отрицательнай число илĕпĕр, сăмахран -4 . Çак числona ўкерчĕк *çинче* кăтартса пама *A* точкăран сулахаялла тăршшĕн *a* единиципе виçсе 4 единица хурса тухăпăр. Вара 4 единица тăршшĕ, отрицательнай енелле каякан *AC* татăк пулса тăрат; çак татăкăн вĕçĕ *C* -4 числona кăтартса парать.

Относительнай числосене пурне те саван пек пĕр тўрĕ лини *çинех* пĕр пуçламĕш *A* точкăранах пĕр-пĕр енелле виçсе хунă тўрĕ татăксен вĕçĕсем пек шутлама юрат. Вара çак тўрĕ линин *A* точкăран сылтăмри пайĕнче точкăсемпе положительнай числосене, *A* точкăран сулахайри пайĕнче отрицательнай числосене кăтартасçĕ. Нуль числona çак лини *çинче* *A* точкăпа палă тунă. Çакан пек тўрĕ линие час-часах *числосен тўрĕ линийĕ*, е *числосен тĕнĕлĕ*, теççĕ.

+ знака җыракан числосене пелтерекен вѣслѣ лини татӕкѣсем хӕш еннелле каясси, — знака җыракан числосене пелтерекен вѣслѣ лини татӕкѣсем хӕш еннелле каяссине хире-хирѣс ыртнӕран, числосен паллисене хӕйсене те *хире-хирѣс паллӕсем* теҗҗѣ. Кирек мѣнле икѣ числон та, сӕмахран $+3$ -пе -3 , $+\frac{1}{2}$ -пе $-\frac{1}{2}$ т. ыт. числосен паллисем хирѣсле, абсолютлӕ пысӕкӕшѣсем пѣр-тан пулсан, вѣсене *хире-хирѣс числосем* теҗҗѣ.

Халѣ ѣнтѣ *относительнай* числосемпе тѣрлѣ дейтвисем мѣнле тӕвассине пӕхса тухӕпӕр.

II. Относительнай числосене хушасси.

15. Задача. Кооперативлӕ юлташлӕх январьте a тен., февральте b тенкѣ тупӕш илнѣ. Юлташлӕх икѣ уйӕхра мѣн чухлѣ тупӕш илнѣ?

Ку задаҕанӕ шутлама формула җырӕпӕр. Паллах, икѣ уйӕхри тупӕш кашни уйӕхра илнѣ тупӕшсен суммипе тан пулмалла. Тупмалли сумманӕ x -па җырсан, җапла формула пулать:

$$x = a + b.$$

Анчах кооперативӕн җав уйӕхсенчен пѣринче е иккѣшѣнче те тупӕш мар, убыток пулма пултарать. Пирѣн формула җакӕн пек тѣслѣхре те юрӕхлӕ пултӕр тесен, пирѣн a тата b саспаллисене относительнай числосем тесе йышӕнмалла; пѣр-пѣр уйӕхра тупӕш илнѣ пулсан—положительнай число пулать, убыток пулсан—отрицательнай число пулать. Ғапла вара пирѣн относительнай числосене хушма пѣлмелле.

16. Икѣ число хушасси. Относительнай числосене хушассин икѣ тѣслѣхне пӕхса тухар.

а) Икѣ хире-хирѣс число сумми нуль пулать. Сӕмахран:

$$(+5) + (-5) = 0; \quad (-3) + (+3) = 0; \quad (+4,7) + (-4,7) = 0.$$

Пѣтѣмлетсе каласан:

$$(+a) + (-a) = 0.$$

Чӕнах та, калӕпӕр, кооператив пѣр уйӕхѣнче тупӕш илсен, тепѣр уйӕхѣнче җавӕн чухлех убыток курсан, чӕннипе унӕн усламѣ те, убытки те пулмасть.

Ғавӕн пекех, поезд станҕаран пѣр еннелле 5 км кайсан, унтан каялла 5 км килсен, вӕл поезд станҕаран нимѣн чухлѣ те кайманнине пѣлтерет.

б) Пѣр-пѣр число җумне нуль хушни е нуль җумне пѣр-пѣр число хушни җав числона нимѣн улӕштармасӕр хӕварнипе пѣрех. Сӕмахран,

$$\begin{aligned} (+75) + 0 &= +75; & (-75) + 0 &= -75; \\ 0 + (+3,5) &= +3,5; & 0 + (-3,5) &= -3,5. \end{aligned}$$

Пѣтѣмлетсе каласан:

$$(+a) + 0 = +a; \quad (-a) + 0 = -a.$$

Чăнах та, калăпăр, кооператив малтанхи уйăхра 75 тен. тупăш е убыток илнĕ пулсан, тепĕр уйăхĕнче тупăшĕ те, убытокĕ те пулман пулсан, унăн малтанхи уйăхра пулнă тупăш е убыток юлат.

Халĕ кун умĕнхи параграфра асăннă задачкана шутлар. Эпир ана шутлама çакан пек формула çыртăмар: $x = a + b$.

a тата b саспаллисем вырăнне панă числосене лартсан, x мĕнле улшăннине пăхса тухăпăр.

1-мĕш тĕслĕх. *Кашни уйăхрах тупăш илнĕ.* Сăмахран, малтанхи уйăхра 200 тенкĕ, иккĕмĕшĕнче 150 тенкĕ тупăш илнĕ.

Ку тĕслĕхре $a = +200$; $b = +150$. Паллах:

$$x = (+200) + (+150) = +350,$$

урăхла каласан, кооператив икĕ уйăх хушшинче 350 тенкĕ тупăш илнĕ.

2-мĕш тĕслĕх. *Кашни уйăхрах убыток пулнă.* Сăмахран, малтанхи уйăхра 200 тенкĕ, иккĕмĕшĕнче 150 тенкĕ убыток пулнă.

Ку тĕслĕхре $a = -200$; $b = -150$. Паллах:

$$x = (-200) + (-150) = -350,$$

урăхла каласан, кооператив икĕ уйăх хушшинче 350 тенкĕ убыток курнă.

Çак тĕслĕхсене шутланă хыççăн çапла вывод тума пулат:

Пĕрпек паллăллă икĕ число хушас тесен, вĕсен абсолютлă пысăкăшсене хушса, паллине çавнах хăвармалла.

3-мĕш тĕслĕх. *Пĕр уйăхĕнче тупăш илнĕ, тепринче убыток пулнă, анчах тупăшне убытокран ытларах илнĕ.* Сăмахран, малтанхи уйăхра 200 тенкĕ тупăш илнĕ, иккĕмĕшĕнче 150 тенкĕ убыток пулнă.

Ку тĕслĕхре: $a = +200$; $b = -150$. Паллах, кооперативăн пĕтĕм тупăшĕ 50 тенкĕ анчах пулат:

$$x = (+200) + (-150) = +50.$$

4-мĕш тĕслĕх. *Пĕр уйăхĕнче тупăш илнĕ, тепринче убыток пулнă, анчах тупăшне убытокран сахалрах илнĕ.* Сăмахран, малтанхи уйăхра 200 тенкĕ убыток пулнă, иккĕмĕшĕнче 150 тенкĕ тупăш илнĕ.

Ку тĕслĕхре: $a = -200$; $b = +150$. Паллах, икĕ уйăх хушшинче кооператив 50 тенкĕ убыток курнă:

$$x = (-200) + (+150) = -50.$$

Юлашки икĕ тĕслĕхе шутланă хыççăн çакан пек вывод тума пулат:

Тĕрлĕ паллăллă икĕ число хушас тесен, вĕсен абсолютлă пысăкăшĕсен разносене тупса, умне абсолютлă пысăкăшĕ ытларахин паллине лартмалла.

Положительнăй число умĕнчи $+$ знака пăрахсан, çулте çырна пĕртанлăхсене кĕскен çапла çырма пулат:

$$200 + (-150) = 50; \quad -200 + 150 = -50.$$

17. Хушассин правиLINE тепёр төрлө калани. Хушасси җинчен җаканта кәтартнә икә правило вырәнне урәх икә правило илме пулать, вёсене астума та җәмәл:

а) Положительнай число хушас тени — унән абсолютлә пысакәшне хушас тени пулать. Сәмахран:

$$(+7) + (+3) = +10 \text{ тата } (+7) + 3 = 7 + 3 = 10;$$

$$(-7) + (+3) = -4 \text{ тата } (-7) + 3 = -7 + 3 = -4.$$

б) Отрицательнай число хушас тени — унән абсолютлә пысакәшне кәларас тени пулать. Сәмахран:

$$(+7) + (-10) = -3 \text{ тата } (+7) - 10 = 7 - 10 = -3;$$

$$(-7) + (-10) = -17 \text{ тата } (-7) - 10 = -7 - 10 = -17.$$

Ку икә правиләна кәскен җакән пек икә паллән формулипе җырма пулать:

$$+(+a) = +a; \quad +(-a) = -a.$$

18. Виҗе е ытларах число хушасси. Малтан иккәмеш суммине тупаҗҗе, вёсен сумми җумне виҗҗемешне хушаҗҗе тата малалла та җаплах. Сәмахран, җак числосен суммине тупмалла пултәр:

$$(+8) + (-5) + (-4) + (+3),$$

әна кәскен җапла җырма пулать:

$$8 + (-5) + (-4) + 3.$$

Вёсене җак йёркепе хушатпәр:

$$8 + (-5) = 3; \quad 3 + (-4) = -1; \quad (-1) + 3 = 2.$$

Тепёр тесен, ку йёркене тытса пыма кирлех те мар, мәншән тесен (25 § җитсен курапәр акә) хушәнакан числосене пёр-пёрин вырәнне куҗарса лартма та, вёсене кирек мәнле ушканласа хушма та пулать.

Упражненисем.

18. $(+7) + (+3);$ $(-7) + (-3);$ $\left(+\frac{1}{2}\right) + \left(+2\frac{1}{2}\right).$

19. $\left(-\frac{1}{2}\right) + \left(-2\frac{1}{2}\right);$ $(+10) + (-2);$ $(+10) + (-12).$

20. $(-5) + (+5);$ $(-5) + (+2);$ $4 + (-3).$

21. $(-4) + 3;$ $8 + (-10);$ $(-8) + 10.$

22. $(+8) + (-5) + (-3) + (+2).$

23. $(-7) + (-3) + (-1) + (+11).$

III. Относительнай числосене кәларасси.

19. Задача. Фабрика январь тата февраль уйәхёсенче пурә а тенкә тупаш илнә. Фабрика январь уйәхёнче б тенкә тупаш илнә пулсан, февраль уйәхёнче мән чухлө тупаш илнә?

Икә уйәх хушшинче илнә тупаш кашни уйәхра илнә тупашсен сумми пулать, тата тупашне хәш чухне положительнай

числопа, хайш чухне отрицательнай числопа (убыток) катарта пулать.

Ҷаванпа февраль уйахенче илне палла мар тупаша (положительнай е отрицательнай числона) относительнай числосене хушас правило тарых январь уйахенчи тупаш сумне хушсан, ике уйахра илне петем тупаш пулмалла. Ҷапла, пирен задачара сумма a тата хушанакансенчен пери b палла, тепер хушанаканне тупмалла.

Ике хушанаканан суммине хушанакансенчен перин тарых тепер палла мар хушанаканне тупмалли действие каларас действи теҗҗе; паня числосем арифметикалла числосем те, относительнай числосем те пулма пулгараҗҗе; паня сумманя печекленекен теҗҗе, паня хушанаканне — печеклетекен теҗҗе, палламар хушанаканне — разность теҗҗе. Ҷаванпа та терес каларнине эпир яланах хушса тереслеме пултаратпяр: палла мар разноҗе тупсан, яна печеклетекен сумне хушатпяр; сумми печекленекенне тан пулсан, каларассине терес туня пулать.

20. Разноҗе ике хушанакантан перне тупна пек тупасси. Пирен задачаи тупмалли разноҗе x саспаллине палла туса, эпир Ҷапла җырса хума пултаратпяр:

$$x = a - b.$$

$a - b$ разность пысакашне җак уйрам теслехсенче пахса тухар:

а) Калпяр $a = +1000$; $b = +400$. Ку ентя фабрика январь уйахенче 400 тенке, ике уйах хушшинче пуре 1000 тенке тупаш илнине пелтерет; паллах фабрика февраль уйахенче 600 тенке тупаш илне пулать. Ҷапла:

$$x = (+1000) - (+400) = +600$$

е кескен:

$$x = 1000 - 400 = 600.$$

Шутланине хушса тереслер:

$$(+600) + (+400) = +1000.$$

б) Калпяр $a = +1000$ тата $b = +1000$. Ку ентя фабрика январь уйахенче 1000 тенке тупаш илнине тата ике уйах хушшинчи тупаш та Ҷаван чухлех пулнине пелтерет. Паллах, февральте фабрикан тупаш та, убыток та пулман. Ҷапла:

$$x = (+1000) - (+1000) = 0.$$

Хушса тереслер:

$$(+1000) + 0 = +1000.$$

Каларассине терес шутланя. Ҷакан пек сүтсе-явсах тушатпяр:

$$(-1000) - (-1000) = 0.$$

в) $a = +1000$; $b = +1200$. Ку ентя фабрика январь уйахенче 1200 тенке тупаш илнине, анчах ике уйах хушшинчи тупаш пуре те 1000 тенке кана пулнине пелтерет. Паллах, январьти тупашран 200 тенке февральти убытока саплама кайна. Ҷапла:

$$x = (+1000) - (+1200) = -200,$$

е кёскен:

$$x = 1000 - 1200 = -200.$$

Хушса тёрёслер:

$$(-200) + (+1200) = +1000.$$

г) $a = +1000$; $b = -200$. Ку ёнтё фабрика январь уйӕхёнче 200 тенкё убыток туине, анчах икё уйӕх хушшинче 1000 тенкё тупӕш илнине пёлтерет. Паллах, ку тупӕша февраль уйӕхёнче илнё, кунсӕр пушне вӕл шутран январьти убытока саплама 200 тенкё кайнӕ, апла февральте илнё пётём тупӕш 1200 тенкё пулнӕ пулать. Ҷапла:

$$x = (+1000) - (-200) = +1200, \text{ е } x = 1000 - (-200) = 1200.$$

Хушса тёрёслер:

$$(+1200) + (-200) = +1000.$$

д) $a = -100$; $b = +800$. Ку ёнтё фабрика январьте 800 тенкё тупӕш илнине, анчах икё уйӕх хушши ёсленё хысӕн 100 тенкё убыток пулнине пёлтерет. Паллах, февральте убыток пулнӕ, вӕл убытока пула январьти 800 тенкё тупӕш пётсе тата 100 тенкё убыток юлнӕ, урӕхла каласан февральти пётём убыток 900 тенкё пулать. Ҷапла:

$$x = (-100) - (+800) = -900, \text{ е } x = -100 - 800 = -900.$$

Хушса тёрёслер:

$$(-900) + (+800) = -100.$$

е) $a = -100$; $b = -150$, урӕхла каласан, январьте 150 тенкё убыток пулнӕ, икё уйӕх хушшинче пурё 100 тенкё убыток пулнӕ. Апла январьти убытокран 50 тенкине февральти 50 тенкё тупӕшпа сапланӕ. Ҷапла:

$$x = (-100) - (-150) = +50.$$

Хушса тёрёслер:

$$50 + (-150) = -100.$$

21. Кӕларассин прави. Иртнё параграфри тёслёхсене асӕр-харах пӕхсан, эфир ҕакна куратпӕр: ҕӕлте пӕхса тухнӕ тёслёхсене кашнинчех эфир панӕ числона кӕларас вырӕнне ҕав числона хирёс число хушма пултарнӕ.

Чӕнах та, сӕмахран а) тёслёхе илер:

$$(+1000) - (+400) = +600.$$

+400 числона кӕларас вырӕнне ӕна хире-хирёс число хушар:

$$(+1000) + (-400) = +600.$$

Ҷав результатах пулчё.

Илӕпӕр г) тёслёхе:

$$(+1000) - (-200) = +1200.$$

Каларас ыра́нне хире-хире́с число хушатпәр:

$$(+1000) + (+200) = +1200.$$

Результаче́ җавах.

Юлашкинчен, д) төслөхе илер:

$$(-100) - (+800) = -900.$$

Җаван пекех:

$$(-100) + (-800) = -900.$$

Ытти пур төслөхсенче те җакан пек пулнинех кәтартса пама пулать.

Җапла вара, пур төслөхсенче те панә числона каларас ыра́нне пөчөкленекенни җумне пөчөклетекеннине хире-хире́с число хушма пулать. Урәхла каласан, каларас действие хушассипе улаштарма юрать, хушма эфир пөлетпөр. Кунтан җакан пек правило тухса тәрать:

Пөр-пөр число каларас тесен, пөчөкленекенни җумне пөчөклетекеннине хире-хире́с число хушма юрать.

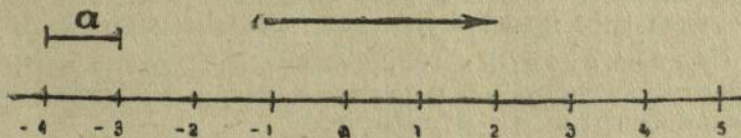
22. Икө паллан формули. Җапла ентө җүлте каланә правило тәрах, положительнай число $+a$ каларас ыра́нне, отрицательнай число $-a$ хушма пулать; отрицательнай число $-a$ каларас ыра́нне положительнай число $+a$ хушма пулать; ана җакан пек икө паллан формулипе җырма пулать:

$$-(+a) = -a; \quad -(-a) = +a.$$

23. Алгебрәлла суммәпа разность. Относительнай числосем кирек мөнле разноҗа та сумма пек тума, кирек мөнле суммәна та разность пек тума май парасҗө. Сәмахран, $7-3$ разноҗа җапла җырма пулать: $(+7) + (-3)$ е көскен: $7 + (-3)$; $4+2$ суммәна җапла җырма пулать: $(+4) - (-2)$ е көскен: $4 - (-2)$. Җакна еверлө хушас тата каларас действисемпе җыханса тәракан кирек мөнле выражение те сумма пек тума пулать. Сәмахран:

$$20 - 5 + 3 - 7 = 20 + (-5) + 3 + (-7).$$

Җаванпа алгебрәра относительнай числосене хушассипе каларассин пур төслөхөсене те пөр действие пөрлештерме пулать, ана алгебрәлла хушасси теҗҗө.



4 черт.

Алгебрәлла хушса пулвә суммәна алгебрәлла сумма теҗҗө, уван хушанаканнисем положительнай, отрицательнай тата нульпе тан числосем пулма пултараҗҗө; кунтан уйрәм арифметикәлла суммәра пур хушанакансем те ахаль (арифметикәлла) число-

сем пулаççё. Çаван пекех, пёчёкленекеннипе пёчёклетекенни относительнай числосем пулсан, разноça та алгебралла разность теççё.

24. Относительнай числосене пысаккәшё тәрәх танлаштарни. Эпир 10 число 7-рен пысак тетпёр пулсан, вәл 10—7 разность положительнай число пулнине, 7—10 разность отрицательнай число пулнине пёлтерет. Отрицательнай числосем телёшпе те çак пысак е пёчёк йнланәва калама йышәнәпәр, ак çапла: $a-b$ разность положительнай число пулать пулсан, относительнай число a тепёр относительнай число b -рен пысак тесе, $a-b$ разность отрицательнай число пулать пулсан, a число b числоран пёчёккё тесе шутләпәр. Ку условисем тәрәх пирён çапла йышәнмалла:

1. Кашни положительнай число нульрен тата кирек мёнле отрицательнай числоран та пысак; сәмахран, $8 > 0$ тата $8 > -10$, мёншён тесен икё разноçё те $8-0$ тата $8-(-10)$ —положительнай числосем.

2. Кашни отрицательнай число нульрен тата кирек мёнле положительнай числоран та пёчёккё; сәмахран, $-5 < 0$ тата $-5 < +2$, мёншён тесен икё разноçё те $-5-0$ тата $-5-(+2)$ отрицательнай числосем.

3. Икё отрицательнай числоран хәшён абсолютлә пысаккәшё пёчёкрех—çавә пысаккрах пулать; сәмахран, $-5 > -12$, мёншён тесен $-5-(-12)$ разность положительнай число $+7$ пулать.

Относительнай числосен танлаштарулла пысаккәшёсене лайәхрах йнланса илме числосен тёнёлё çинче вёсене йста çырнине пәхса тухсан аванрах. Вёçёмсёр тўрё лини çинче (4 черт.) пёрпёр пуçламёш A точка илсе, унтан сылтәмалла, ирёклё единицапа виçсе, положительнай числосене пёлтереке татәксем, çав точкәран сулахаялла отрицательнай числосене пёлтереке татәксем хурса тухнә пултәр. Вара çав тўрё лини çинче сулахайран сылтәмалла (чертеж çинчи стрелка кәтартнә пек) куçса пырсан, эпир пёрмаях пёчёк числосенчен пысаккисем çинелле куçса пыратпәр, унтан каялла, сылтәмран сулахаялла куçнә чух—пысаккисенчен пёчёкрех числосем çинелле куçса пыратпәр. Урәхла каласан, числосен тёнёлё çинче икё числоран хәшё сылтәмарах тәрәть—çавә пысаккрах пулать. Числосен тёнёлё çинче относительнай числосен танлаштарулла пысаккәшёсем çинчен халё кәна пәхса тухнә виçё правило тёрёссине çамәлах курма пулать.

Асәрхаттарни. a положительнай число пулнине кәтартма кёскен $a > 0$ сыраççё; a число отрицательнай пулнине кәтартма $a < 0$ сыраççё.

Упражненисем.

24. Тавара a тенке илнё те, b тенке сутнә. Мён чухлё тупаш илнё? $a=40$, $b=35$ пулсан, тупашё мён чухлё пулать? Отрицательнай ответ кунта мёне пёлтерет?

25. Пёр сын кашни уйәхра m тенкё доход илет, n тенкё расход тәвать. Кашни уйәхра унән миçе тенкё юлса пырать? $m=120$, $n=130$ илсе ответне тупәр. Отрицательнай ответ мёне пёлтерет?

Ҷақ тәсләхсенче кәартнә дейтвисене шутләр:

26. $12 - (-2)$; $5 - (-5)$; $(+8) - (-10)$; $(+1) - (-1)$.

27. $a - (-b)$; $(+m) - (-n)$; $(+2x) - (-3x)$.

28. $10 + (+2) - (-4) - (+2) + (-2)$.

29. $a + b + c + d$ суммәна тупәр; $a = 2$, $b = -3$, $c = -\frac{1}{2}$, $d = -\frac{1}{4}$.

30. $m - n$ разноҫе тупәр; $m = -10$, $n = -15$.

31. $10 - 2 - 3 + 7$ выражение относительнәй числосен сумми тәвәр.

32. $10 + 8$ суммәна относительнәй числосен разноҫе тәвәр.

IV. Относительнәй числосене хушассипе кәларассин тәп свойтвисем.

25. Арифметикалла числосене хушассипе кәларассин свойтвийәсем (§ 6, 7) относительнәй числосемшән те тәрәс шулни-не тәсләхсем илсе пәхса тухар.

а) Ылмаштару законә: хушәнаканәсен ырянәсене улаштарса лартнәран сумма улшәнмасть. Сәмахран:

$$(+20) + (-5) = +15 \text{ тата } (-5) + (+20) = +15;$$

$$(-10) + (-2) + (+40) = +28;$$

$$(+40) + (-10) + (-2) = +28;$$

$$(-2) + (+40) + (-10) = +28 \text{ т. ыт. те.}$$

б) Пәрлештерү законә: хәшпәр хушәнаканәсене вәсем суммине улаштарсан, пәтәм сумма улшәнмасть.

Сәмахран, ҫақ суммәра

$$(-4) + (+3) + (-1) + (+5) = +3$$

хушәнаканәсенчен хәшпәрин ырянне, сәмахран иккәмәшпе виҫ-ҫәмәш ырянне, вәсен суммине $(+3) + (-1) = +2$ хушма пултартпәр; вара ҫапла пулать: $(-4) + (+2) + (+5) = +3$, урәхла каласан, пирән малтанхи резултатах пулчә.

в) Пәр-пәр число ҫумне темиҫе число суммине хушас тәсен, ку число ҫумне кашни хушәнаканне уйрәммән пәрин хыҫ-ҫән теприне хушма юрать.

Сәмахран, 40 ҫумне $20 + (-5) + (+7)$ суммәна хушмалла пултәр, әна ҫапла ҫырма пулать:

$$40 + [20 + (-5) + (+7)].$$

Эпир малтан хушмалли суммәна шутлама пултартпәр:

$$20 + (-5) = 20 - 5 = 15; \quad 15 + (+7) = 15 + 7 = 22,$$

вара пулнә $+22$ числосна 40 ҫумне хушатпәр:

$$40 + (+22) = 62.$$

Анчах ун пек шутлас ырянне эпир 40 ҫумне малтам пәрремәш хушәнаканне 20, унтан иккәмәш хушәнаканне -5 , юлаш-кинчен, виҫҫәмәш хушәнаканне $+7$ хушма пултартпәр:

$$40 + 20 = 60; \quad 60 + (-5) = 55; \quad 55 + (+7) = 62.$$

Пәтәм сумма малтанхи пекех пулса тәчә.

г) Пёр-пёр числоран темиҫе хушӑнаканнисен суммиҫе кӑларас тесен, ку числоран кашни хушӑнаканне уйрӑммӑн пӑрин хыҫҫӑн теприне кӑларма юрать.

Самахран, 20-рен $10 + (-4) + (-3)$ суммӑна кӑлармалла пултӑр, ӑна ҫапла ҫырма пулать:

$$20 - [10 + (-4) + (-3)].$$

Эпир малтан кӑлармалли суммӑна шутлама пултаратпӑр:

$$10 + (-4) = 10 - 4 = 6; \quad 6 + (-3) = 6 - 3 = 3,$$

вара пулӑа числона 20-рен кӑларатпӑр:

$$20 - 3 = 17.$$

Анчах ун пек шутлас вырӑнне эпир 20-рен малтан пӑрремӑш хушӑнаканне 10, унтан иккӑмӑш хушӑнаканне — 4, юлашкинчен, виҫӑмӑш хушӑнаканне — 3 кӑларма пултаратпӑр:

$$20 - 10 = 10; \quad 10 - (-4) = 10 + 4 = 14;$$

$$14 - (-3) = 14 + 3 = 17.$$

Малтан шутласа кӑларӑа числах пулчӑ.

Хушассипе кӑларассин ытти свойствисем те относительӑай числосемшӑн тӑрӑс пулнине ҫакӑн пекех кӑтартса пама пулать.

V. Относительӑай числосене хутласси.

26. Задача. Октябрь ҫугун ҫулӑе поезд вӑтам хӑвӑртлӑхпа сехетре v километр кайса пырать¹. Кӑнтӑрла тӑлӑнче поезд Бологое станцинче пулать. Тата t сехетрен поезд ӑҫта пулать?

Ҫак задачӑна шутламалли формула тӑвӑпӑр. Поезд сехетре v километр каять пулсан, t сехетре вӑл t хут ытларах каять. Ҫавӑнпа та паллӑ мар ҫул тӑршшӑне тупас тесен, v хӑвӑртлӑха t вӑхӑт ҫине хутламалла:

$$x = vt.$$

Самахран, $v = 40$, $t = 3$ пулсан, вара поезд Бологое станцинчен $40 \cdot 3 = 120$ км инҫетре пулать.

Анчах кун пек шутлани задачӑри ыйтӑва тӑрӑс ответ параймасть. Эпир ҫак 120 км-а хӑш еннелле шутламаллине пӑлместпӑр: Мускав еннелле-и, е Ленинград еннелле-и? Относительӑай числосемпе усӑ курса, задачӑри ыйту ҫине тӑрӑс ответ пама пулать.

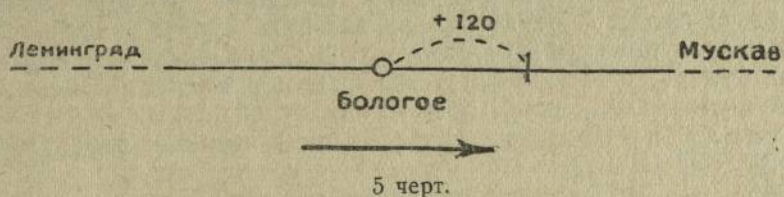
Ленинградран Мускав еннелле кайнине положительӑай тесе шутлатпӑр. Вара Бологое станцинчен Мускав еннелли пӑтӑм ҫул положительӑай, Ленинград еннелле каякан ҫул — отрицательӑай, пулать. Ҫавӑн пекех поездӑн 1 сехетри хӑвӑртлӑхӑ Мускав еннеле кайӑа чухне положительӑай, Ленинград еннелле кайӑа чухне отрицательӑай пулать.

Халӑ эпир задачӑри ыйтӑва тӑрӑс ответ пама пултаратпӑр.

Поезд Мускавалла пыӑа пулсан, уӑн 1 сехетри хӑвӑртлӑхӑ $+40$ км пулӑа, 3 сехет иртнӑ ҫӑре вӑл $x = (+40) \cdot 3 = +120$ км

¹ Шутлама ҫӑмӑл пултӑр тесе, поезд ялан пӑр хӑвӑртлӑхпа пырать тейӑпӑр, тата станцисенче тӑнине шута илмӑпӑр.

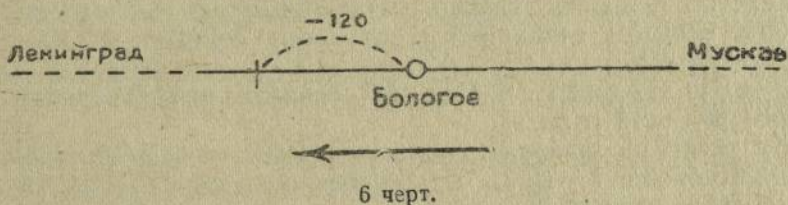
каять, урэхла каласан, Бологое станцинчен Мускав енелле 120 км каять (5 черт.).



Поезд Ленинградалла пынӓ пулсан, унӓн 1 сехетри хӓвӓртлӓ-хӓ -40 км пулать, виӓсӓ сехет иртнӓ сӓре вӓл $(-40) + (-40) + (-40) = -120$ км каять, урэхла каласан, Бологое станцинчен Ленинград енелле 120 км каять (6 черт.).

Кунтан сакна пӓлетпӓр:

$$x = (-40) \cdot 3 = -120.$$



Халӓ пирӓн $x = vt$ формула поезд ӓста пулнине тӓрӓс кӓ-тартма пултарать, v пӓлтерӓшӓ кӓна, поезд хӓш енелле кайни-не кура, положительнӓй е отрицательнӓй пулать.

Сӓмахран, $v = +50$, $t = +4$ пулсан, формула тӓрӓх:

$$x = (+50) \cdot (+4) = +200,$$

урэхла каласан, поезд Болгое станцинчен Мускавалла 200 км-та пулать.

$v = -30$, $t = +2$ пулсан,

$$x = (-30) \cdot (+2) = -60,$$

урэхла каласан, поезд Болгое станцинчен Ленинградалла 60 км-та пулать.

Арифметикаранах пӓлетпӓр, тулли число сине хутлани пӓр-пӓр числа (хутланаканнине) тепӓр числори (хутлакан-нинчи) единицӓсен хисепӓ чухлӓ хушӓнакан туса илли пу-лать. Вак сине хутлани — хутлаканни единицӓн миӓсемӓш пайӓ пулать — хутланаканнин сав пайне тупни пулать.

Хутлаканни положительнӓй число чухне сак правилӓсем от-носительнӓй числосене хутлама та юрӓхлӓ пулни иртнӓ задачӓ-ра курӓнчӓ. Сӓмахран, -5 -е $+3$ (е просто 3) сине хутласси -5 числа 3 хут хушассине пӓлтерет (-15 пулать); 0 числа 5 сине хутласси нуле 5 хут хушассине пӓлтерет (0 пулать); -12 -е $+\frac{3}{4}$ (е просто $\frac{3}{4}$) сине хутласси -12 -рен $\frac{3}{4}$ -мӓш пайне ту-пассине пӓлтерет (-9 пулать).

27. Отрицательный число сине хутласси. Кун умёнхи зада-
чана сапла улаштарәпәр: поезд кәнтәрла тёләнче Бологое
станцинче пулнә; 3 сехет каярах вәл әста пулнә? Задачана шут-
лама каллех поезд хәвәртләхне поезд кайна вәхәт сине хутла-
малла пулать. Икә задачин условисем пәр майлах, вёсене пәр-
пекех шутламалла, анчах отечё, калашу кәнтәрла чаченхи е
кәнтәрла иртсенхи вәхәт синчен пынине кура, урәхла
пулать,

Пирён $x = vt$ формула пур чухне те тёрёс ответ пама пул-
тартәр тесен, сапла тәвәпәр.

Кәнтәрла иртсенхи вәхәта положительный, кәнтәрла чаченхи
вәхәта отрицательный тесе шутләпәр, вара t положительный е
отрицательный число пуласси мёнле вәхәта илнинчен килет.
Сапла ёнтё, v тата t хутлаканнисем иккёшё те положительный
е отрицательный пулма пултаращё.

Пирён задачана шутланә чухне тёл пулма пултаракав пур
тёслёхсене те пәхса тухәпәр, анчах пур сёрте те поезд кәнтәрла
тёләнче Бологое станцинче пулать, вәл сехетре 40 км каять
тесе шутләпәр.

1-мёш тёслёх. Поезд Мускавалла пырать; тепёр 3 се-
хетрен вәл әста пулать?

Ку тёслёхре хәвәртләх положительный: $v = +40$; вәхәчё те
положительный: $t = +3$. Ку тёслёхе эфир пәхса тухнәччё, от-
ветне сапла тупнәччё:

$$x = (+40) \cdot (+3) = +120.$$

2-мёш тёслёх. Поезд Ленинградла пырать; тепёр 3 се-
хетрен вәл әста пулать?

Кунта хәвәртләх отрицательный: $v = -40$; вәхәчё положи-
тельный: $t = +3$. Эфир ку тёслёхе те пәхса тухнәччё. Шутласан
сапла пулать:

$$x = (-40) \cdot (+3) = -120.$$

3-мёш тёслёх. Поезд Мускавалла пырать. 3 сехет кая-
рах вәл әста пулнә?

Ку тёслёхре хәвәртләх положительный: $v = +40$; вәхәт отри-
цательный: $t = -3$.

Паллах, 3 сехет каярах поезд Ленинградна Бологое станци
хушшинче, Бологое станцинчен 120 км-та пулнә (7 черт.).



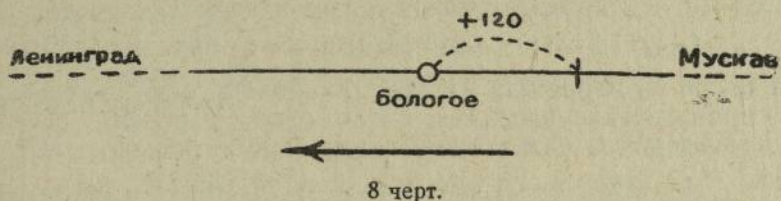
120 км сул тәршшё Бологое станцинчен сулахайра пулать,
савәнпа вәл отрицательный пулать. Сапла ёнтё:

$$x = (+40) \cdot (-3) = -120.$$

4-меш тэслэх. Поезд Ленинградалла пырать; 3 сехет каярах вал аста пулнй?

Кунта хавартлэх та, вэхят та отрицательнй: $v = -40$; $t = -3$.

Паллах, 3 сехет каярах поезд Мускавпа Бологое станци хушшинче. Бологое станцинчен 120 км-та пулнй (8 черт.).



Бологое станцинчен Мускавалли сул положительнй, саванпа

$$x = (-40) \cdot (-3) = +120.$$

28. Хуглассин правици. Иртноэ задачара 40-пе 3 вырэнне урэх числосем (вэсем шутэнчех ваксем те) илнэ пулсан та, паллах, задача на шуглас йёрке уншан пёртте улшанас сукчэ. Халэ относительнй числосене хуглассин пётэмэшле правицине тавапэр.

Хугланй чухне тёл пулнй пур тэслэхсене те сьрса илсе, вэсене пур числосемшён те пётэмлетсе сьрар:

$$\begin{array}{ll} (+40) \cdot (+3) = +120 \text{ е пётэмлетсе сьрсан: } (+a) \cdot (+b) = +ab; & \\ (-40) \cdot (+3) = -120 \text{ „ „ „ } (-a) \cdot (+b) = -ab; & \\ (+40) \cdot (-3) = -120 \text{ „ „ „ } (+a) \cdot (-b) = -ab; & \\ (-40) \cdot (-3) = +120 \text{ „ „ „ } (-a) \cdot (-b) = +ab. & \end{array}$$

Сак тэслэхсене пёр-пёринпе танлаштарса пэхсан, эфир сакна асархатпэр:

1. Хугланакансен паллисем иккэшён те пёрех пулсан, произведенийё положительнй пулать.

2. Хугланакансен паллисем иккэшён пёр пёрне хире-хирёс пулсан, произведени отрицательнй пулать.

3. Произведенин абсолютлй пысакэшэ хугланаканнисен абсолютлй пысакэшэсен произведенипе тан пулать.

Кунтан сакан пек пётэмэшле правило сьрат пэр:

Икэ относительнй числон произведенине тупас тесен, вэсен абсолютлй пысакэшэсене хугламалла та, хугланаканнисен паллисем пёрех пулсан, произведени умне + паллй, паллисем хире-хирёс пулсан, — паллй лартмалла.

Ку правилан паллисем синчен калакан пайне паллйсен правици тесэе. Ана кэскен сапла каласчэ: икэ числона хугланй чухне пёрпек паллйсенчен +, тёрлэ паллйсенчен — пулать.

Халэ асаннй тэслэхсене пэхса тухнй хьсчэн, малалла та хэш-пёр чухне усй курма кирлэ пулакан сакан пек правило тума пулать: положительнй число сине хугланй чухне хугланаканнин палли улшанмасть (урэхла каласан, произведенин палли хугланаканнин паллипе пёрех пулать); отрицательнй число

џине хутланă чухне хутланаканнин палли хире-хирџ паллă-па улшăнать.

Тата џакна асърхамалла: хутланаканнисенчен пѐри нуль пулсан, произведени яланах нуль пулать.

29. Виџе е ытларах число произведенийѐ. Произведени палли. џакан пек произведение шутласа кăлармалла пултър:

$$(+2) \cdot (-1) \cdot (+3) \cdot (-10) \cdot (-4) \cdot (-5).$$

Ана шутлама пѐрремѐш числона иккѐмѐшѐ џине хутлатпър, пулнă произведение виџѐмѐш число џине хутлатпър, џенѐрен пулнă произведение тăваттăмѐш число џине хутлатпър т. ыт. те.

$$(+2) \cdot (-1) = -2; \quad (-2) \cdot (+3) = -6; \quad (-6) \cdot (-10) = +60; \\ (+60) \cdot (-4) = -240; \quad (-240) \cdot (-5) = +1200.$$

Положительнăй числосене кăна хутласан, произведени положительнăй пулать. Хутланакансенчен пурте е хăшѐ-пѐри отрицательнăй пулсан, вѐсен произведенийѐ џапла пулать: **отрицательнăй хутланакансен хисепѐ мăшърлă пулсан, произведенийѐ положительнăй, хăрахлă пулсан, произведенийѐ отрицательнăй пулать.** Сăмахран:

отрицательнăй хутлаканѐ 1:

отрицательнăй хутлаканѐ 2:

$$(+2) \cdot (-1) \cdot (+3) = -6; \quad (+2) \cdot (-1) \cdot (+3) \cdot (-10) = +60$$

отрицательнăй хутлаканѐ 3:

$$(+2) \cdot (-1) \cdot (+3) \cdot (-10) \cdot (-4) = -240 \text{ т. ыт. те.}$$

30. Отрицательнăй число степенѐ. Кун умѐнхи параграфри правилăпа пѐрпек хутлаканнисене хутланă чух, урăхла каласан, степене хăпартнă чух усă куратпър.

Мѐнле те пулин отрицательнăй числон квадратне тупар:

$$(-3)^2 = (-3) \cdot (-3) = +9; \quad (-7)^2 = (-7) \cdot (-7) = +49.$$

Пѐтѐмлетсе каласан:

$$(-a)^2 = (-a) \cdot (-a) = +a^2,$$

урăхла каласан, отрицательнăй число квадратѐ положительнăй число пулать.

Халѐ отрицательнăй числон кубне тупар:

$$(-2)^3 = (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) = -8; \quad (-6)^3 = (-6) \cdot (-6) \cdot (-6) = -216.$$

Пѐтѐмлетсе каласан:

$$(-a)^3 = (-a) \cdot (-a) \cdot (-a) = -a^3,$$

урăхла каласан, отрицательнăй число кубѐ отрицательнăй число пулать.

Кунта џакна асърхама пулать: **отрицательнăй числона мăшърлă степене хăпартсан, яланах положительнăй число пулать, мѐншѐн тесен ун чухне отрицательнăй хутлакансен хисепѐ мăшърлă пулать (29 § пăх).** Сăмахран:

$$(-3)^4 = (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) = +81; \\ (-2)^6 = (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) = +64 \text{ т. ыт. те.}$$

Ҷавън пиркиех, отрицательнай числон хӳрахлӳ степенё яла-
нах отрицательнай число пулатъ. Сӳмахран:

$$(-3)^5 = (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) = -243;$$

$$(-2)^7 = (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) = -128$$

т. ыт. те.

Сапла вара:

Отрицательнай числон мӳшӳрлӳ степенё положительнай
число, хӳрахлӳ степенё — отрицательнай число пулатъ. Тата
Ҷакна асӳрхаттарар:

$$(-1)^2 = (-1)^4 = (-1)^6 = \dots = +1,$$

$$(-1)^3 = (-1)^5 = (-1)^7 = \dots = -1.$$

Упражненисем.

33. $(-2) \cdot (-3); (+7) \cdot (-2); (-8) \cdot (-10).$

34. $(-8 \frac{1}{2})(+2 \frac{3}{4}); (+0,36)(-\frac{3}{8})(-\frac{2}{5}).$

35. $(-1)^2; (-1)^3; (-1)^4; (-1)^5.$

36. $ax^2 + bx + c$ выражение шутлӳр; $a = 3, b = -4, c = -5, x = 4.$

37. Ҷавън выражений шутлӳр: $a = -3, b = 4, c = 5$ тата $x = 4.$

38. $4 \cdot 0; 5 \frac{1}{2} \cdot 0; 0,3 \cdot 0; -8 \frac{3}{4} \cdot 0; 0 \cdot x.$

39. $(-\frac{1}{2}) \cdot (+3,5) \cdot (+2) \cdot (-\frac{7}{8}).$

VI. Относительнай числосене пайласси.

31. Определени. Относительнай числосене (арифметикӳлла
числосене те) пайлас действи тесе икё хутлаканӳн панӳ
произведенийёпе пӳр хутлаканё тӳрӳх паллӳ мар хутлаканне
тупнине калаҶҶё. Сӳмахран, $+10$ числона -2 Ҷине пайлас те-
ни — вӳл $(-2) \cdot x$ произведени $+10$ пулмашкӳн x вырӳнӳвче мӳн-
ле число пулмаллине тупасси пулатъ. Вӳл число -5 пулатъ,
мӳншӳн тесен -5 пе -2 числосен произведенийё $+10$ пулатъ.

Ку определенирен куратпӳр, пайланине хутласа тӳрӳслеме
пулатъ: частнӳя пайлаканни Ҷине хутланӳ хыҶҶӳн пайланаканни
пулсан, пайлани тӳрӳс пулнӳ пулатъ.

32. Пайлассин прави́ли. Относительнай числосене пайланин
Ҷак тӳслӳхӳсене пӳхса тухар:

$$(+10) : (+2) = +5, \text{ мӳншӳн тесен } (+2) \cdot (+5) = +10;$$

$$(-10) : (-2) = +5, \text{ " " } (-2) \cdot (+5) = -10.$$

$$(-10) : (+2) = -5, \text{ " " } (+2) \cdot (-5) = -10;$$

$$(+10) : (-2) = -5, \text{ " " } (-2) \cdot (-5) = +10.$$

Ку тӳслӳхӳсенчен Ҷакӳн пек правило тӳватпӳр:

Пӳр числона (пайланаканнине) тӳпӳр число (пайлаканни)
Ҷине пайлас тесен, пайланаканнин абсолютлӳ пысӳкӳшне пай-
лаканнин абсолютлӳ пысӳкӳшӳ Ҷине пайламалла та, иккӳшӳн
те паллисем пӳрех пулсан, результатне $+$ паллӳпа илмелле,
паллисем тӳрлӳ пулсан, — паллӳпа илмелле.

Ҷапла вара, палласен прави́ли пайла́нӧ чу́хне те хутла́нӧ чу́хнехи пекех юла́ть.

33. Пайла́наканни е пайла́канни ну́ль пулнӧ чу́хнехи те́слӧхсем.

а) Калӧпӧр, 0 числona пӧр-пӧр число ҫине, сӧмахран, +10 ҫине, пайламалла пултӧр. Вӧл вара, +10 ҫине хутласан, произведенире 0 пулмалли числona тупас тени пулатӧ. Ун пек число 0 кӧна, мӧншӧн тесен $0 \cdot (+10) = 0$; +10 числona, пӧр-пӧр ну́ль мар число ҫине хутласан, паллах, произведени 0 пулмасть пулас! Ҷакна еверлех тупатпӧр:

$$0 : (-2) = 0, \text{ мӧншӧн тесен } (-2) \cdot 0 = 0;$$

$$0 : \frac{3}{4} = 0, \quad \frac{3}{4} \cdot 0 = 0 \text{ т. ыт. те.}$$

Ҷапла ӧнтӧ, пайла́наканни ну́ль пулсан, пайла́канни ну́ль мар пулсан, произведени 0 пулатӧ.

б) Пайла́канни 0, пайла́наканни пӧр-пӧр число, сӧмахран (+5) : 0 пултӧр. Вӧл ӧнтӧ 0 ҫине хутласан произведенийӧ +5 пулакан пӧр-пӧр число тупмаллине пӧлтӧрет. Анчах кирек мӧнле числona та 0 ҫине хутласан 0 пулатӧ, урӧх число пулмасть; апла пулсав, (+5) : 0 частное нимӧнле число та пулма пултараймасть. Ҷаввашкалах Ҷаксене те пайлама Ҷук:

$$(-5) : 0; (+0,3) : 0; (-7,26) : 0 \text{ т. ыт. те.}$$

Пӧр сӧмахпа каласан: пайла́канни ну́ль пулсан, пайла́наканни ну́ль мар пулсан, пайлама Ҷук.

в) Юлашкинчен, пайла́наканни те 0, пайла́канни те 0 пулнӧ те́слӧхе илер:

$$0 : 0 = ?$$

Ку те́слӧхре частное ҫинчен калани те усӧсӧр, мӧншӧн тесен 0 ҫине кирек мӧнле числona хутласан та результатӧ 0 пулатӧ.

Сӧмахран:

$$5 \cdot 0 = 0; 7 \cdot 0 = 0; (-100) \cdot 0 = 0 \text{ т. ыт. те.}$$

$\frac{0}{0}$ выражение нимӧнле числollӧ пӧлтӧрӧш те памалла мар йышӧннӧ.

Упраженисем.

40. $(+20) : (+4); (+20) : (-4); (-20) : (+4); (-20) : -4$.

41. $(+2a) : (-2); (-5x) : x; (-7x^2) : (-7)$. 42. $0 : 8; 0 : \frac{1}{2}; 0 : 0,3; 0 : a$.

VII. Хуглассипе пайлассин те́п свойствисем.

34. Арифметикӧлла числосене хуглассипе пайлассин свойствисем (§ 8, 9) относительнӧй числосем те́лӧшпе те те́рӧс пулса юлнине Ҷак те́слӧхсенчен курӧпӧр.

а) *Ылмаштару законӧ*: хугланаканнисен йӧркине Ҷулӧштарса лартнӧран произведени улшӧнмасть.

Малтан икѣ числона хутланин тѣслѣхѣсене сѣс илер:

$$(+5) \cdot (+2) = +10 \text{ тата } (+2) \cdot (+5) = +10;$$

$$(-5) \cdot (+2) = -10 \text{ тата } (+2) \cdot (-5) = -10;$$

$$\left(-\frac{3}{5}\right) \cdot \left(-\frac{3}{4}\right) = +\frac{9}{20} \text{ тата } \left(-\frac{3}{4}\right) \cdot \left(-\frac{3}{5}\right) = +\frac{9}{20} \text{ т. ыт. те.}$$

Халѣ ѳнтѣ хутланаканнисен шучѣ иккѣрен ытларахран пулнѣ произведени илѣпѣр, сѣмахран: $(-2) \cdot (-5) \cdot (+3)$. Ку произведени абсолютлѣ пысакѣшѣ $2 \cdot 5 \cdot 3$ пулатъ; произведени умѣнче $+$ е $-$ паллѣ пуласси отрицательнѣй хутланаканнисен шучѣ мѣшѣрлѣ е хѣрахлѣ пулнинчен килет (пирѣн тѣслѣхре $+$ пулатъ). Хутланаканнисене сѣпла улѣштарса лартсан: $(+3) \cdot (-5) \cdot (-2)$, сѣнѣ произведени пулатъ; произведени $+$ е $-$ паллѣлла пуласси отрицательнѣй хутланаканнисен шучѣ мѣшѣрлѣ е хѣрахлѣ пулнинчен килет. Анчах $3 \cdot 5 \cdot 2 = 2 \cdot 5 \cdot 3$ (арифметикѣлла числосен хутлассин ылмаштару законѣ тѣрѣх), тата отрицательнѣй хутланаканнисен шучѣ те малтанхи чухлех юлатъ. Сѣпла ѳнтѣ икѣ произведенийѣн абсолютлѣ пысакѣшѣсем те, паллисем те пѣрех пуласѣ. Сѣвѣнна те:

$$(-2) \cdot (-5) \cdot (+3) = (+3) \cdot (-5) \cdot (-2).$$

б) *Пѣрлештерѣ законѣ*: темиѣ хутланакантан хѣшпѣрисене вѣсен произведенийѣне улѣштарсан, пѣтѣм произведени улѣшанмасть.

Сѣмахран сѣк выраженире

$$(-5) \cdot (+3) \cdot (-2)$$

хутланаканнисене мѣнле сѣрнѣ сѣв иѣркепех хутласан сѣпла пулатъ:

$$(-5) \cdot (+3) = -15, \quad (-15) \cdot (-2) = +30,$$

анчах ун пек хутлас вырѣнне хѣшпѣр икѣ хутланаканне, сѣмахран $+3$ тата -2 илсе, бѣсем вырѣнне вѣен произведенине, урахла каласан, -6 сѣрса, вѣл числона виѣсѣмѣш хутланаканни сѣне хутлама пултаратпѣр: $(-5) \cdot (-6) = +30$. Сѣпла варѣ:

$$(-5) \cdot (+3) \cdot (-2) = (-5) \cdot [(+3) \cdot (-2)].$$

в) Пѣр-пѣр числона темиѣ число произведенийѣ сѣне хутлас тесен, малтан вѣл числона пѣрремѣш хутланаканѣ сѣне, пулнѣ произведение иккѣмѣш хутланаканѣ сѣне хутламалла т. ыт. те. Сѣвѣн пекех, пѣр-пѣр числона темиѣ число произведенийѣ сѣне пайлас тесен, малтан сѣв числона пѣр хутланаканѣ сѣне, пулнѣ результатне тепѣр хутланаканѣ сѣне пайламалла, т. ыт. те.

Сѣвѣн пек, $+10$ числона $(-2) \cdot (+3)$ произведени сѣне хутлас тесен, эфир малтан ку произведение шутласа пѣлме пултаратпѣр (вѣл -6 пулатъ), унтан ѣна $+10$ сѣне хутлатпѣр (-60 пулатъ); анчах ун пек хутлас вырѣнне $+10$ числона малтан -2 сѣне хутласа (-20 пулатъ), пулнѣ произведение $+3$ сѣне хутлама пултаратпѣр (-60 пулатъ). Сѣпла варѣ:

$$(+10) \cdot [(-2) \cdot (+3)] = (+10) \cdot (-2) \cdot (+3).$$

Пёр сáмахпа: $a(bc\dots) = (a \cdot b)c\dots$

Çавáн евёрлех:

$$10 : [(-2) \cdot (+3)] = [10 : (-2)] : (+3),$$

мёншён тесен:

$$10 : [(-2) \cdot (+3)] = 10 : (-6) = -\frac{10}{6} = -\frac{5}{3}$$

тата

$$[10 : (-2)] : (+3) = (-5) : (+3) = -\frac{5}{3}.$$

Пёр сáмахпа: $a : (bc\dots) = (a : b) : c\dots$

Çакáн пек валесу́ свойстви те относительнай числосем тёлёше тёрес пулнине курма пулать.

г) Пайлассин тата тепёр свойсгвине кáтартса парар: пайланаканнипе пайлаканне пёр число синех (нульсёр пушне) хутласан (е пайласан), частное улшáнмасть.

Малтанах эфир (§ 9, д), $\frac{a}{b} = \frac{am}{bm}$ равенство кирек хáш арифметика́лла тулли числосемшён те, вакла́ числосемшён те тёрес пулнине куртáмар. Халё эфир a , b , m саспаллисем пурте е хáше-пёри относительнай числосем пулсан та çав пёртавлáх тёрес юлнине тёреслесе пáхáпáр.

Пёр-пёр пайламалли тёлслэх илер, сáмахран 5 : 0,8. Пайланаканнипе пайлаканнине пёр число сине, калáпáр, 3 сине хутлáпáр. Уншáн частное улшáнмасть, мёншён тесен вёсем пурте арифметика́лла числосем, çавáнна эфир çакáн пек пёртанлáх сырма пултаратпáр:

$$\frac{5}{0,8} = \frac{5 \cdot 3}{0,8 \cdot 3} = \frac{15}{2,4}.$$

Калáпáр, çак пёртанлáхри числосенчен пёри отрицательнай число пултáр: сáмахран, 5 вырáнне — 5 пултáр:

$$\frac{-5}{0,8} = \frac{-5 \cdot 3}{0,8 \cdot 3} = -\frac{15}{2,4}.$$

Пёртанлáх çапах та тёресех юлчё, мёншён тесен икё частнайён те абсолютла пысáкáшёсем улшáнмарёç тата икё частнайё те — отрицательнай числосем.

Çавáн пекех, иккёмёш е виçсёмёш число отрицательнай пулсан та, пёртанлáх тёрес юлнине çамáлах кáтартса пама пулать. Çапла ёнтё, $\frac{a}{b} = \frac{am}{bm}$ равенствáра a , b , m саспаллисем вырáвёнче кирек мёнле положительнай е отрицательнай числосем илсен те, пёртанлáх яланах тёрес юлать.

Çавáн пекех, пайланаканнипе пайлаканнине пёр число синех пайласан та, частное улшáнмасть, мёншён тесен пайлани хирехирёç число сине хутланипе пёрех.

Анчах çакна астумалла: пайланаканнипе пайлаканнине хутлакан (е пайлакан) число нуль пулмалла мар, мёншён тесен апла, § 33 в) пункта каланá пек, частное хáйён пёлтерёшне сáхатать.

Упражнениям.

43. Сак пёртанлэхсем тёрёссипе тёрёс маррине пәхса тухәр:

$$(-5) \cdot (+2) \cdot (-1) = (+2) \cdot (-1) \cdot (-5) = (+2) \cdot (-1) \cdot (-5);$$

$$10 \cdot (-3) \cdot (-2) \cdot (+5) = 10 \cdot [(-3) \cdot (-2) \cdot (+5)] = 10 \cdot (-2) \cdot [(-3) \cdot (+5)];$$

$$[10 + (-3) + (-2)] \cdot (-7) = 10 \cdot (-7) + (-3) \cdot (-7) + (-2) \cdot (-7);$$

$$\left(\frac{3}{4} - 0,2 + \frac{7}{8}\right) \cdot 0,3 = \frac{3}{4} \cdot 0,3 - 0,2 \cdot 0,3 + \frac{7}{8} \cdot 0,3.$$

44. Хутлассин пёрлешгерү свойствиле уса курса, сак произведенисене мёнле шутлама аванрах пулать:

$$8 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 125; 2,5 \cdot 6 \cdot 10 \cdot 5; \frac{3}{4} \cdot 8,2 \cdot 4 \cdot 10?$$

45. Сак выраженире $3,5 : (-7)$ пайланаканнипе пайтаканнипе 4 сине хутлассан с $-0,5$ сине пайласан частное улшавмасар юлнине тёрёслесе пәхәр.

ОДНОЧЛЕНСЕМПЕ МНОГОЧЛЕНСЕН ТУЛЛИ ВЫРАЖЕНИЙԵՍԵՄ. АЛГЕБՐՈՒԼԼԱ ВАԿՏԵՄ.

I. Малтанхи անланусем.

35. Одночлен тата многочлен. Алгебралла выраженисене, вѣсен юлашкинчен шутламалли действииԵсене кура, икѣ ушкѣна уйѣраԿԵԸ.

Алгебралла выраженин йѣркерен юлашки действииԵ хушаси е кѣларасси пулмасан. Եна одночлен теԿԵԸ.

Շапла Եнтѣ, одночлен вѣл саспаллипе е цифрѣпа Կырнѣ уйрѣм число пулать, сѣмахран $-a$, $+10$, е произведени пулать, сѣмахран ab , $(a+b)c$, е частное пулать, сѣмахран $\frac{a-b}{c}$, е степень пулать, сѣмахран b^2 , анчах одночлен сумма та, разность та пулма пултѣраймасть.

Одночлена шулганѣ чухне пайлас действи тумалла пулсан, Եна ваклѣ одночлен теԿԵԸ, ытгисене тулли одночлен теԿԵԸ. Շавѣн пек, $\frac{a-b}{c}$ ваклѣ одночлен пулать; $(x-y) \cdot ab$, $a(x+b)^2$ — тулли одночленсем. Анчах алгебра пуԿламѣшѣнче эфир тулли одночленсене кѣна пѣхса тухна пирки — весене кѣскен „одночленсем“ тейѣпѣр.

ТемиԿе одночлена пѣр-пѣринпе $+e$ — паллѣсемпе Կыхѣнтарса тунѣ алгебралла выражение многочлен теԿԵԸ. Сѣмахран, Կакѣн пек выражени:

$$ab - a + b^2 - 10 + \frac{a-b}{c}.$$

Многочленѣн $+e$ — паллѣсемпе Կыхѣнса тѣракан уйрѣм выражениԵсене унѣн *членԵсем* теԿԵԸ. Многочленѣн членԵсене вѣсен умѣнчи паллисемпе пѣрле пѣхасԵԸ, сѣмахран калаԿԵԸ: $-a$ член, $+b^2$ член т. ыт. те. Многочленѣн малти членԵ умѣнче нимѣнле паллѣ та Կук пулсан, $+паллѣ$ пур тесе шутламалла; Կавѣн пек пирѣн тѣслѣхре малти член ab , е $+ab$ пулать.

Икѣ членран тѣракан выражение *двучлен*, виԿѣ членран тѣраканнине *трехчлен* теԿԵԸ т. ыт. те. Многочленѣн пур членԵсем те тулли членсем пулсан, многочленне те *тулли* многочлен теԿԵԸ.

36. Коэффициент. Ҷақан пек произведени панә пултәр:

$$a3ab (-2),$$

ку произведенире хутланаканёсенчен пәрисене цифрапа, теприсене саспаллипе ҫырнә. Кун пек произведение (хуглассин пёрлештерёу свойствиле усә курса) урәхлатма пулать: цифрасемпе ҫырнә хутланаканнисене пёр ушкәна, a саспаллипе ҫырнисене тепёр ушкәна т. ыт. те ҫырәпәр, вара:

$$3 \cdot (-2) \cdot (aa) \cdot b \text{ пулать,}$$

әна кёскен ҫапла ҫырма пулать: $-6a^2b$.

Саспаллипе ҫырнә хутланаканнисен умёнчи цифрапа ҫырнә хутланаканне одночленән *коэффициенте* теҫҫё. Сәмахран, $-6a^2b$ одночленән коэффициенте -6 .

Коэффициент тулли положительнай число пулсан, вәл хайпе пёрле тәракан саспалиллө выражение миҫе хут хушмаллине кәтартать; сәмахран, $3ab$ выражени $(ab) \cdot 3$ пёлтерет, урәхла каласан, $ab + ab + ab$ суммәна пёлтерет. Коэффициент тулли отрицательнай число пулсан, вәл хайпе пёрле тәракан саспаллиллө выражение миҫе хут кәлармаллине пёлтерет; сәмахран, $-3x$ выражени $-x - x - x$ пёлтерет. Коэффициент вак пулсан, вәл саспаллиллө выраженин числоллә пысакәшёнчен миҫемеш пайне иллине пёлтерет. Сәмахран, $\frac{2}{3}ax$ выражени $ax \cdot \frac{2}{3}$ выраженипе пёрех; ax числа $\frac{2}{3}$ ҫине хутлас тени — ҫав число $\frac{2}{3}$ пайне илес тени пулать.

37. Многочлен свойствисем. Кашни многочлена унән членёсен алгебрәлла сумми теме пулать. Сәмахран, $2a - b + c$ многочлен $2a + (-b) + (+c)$ сумма пулать, мёншён тесен $+(-b)$ выражени $-b$ выраженипе пёрех, $+(+c)$ выражени те $+c$ выраженипе пёрех. Ҷавәйпа та относительнай числосен суммин свойствисем (§ 25) многочленшән та ҫавах пулаҫҫё. Ҷав свойствәсенчен иккёшне аса илер:

а) *Ылмаштару законё*: многочленән членёсене (хайсен паллисемпех) вырәнтан куҫарса лартнишён унән числоллә пысакәшё улшәнмасть.

б) *Пёрлештерёу законё*: многочленән хәшпёр членёсене вёсен алгебрәлла суммипе уләштарсан, многочленән числоллә пысакәшё улшәнмасть.

Многочленән тата тепёр свойствине кәтартар:

в) Многочленән кашни членён паллине хире-хирёҫ палләпа уләштарсан, многочленән числоллә пысакәшён палли те улшәнать, анчах абсолютлә пысакәшё улшәнмасть.

Сәмахран, $2a^2 - ab + b^2 - \frac{1}{2}a$ многочленән $a = -4$, $b = -3$ пулсан, числоллә пысакәшё ҫакан пек пулать:

$$\begin{aligned} 2 \cdot (-4)^2 - (-4) \cdot (-3) + (-3)^2 - \frac{1}{2} \cdot (-4) &= \\ = 2 \cdot 16 - 12 + 9 + 2 &= 32 - 12 + 9 + 2 = 31, \end{aligned}$$

$-2a^2 + ab - b^2 + \frac{1}{2}a$ многочленн числолла пысаккаше саспалмисен сав пелтерешесенех илсен, сакан пек пулать:

$$\begin{aligned} & -2 \cdot (-4)^2 + (-4) \cdot (-3) - (-3)^2 + \frac{1}{2} \cdot (-4) = \\ & = -2 \cdot 16 + 12 - 9 - 2 = -32 + 12 - 9 - 2 = -31. \end{aligned}$$

Упражненисем.

46. Сак произведенисене сымлалтър:

$$ax10aax; aa(-5) \cdot bxx(+2); ab \cdot \frac{3}{4} axx \left(-\frac{1}{2}\right); 5txy(-4)txy.$$

47. Сак выраженисене сумма пек сырър: $2a; 3ax; 5a^2b; 4(a+1)$.

48. Сак одночленсене шултър.

$$7a^2bc, \text{ кунта } a=3, b=2, c=\frac{5}{7};$$

$$0,8a(b+c), \text{ кунта } a=1, b=\frac{5}{6}, c=0,25;$$

$$3(a+b)^2c, \text{ кунта } a=1, b=\frac{5}{6}, c=0,25;$$

$$-7x^2y^3 \text{ кунта } x=-2, y=1;$$

$$0,52ax^2y, \text{ кунта } a=100, x=-3, y=-2.$$

49. Сак многочленсене шултър:

$$2x^4 - x^3 + 5x^2 - 7x + 1, \text{ кунта } x=1, \text{ тата } x=2;$$

$$ax^2 + bx + c, \text{ кунта } a=3, b=-2, c=-5, x=1.$$

50. $x^3 - 2x^2 + 3x - 5$ тата $-x^3 + 2x^2 - 3x + 5$ многочленсен $x=2$ чухне абсолютла пысаккашесем перех, анчах паллисем хире-хирес пуллине тереслесе пахар.

38. Перьевёрлэ членсене перлештересси. *Многочленн членёсем пер-перинчен коэффициенчёсемпе кана уйрам, е пертте уйрам мар пулсан, вёсече перьевёрлэ членсем тецсё.*

Самахран,

$$\underline{4a} - \underline{3x} + \underline{0,5a} + \underline{8x} + \underline{3ax} - \underline{2x}$$

многочленра перремеш членё вицсёмёшпе перьевёрлэ (вёсен айне пер йёр туртня), иккёмеш членё таваттамёшпе тата улттәмёшпе перьевёрлэ (вёсен айне икё йёр туртня), пиллэкмёшпе перьевёрлэ член сук.

Многочленра пер-перинпе перьевёрлэ членсем пур пулсан, вёсене хушассин перлештерё законё тарых пухса пер член тума пулать. Самахран, малтанхи тёлёхре членсене сакан пек ушканлама пултаратпър:

$$(4a + 0,5a) + (-3x + 8x - 2x) + 3ax.$$

Паллах, пер-пер числа 4 илсе, ун сумне сав числон 0,5 пайне хушсан, сав числон 4,5-мёше пулать. Саванпа та $4a + 0,5a = 4,5a$. Саван пекех, $-3x + 8x = 5x$ тата $5x - 2x = 3x$. Вара многочлена сапла сырма пулать:

$$4,5a + 3x + 3ax.$$

Многочленн перьевёрлэ членёсене пер члена пухса сырнине многочленн перьевёрлэ членёсене перлештерни тецсё.

Асархаттарни. Перьевёрлэ икё членн коэффициенчёсем перех, паллисем хире-хирес пулсан, вёсем пер-перне петерессё; самахран, саксем: $2a$ тата $-2a$, е $-\frac{1}{2}x^2$ тата $+\frac{1}{2}x^2$.

Тёслөхсем:

$$1. a + \underline{5mx} - \underline{2mx} + \underline{7mx} - \underline{8mx} = a + 2mx.$$

$$2. 4ax + b^2 - 7ax - 3ax + 2ax = -4ax + b^2 = b^2 - 4ax.$$

$$3. \underline{4a^2b^3} - \underline{3ab} + \underline{0,5a^2b^3} + \underline{3a^2c} + \underline{8ab} = 4,5a^2b^3 + 5ab + 3a^2c.$$

Упражнениям.

$$51. a^3x^2 + 3a^2x^3 + \frac{1}{2}a^2x^3 + a^2x^3.$$

$$52. 2x - 5xy - 8xy - 3,1xy - 0,2xy.$$

$$53. a + 8mxy^2 - 4\frac{1}{2}mxy^2. \quad 54. a - 8mxy^2 + 4\frac{1}{2}mxy^2.$$

$$55. 5a^3 - 7a^2b + 7ab^2 + a^3b - 2a^3 - 8ab^2 + a^3 - 12ab^2 + 3a^2b.$$

$$56. x^5 - 4ax^4 - 2ax^4 + 2a^2x^3 + 5ax^4 - 2a^2x^3 + ax^4 - 7a^2x^3.$$

Историллэ сведенисем.

Отрицательный числосем грексен математикё Диофант ёсёсенчех (пирён өрйи IV ёмёрёнче) төл пулассё, вёл вёсене „пулма пултарайман“ числосем тет, саванпа задаёсем шутланá чух вёсене вёл шута илмест. Анчах икё — паллаллá числоса хутланá чухне пирён правилáпа шутланá цекех тавать. Вёл калать: кá-жаракан числосна кáларакан число сине хутласан хушáнанкан число пулатъ, тет; вёл сáпа шутлатъ:

$$(7 - 3) \cdot (5 - 2) = 7 \cdot 5 - 7 \cdot 2 - 3 \cdot 5 + 3 \cdot 2 = 12.$$

Индуссен математикё Брамагупта (629 ç.) относительный числосене хушассин тата кáларассин правилсене иёллён кáртартса парать. Вёл правилá-сенчен хáшпёрсене илсе кáтаргар.

„Икё пурлáхáи сумми пурлáх пулатъ“, урáхла каласан, сáмахран, $(+2) + (+3) = 5$.

„Икё парáмáи сумми парáм пулатъ“, урáхла каласан, $(-2) + (-3) = -5$.

„Пурлáхна парáм сумми вёсен разноёёне тан“, урáхла каласан, $(+5) + (-7) = -2$.

„Парáма нульрен кáларсан пурлáх пулатъ, пурлáх—парáм пулатъ“: $0 - (-3) = +3$; $0 - (+3) = -3$ т. ыт.

Европáри математик Штифель 1544 сáлтах отрицательный числосене „ниме юрáхсáр“ тенё. Жирар (1629 ç.) хáйён кёнексенче отрицательный числосемпе усá курма тытáнать, вара Декарт (1637 ç.) вёсене татáклáнах математикáна кёртнё, вёл отрицательный числосем пысáкáшсем хáш епнеллине пёлтерессё тесе йнлантарса панá. Авал хушассине кáларас дейвисене тудли латин сáмахёсемпе plus тата minus тесе сáрынá; каярахна вёсене пуслáмёш р тата т сáпалласене сити кёскетсе, сáлтаен йёр туртса паллá тума пусланá.

II. Алгебрáлла хушассине кáларасси.

39. Одночленсене хушасси. Темице одночлена хушмаллá пулар: $3a$; $-5b$; $+0,2a$; $-7b$ тата с.

Вёсен сумми сáпа пулатъ:

$$3a + (-5b) + (+0,2a) + (-7b) + c.$$

Анчах $+(-5b)$, $+(+0,2a)$ тата $+(-7b)$ выраженисем $-5b$, $+0,2a$ тата $-7b$ выраженисемпе пёрех; саванпа та панá одночленсен суммине сáмáлрах сáпа сáрма пулатъ:

$$\underline{3a} - \underline{5b} + \underline{0,2a} - \underline{7b} + c,$$

пёрьевёрлэ членсене пёрлештерсен:

$$3,2a - 12b + c \text{ пулать.}$$

Правило. Темиşe одночлена хушас тесен, вёсене хайсен паллисемпе пёрин хыççан теприне сырмалла та пёрьевёрлэ членсене пёрлештермелле.

40. Многочленсене хушасси. Калăпър, пёр-пёр m саспаллипе сырнă алгебралла выражени сүмне $a - b + c$ многочлена хушмалла пултър. Шыракан суммăна сáпла сырма пулать:

$$m + (a - b + c).$$

Ку выражение улаштарас тесе, $a - b + c$ многочленран $a + (-b) + c$ сүмма туса илер; анчах суммăна хушас тесен, кашин хушăнаканне уйрамман хушма юрать. Саванпа:

$$m + (a - b + c) = m + a + (-b) + c.$$

$-b$ члена хушасси b члена кáларассипе пёрех; Саванпа:

$$m + (a - b + c) = m + a - b + c.$$

Правило. Пёр-пёр алгебралла выражени сүмне многочлен хушас тесен, сáк выражени сүмне многочленан пур членёсене те хайсен паллисемпе пёрин хыççан теприне сырса тухмалла та, пёрьевёрлэ членсем пулсан, вёсене пёрлештермелле.

Малти член уменче палла сук пулсан, ун паллине + шутламалла.

$$\text{Тёслёх. } 3a^2 - 5ab + b^2 + (4ab - b^2 + 7a^2).$$

Кун умён m саспаллипе кáтартнă алгебралла выражени выранные ку төслёхре $3a^2 - 5ab + b^2$ многочлен панă.

Халё каланă правилăпа усă курса сáпла шутлатпър:

$$\begin{aligned} & 3a^2 - 5ab + b^2 + (4ab - b^2 + 7a^2) = \\ & = 3a^2 - 5ab + b^2 + 4ab - b^2 + 7a^2 = 10a^2 - ab. \end{aligned}$$

Асáрхаттарни. Хушма панă многочленсем пёрьевёрлэ членсем пулсан (пирён төслёхри пек), хушăнаканнисене пёр-пёрин айне, пёрьевёрлисене төлме-тёл туса сырсан аван:

$$\frac{3a^2 - 5ab + b^2 + 7a^2 + 4ab - b^2}{10a^2 - ab}$$

Упражненисем.

Сáк многочленсене хушър. Хушăнаканнисене пёр-пёрин айне, пёрьевёрлисене төлме-тёл туса сырър:

$$57. (2x - y - z) + (2y + z - x) + (2z - x - y).$$

$$58. (3x^3 - 4x^2 + 2x - 1) + (2x^2 - 3x + 4) + (x^3 - 2 + 4x + 3x^2).$$

$$59. (4a^3 - 5a^2b + 7ab^2 - 9b^3) + (-2a^3 + 4a^2b - ab^2 - 4b^3) + (8ab^2 - 10a^2b + 6a^3 + 10b^3).$$

41. Одночленсене кáларасси. Калăпър, $10ax$ одночленран $-3ax$ одночлен кáларамалла пултър. Вёсен разносене сáпла сырма пулать:

$$10ax - (-3ax).$$

Ку действийн прави́ли тѣрѣх — $3ax$ каларас ыра́нне — $3ax$ числа хирѣ́сле число хушма юрать. Ун пек число $+3ax$ җавѣ́нна:

$$10ax - (-3ax) = 10ax + (+3ax) = 10ax + 3ax = 13ax.$$

Правило. Одночлена каларас тесен, ына пѣчѣклетекенни җумне хирѣ́сле палла́па җырса хумалла та, пѣрьевѣрлѣ членсем пулсан, вѣсене пѣрлештермелле.

42. Многочлена каларасси. Пѣр-пѣр m саспаллипе җырнѣ алгебрѣлла ыраженирен $a - b + c$ многочлѣна калармалла пултѣр, ына җапла җырма пулать:

$$m - (a - b + c).$$

Ку действие тума каларассин прави́ли тѣрѣх m җумне $a - b + c$ числа хирѣ́сле число хушма юрать. Кун пек число $-a + b - c$ пулать, җавѣ́нна:

$$m - (a - b + c) = m + (-a + b - c).$$

Вара хушассин прави́липе усѣ курса җапла тѣватпѣр:

$$m - (a - b + c) = m - a + b - c.$$

Правило. Пѣр алгебрѣлла ыраженирен многочлен каларас тесен, җак ыражени җумне многочленѣн пур членѣсене те хирѣ́сле палла́семпе җырса тухмалла та, пѣрьевѣрлѣ членсем пулсан, вѣсене пѣрлештермелле.

А сѣр хаттарни. Многочленран многочлен калармалла пулсан тата вѣл многочленсенче пѣрьевѣрлѣ членсем пур пулсан, калармалли многочленѣн паллисене хирѣ́сле палла́семпе улаштарса, ына пѣчѣклетекенни айне пѣрьевѣрлѣ членсене тѣлме-тѣл туса җырмаалла. Сѣмзхран, $(7a^2 - 2ab + b^2) - (5a^2 + 4ab - 2b^2)$ действие җапла җырсан шутлама җамѣлтарых:

$$\begin{array}{r} 7a^2 - 2ab + b^2 \\ - 5a^2 - 4ab + 2b^2 \\ \hline 2a^2 - 6ab + 3b^2 \end{array}$$

Упражненисем.

60. $(2p^2 - 4p + 8) - (p^2 - 5p - 7)$.

61. $4x^2 + y^2 + 5$ каларас $-2y^2 + y + 6$.

62. $\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x + 1$ каларас $\frac{1}{4}x^2 + \frac{2}{3}x + \frac{1}{5}$.

63. Җак ыражение җамѣллатса җырѣр:

$$x = (2a^2 - 2b^2 + c^2) - (a^2 - 2b^2 - c^2) + (3a^2 + 4b^2 - 3c^2).$$

43. Умѣнче $+e$ — палла́ тѣракан скобка́сене уҗасси. Калѣпѣр, җак ыраженире

$$2a + (a - 3b + c) - (2a - b + 2c)$$

скобка́сене уҗмалла пултѣр. Кѣна җапла ынланмалла: скобка ышѣнчи многочленсемпе скобка умѣнче тѣракан палла́па кѣтартнѣ действисене тумалла. Пирѣн тѣслѣхре малтанхи скобка́сем умѣнче $+$, ыккѣмѣш скобка́сем умѣнче $-$ тѣрать. Малта каланѣ прави́ла-

сем тәрәх хушсан тата кәларсан, скобкәсәр выражени пулса тәрәть:

$$2a + a - 3b + c - 2a + b - 2c = a - 2b - c.$$

Ҙапла вара, умәнче + паллә тәрәкан скобкәсене уһнә чух скобка әшәнчи палләсене уләштарма кирлә мар; умәнче — паллә тәрәкан скобкәсене уһнә чухне скобка әшәнчи кашни членән паллине хирәҗле палләпа уләштармалла.

Тата җак выраженири скобкәсене уҗмалла пултәр:

$$10p - [3p + (5p - 10) - 4].$$

Нимрен ытла малтан җаврака скобкәсене, унтан квадратлә скобкәсене уҗсан авантарах:

$$10p - [3p + 5p - 10 - 4] = 10p - 3p - 5p + 10 + 4 = 2p + 14.$$

44. Многочленән членәсене (пайәсене) скобка әшне илесси. Многочлена уләштарма хәш чухне уһнә хәшпәр членәсене скобка әшне илни усәллә пулать, вара хәшпәр чух скобка умне + паллә җырса әна сумма пек тума е скобка умне — паллә җырса разность пек тума пулать. Сәмахран $a + b - c$ многочленра юлашки икә членне скобка әшне илсе, скобка умне + паллә лартмалла пултәр. Вара җапла җыратпәр:

$$a + b - c = a + (b - c),$$

урәхла каласан, скобка әшне илнә членсен паллисене малтанхи пекех хәваратпәр. Хушассин прави́ли тәрәх скобкәсене уҗсан, многочлена җакән пек уләштарни тәрәс пуллине куратпәр; вара пирән каллах малтанхи многочлен пулса тәрәть.

җав многочленрах юлашки икә членне скобка әшне илсе, скобка умне — паллә лартмалла пултәр. Вара җапла җыратпәр:

$$a + b - c = a - (-b + c) = a - (c - b),$$

урәхла каласан, скобка әшне илнә кашни член паллине хирәҗле палләпа уләштаратпәр. Кәларассин прави́ли тәрәх скобкәсене уҗсан, многочлена җакән пек уләштарни тәрәс пуллине куратпәр; вара пирән каллах малтанхи многочлен пулса тәрәть.

Скобкәсем умне + е — паллә лартса, многочлена йәлтах скобка әшне илме пулать. Сәмахран, $a + b - c$ многочлена җапла җырма пулать:

$$+(a + b - c), e - (-a - b + c).$$

Упражнениям.

Скобкәсене уҗса, кәскен җырәр:

64. $x + [x - (x - y)]$; $m - \{n - [m + (m - n)] + m\}$.

65. $a + b - c - [a - (b - c)] - [a + (b - c) - (a - c)]$.

66. $(3x^2 - 4y^2) - (x^2 - 2xy - y^2) + [2x^2 + 2xy + (-4xy) + 3y^2]$.

67. $a - b - c + d$ многочл.на җакнашкал уләштарәр:

а) хыҗалти виҗе членне скобка әшне илсе, скобка умне — паллә лартәр;

б) хыҗалти икә членне скобка әшне илсе, скобка умне + паллә лартәр;

в) варринчи икә членне скобка әшне илсе, скобка умне — паллә лартәр.

III. Алгебралла хутласси.

45. Одночленсене хутласси. а) Каләпәр, a^3 выражение a^3 сине хутламалла пултәр, аңа сәпла сьрма пулать: $a^3 \cdot a^2$, е төпләрех: $(aaa) \cdot (aa)$. Кунта aaa произведение aa произведени сине хутламалла. Анчах пәр-пәр числona произведени сине хутлас тесен, вәл числona малтан пәрремеш хутланаканни сине, пулнә результатне иккәмеш хутланаканни сине тата малалла та савән пек хутлама юрать. Савәнпа та:

$$a^3 \cdot a^2 = (aaa) \cdot aa;$$

аңа скобкасар та сьрма юрать, мәншән тесен действи йерки скобкасар та скобкапа кәтартни пекех юлать:

$$a^3 \cdot a^2 = aaaaa = a^5.$$

Эпир куратпәр, ку произведенин степень кәтартәвә хутла-
яканнисен степень кәтартәвәсен суммипе тан.

Татах тепәр төсләх илер: x^3 выражение x^4 сине хутлар. Мал-
танхи пекех сүтсе-явса, сакән пек шутлатпәр:

$$x^3 \cdot x^4 = (xxx) \cdot (xxxx) = xxxxxxx = x^7.$$

Пөтәмлетсе каласан, $a^m \cdot a^n$ произведени

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n} \text{ пулать.}$$

Сәпла вара, пәр числон төрлө степенәсене хутласан сав
числон хутланакан степенәсен кәтартәвәсен суммипе тан кәтар-
туллә степенә пулать. Аңа кәскен сәпла каласәсә:

Пәр числон төрлө степенәсене хутланә чухне степень по-
казателәсем хушәнасәсә.

Сәпла ёнтә:

$$m^2 m^3 = m^5; \quad x^3 x = x^4; \quad y^2 y^3 = y^5.$$

б) Сак выраженисене хутламалла пултәр:

$$3ax^2 \cdot (-5abx).$$

Одночлен — $5abx$ произведени пулнәран $3ax^2$ выражение пәр-
ремеш хутланаканни — 5 сине, унтан иккәмеш хутланаканни a
сине хутламалла т. ыт. те. Апла пулсан:

$$3ax^2 \cdot (-5abx) = 3ax^2 \cdot (-5) \cdot abx.$$

Хутлассин пәрлештерү свойствипе усә курса, сак произведе-
нире хутланакансене сакан пек ушкәнлатпәр:

$$(+3) \cdot (-5) \cdot (aa) \cdot b \cdot (x^2x).$$

Кашни ушкәнәнче хутлас действие тусан, сәпла пулать:
— $15a^2bx^3$.

Правило. Одночлена одночлен сине хутлас тесен, вәсен
коэффициенчәсене хутламалла та пәр пек саспаллисен показа-
теләсене хушмалла; хәшпәр саспалли хутланаканнинче е
хутланаканнинче кәна пулсан, аңа хәйән показателәпех произ-
ведение кусармалла.

Тёслөхсем.

1. $0,7a^3x \cdot (3a^4x^2y^7) = 2,1a^7x^3y^7$. 2. $-3,5x^2y \cdot (\frac{3}{4}x^3) = -\frac{21}{8}x^5y$.

46. Одночленән квадратчөпе кубё. Эпир пёлетпёр, пёр-пёр числа квадратта е куба хәпартас тени — числа хайне хай сине икё хут е вищё хут хутлассине пёлтерет; сәмахран:

$$11^2 = 11 \cdot 11 = 121; \quad \left(-1\frac{1}{2}\right)^2 = \left(-1\frac{1}{2}\right) \cdot \left(-1\frac{1}{2}\right) = 2\frac{1}{4};$$

$$4^3 = 4 \cdot 4 \cdot 4 = 64; \quad (-5)^3 = (-5) \cdot (-5) \cdot (-5) = -125.$$

Çак определенипе тулли одночленсене квадрата тата куба хәпартна чух усә куратпәр.

1. a^4 числа квадрата е куба хәпартмалла пултәр. Определени тәрәх:

$$(a^4)^2 = a^4 \cdot a^4; \quad (a^4)^3 = a^4 \cdot a^4 \cdot a^4.$$

Одночленсене хутламалли правиләпа усә курсан сәпла пулать:

$$(a^4)^2 = a^8; \quad (a^4)^3 = a^{12}.$$

Çавән пекех:

$$(a^3)^2 = a^6; \quad (a^3)^3 = a^9.$$

Пётёмлетсе каласан:

$$(a^m)^2 = a^m \cdot a^m = a^{2m}; \quad (a^m)^3 = a^m \cdot a^m \cdot a^m = a^{3m},$$

урәхла каласан, степене квадрата е куба хәпартас тесен, степень кәтартәвёсене иккё сине е вищё сине хутлас пулать.

Çапла:

$$(4^2)^3 = 4^4 = 256; \quad (2^2)^3 = 2^6 = 64 \text{ т. ыт. те.}$$

2. abc произведение квадрата е куба хәпартмалла пултәр. Определени тәрәх:

$$(abc)^2 = (abc) \cdot (abc); \quad (abc)^3 = (abc) \cdot (abc) \cdot (abc).$$

Хутлассин свойствисемпе усә курсан, сәпла пулать:

$$(abc)^2 = abcabc = (aa) \cdot (bb) \cdot (cc) = a^2b^2c^2;$$

$$(abc)^3 = abcabcabc = (aaa) \cdot (bbb) \cdot (ccc) = a^3b^3c^3,$$

урәхла каласан, произведение квадрата е куба хәпартас тесен, кашни хутланаканне сәк степене уйрәммән хәпартса, результатсене хутламалла.

Çапла:

$$(2 \cdot 3 \cdot 5)^2 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2 = 4 \cdot 9 \cdot 25 = 900;$$

$$(2 \cdot 3)^3 = 2^3 \cdot 3^3 = 8 \cdot 27 = 216.$$

3. Халё ёнтё — $4a^3bc^4$ одночлена квадрата е куба хәпартмалла пултәр. Халь анчах асәннә правиләпа усә курсан, сәпла пулать:

$$(-4a^3bc^4)^2 = (-4)^2 \cdot (a^3)^2 \cdot (b)^2 \cdot (c^4)^2 = 16a^6b^2c^8;$$

$$(-4a^3bc^4)^3 = (-4)^3 \cdot (a^3)^3 \cdot (b)^3 \cdot (c^4)^3 = -64a^9b^3c^{12}.$$

Правиләсем. 1. Тулли одночлена квадрата хәпартас тесен, одночленән коэффициентне квадрата хәпартса саспаллисен кәтартәвёсене иккё сине хутламалла.

2. Тулли одночлена куба хӕпартас тесен, одночлен коэффициентне куба хӕпартаса, саспаллисен кӕтартӕвӕсене виӕсӕ ӕине хутламалла.

47. Многочлена одночлен ӕине хутласси. $a + b - c$ многочлена пӕр-пӕр алгебралла выражени ӕине, сӕмахран, m саспаллине ӕырнӕ одночлен ӕине хутламалла пултӕр:

$$(a + b - c) \cdot m.$$

Хутлассин валеӕу законӕпе усӕ курсан, ӕапла пулатъ:

$$(a + b - c) \cdot m = am + bm - cm.$$

Правило. Многочлена одночлен ӕине хутлас тесен, многочленӕн кашни членне ӕак одночлен ӕине хугласа, пулнӕ произведенисене хушмалла.

Хутланаканнисен ырӕнӕсене улӕштарса лартнӕран произведени улӕнмасть, ӕавӕнпа ку правило одночлена многочлен ӕине хутланӕ чухне те юрӕхлӕ. ӕапла вара: $m(a + b - c) = ma + mb - mc.$

Тӕслӕхсем.

1. $(3x^2 - 2ax + 5a^2) \cdot (-4ax).$

Кунта многочленӕн членӕсене панӕ одночлен ӕине хутланӕ чухне одночленсене хутламалли правилӕпа тата паллӕсен правилепе усӕ курмалла: пӕрпек паллӕсене хутласан $+$, тӕрлӕ паллӕсене хутласан $-$ пулатъ.

Многочленӕн кашни членне $-4ax$ одночлен ӕине хутлӕпӕр:

$$(3x^2) (-4ax) = -12ax^3; \quad (-2ax) (-4ax) = +8a^2x^2; \\ (+5a^2) (-4ax) = -20a^2x.$$

Вара пулнӕ результатсене хушсан, ӕапла пулатъ:

- $$(3x^2 - 2ax + 5a^2) \cdot (-4ax) = -12ax^3 + 8a^2x^2 - 20a^2x.$$
2. $(a^2 - ab + b^2) (3a) = a^2(3a) - (ab)(3a) + b^2(3a) = 3a^3 - 3a^2b + 3ab^2.$
3. $(7x^2 + \frac{3}{4}ax - 0,3) (2,1a^2x) = (7x^2) (2,1a^2x) + (\frac{3}{4}ax) (2,1a^2x) - 0,3 (2,1a^2x) = 14,7a^2x^3 + 1,575a^3x^2 - 0,63a^2x.$
4. $2a (3a - 4ax + \frac{1}{2}x^2) = 6a^2 - 8a^2x + ax^2.$

48. Многочлена многочлен ӕине хутласси. $a + b - c$ многочлена $m - n$ многочлен ӕине хутламалла пултӕр, ӕна ӕапла ӕырма пулатъ:

$$(a + b - c) \cdot (m - n).$$

$(m - n)$ хутлаканныне пӕр число (одночлен) ырӕнне йышӕнса, многочлена одночлен ӕине хугламалли правилӕпа усӕ курӕпӕр:

$$(a + b - c) \cdot (m - n) = a(m - n) + b(m - n) - c(m - n).$$

Пулнӕ многочленӕн кашни членӕ одночленпа многочлен произведенийӕ пулса тӕраӕсӕ. Малалла та ӕав правилӕнах усӕ курсан, ӕапла пулатъ:

$$(am - an) + (bm - bn) - (cm - cn).$$

Хушассин тата кӱларассин правилесем тӱрӱх скобкаӱсене уҫсан, ҫапла пулать:

$$(a + b - c)(m - n) = am - an + bm - bn - cm + cn.$$

Правило. Многочлена многочлен ҫине хутлас тесен, пӱр многочленӱн кашни членне тепӱр многочленӱн кашни членӱ ҫине хутласа, пулӱӱ произведенийӱсене хушмалла.

Паллах, пӱр многочленӱн членӱсене тепӱр многочленӱн членӱсем ҫине хутланӱ чухне паллӱсен правилесене асра тытмалла: пӱрпек паллӱсенчен +, тӱрлӱ паллӱсенчен — пулать.

Сӱмахран:

$$(a^2 - 5ab + b^2 - 3)(a^3 - 3ab^2 + b^3),$$

Малтан хутланаканни пур членӱсене те хутлаканни пӱрремӱш членӱ ҫине хутлӱпӱр:

$$(a^2 - 5ab + b^2 - 3)a^3 = a^5 - 5a^4b + a^3b^2 - 3a^3.$$

Унтаи хутланаканни пур членӱсене те хутлаканни иккӱмӱш членӱ ҫине хутлӱпӱр:

$$(a^2 - 5ab + b^2 - 3)(-3ab^2) = -3a^3b^2 + 15a^2b^3 - 3ab^4 + 9ab^2.$$

Малалла, хутланаканни виҫҫемӱш членӱ ҫине хутлатпӱр:

$$(a^2 - 5ab + b^2 - 3)(+b^3) = a^2b^3 - 5ab^4 + b^5 - 3b^3.$$

Юлашкинчен, пулӱӱ произведенийӱсене пӱтӱмпех хушӱпӱр та пӱрӱевӱрлӱ членсене пӱрлештерӱпӱр, вара татакӱӱ результат ҫапла пулать:

$$a^5 - 5a^4b - 2a^3b^2 - 3a^3 + 16a^2b^3 - 8ab^4 + 9ab^2 + b^5 - 3b^3.$$

Тӱслӱхсем.

$$1. (a - b)(m - n - p) = am - bm - an + bn - ap + bp.$$

$$2. (x^2 - y^2)(x + y) = x^3 - xy^2 + x^2y - y^3.$$

$$3. (3an + 2n^2 - 4a^2)(n^2 - 5an) = 3an^3 + 2n^4 - 4a^2n^2 - 15a^2n^2 - 10an^3 + 20a^3n = -7an^3 + 2n^4 - 19a^2n^2 + 20a^3n.$$

$$4. (2a^2 - 3)^2 = (2a^2 - 3)(2a^2 - 3) = (2a^2)^2 - 3(2a^2) - (2a^2)3 + 9 = 4a^4 - 6a^2 - 6a^2 + 9 = 4a^4 - 12a^2 + 9.$$

Упражненисем.

$$68. (5a^2b^3)(3ab^4c); \quad \left(\frac{3}{4}ax^3\right)\left(\frac{5}{6}ax^3\right).$$

$$69. (0,3abx)(2,7a^2bx^2); \quad (7a^2b^4c)(3ab^3c^2)\left(\frac{1}{21}a^6b\right).$$

$$70. \left(\frac{3}{7}mx^2y^3\right)^2; \quad (2a^3bx^2)^3.$$

$$71. (0,1x^m y^n)^2; \quad \left(\frac{1}{2}m^2ny^6\right)^3.$$

$$72. (3a^2 - 2b^3 + c)2ab.$$

$$73. (5a - 4a^2b - 3a^3b^2 - 7a^4b^3)5a^2b.$$

$$74. (a + b - c)(m - n); \quad (2a - b)(3a + b^3).$$

$$75. \left(a + \frac{1}{2}b\right)(2a - b); (x^2 + xy + y^2)(x - y).$$

$$76. (x^2 - xy + y^2)(x + y).$$

$$77. (2x + 3y)(3x - 2y); (y - 1)(y^2 + y + 1).$$

49. Йёркеленё многочлен. Многочлена пёр-пёр саспалли степенёсен йёркипе сырни—унан членёсене җав саспалли катартавёсем пёрремёш члентан тытанса юлашкине җитичен ўссе е пёчкленсе пынй йёркепе сырни пулать. Җапла, $1 + 2x + 3x^2 - x^2$ многочлена x саспаллин степенёсем ўсекек йёркепе сырнй. Җав многочленах тепёр майлй: $-x^3 + 3x^2 + 2x + 1$ сырсан, x саспаллин степенёсем пёчкленекен йёркепе сырни пулать.

Многочлена хйш саспалли тйрйх йёркелесе сырнй, җав саспаллине тйп саспалли теҗҗё. Чи пысйк степенйлё тйп саспаллирен тйракан члена многочленйн аслй членё теҗҗё; чи пёчек степенйлё тйп саспаллирен тйракан е тйп саспалли пачах җук члена многочленйн кёҗён членё теҗҗё.

50. Йёркеленё многочленсене хугласси. Действие җак тёслёхре катартнй пек тусан авантарах пулать. $3x - 5 + 7x^2 - x^2$ многочлена $2 - 8x^2 + x$ җине хутламалла пултйр.

Вёсене иккёшне те x -йн пёчкленекен степенё йёркипе майласа тухйпйр та хутлаканне хутлаканни айне җырса, вёсем айне тйрё лини туртйпйр.

$$\begin{array}{r} -x^3 + 7x^2 + 3x - 5 \\ -8x^3 + x + 2 \\ \hline 8x^5 - 56x^4 - 24x^3 + 40x^2 \\ - x^4 + 7x^3 + 3x^2 - 5x \\ - 2x^3 + 14x^2 + 6x - 10 \\ \hline 8x^5 - 57x^4 - 19x^3 + 57x^2 + x - 10, \end{array}$$

Хутланаканнин кашни членне хутлаканнин пёрремёш членё ($-8x^2$) җине хуглаҗҗё те, пулнй произведение лини айне җыраҗҗё. Унтан хутланаканнин кашни членне хутлаканнин иккёмёш членё ($+x$) җине хутласа, произведение малтанхи произведени айне, пёрвёврлё членсем тёлме-тёл пулмалла туса, җыраҗҗё. Малалла та җакан пекех шутлаҗҗё. Юлашки произведени айне лини туртаҗҗё те пур уйрйм произведенисене хушса, лини айне пётём произведенине җыраҗҗё.

Җакнашкалах, многочленсене иккёшне те ўсекек степенё йёркипе җырма юрать, вара халё катартнй пекех хутлас пулать.

51. Произведение аслй членёпе кёҗён членё. Кун умён пйхса тухвй тёслёхрен җакй куранать:

Хутланаканнин аслй членёпе хутлаканнин аслй членне хутласан произведенин аслй членё пулать.

Хутланаканнин кёҗён членёпе хутлаканнин кёҗён членне хутласан произведенин кёҗён членё пулать.

Произведенин ытти пур членёсен те тйп саспалли катартавё аслй член катартавёйчен пёчекрех, кёҗён член катартавёйчен пысйкрах пулнйран, произведенире аслй членна тата кёҗён членна пёрвёврлё членсем пулмаҗҗё.

Произведения ытти членсем темиҗе пәрвевәрлӗ членсене пӗр члена пӗрлештерсен пулма пултарасҗӗ. Хӑш чухне, пәрвевәрлӗ членсене пӗрлештерсен, произведении аслӑ членпа кӗҗӗн член кӑна юласҗӗ, ытти членсем йӑлтах пӗтеҗӗ; ӑна җак тӗслӗхрен курма пулат:

$$\frac{x^4 + ax^3 + a^2x^2 + a^3x + a^4}{x^5} \div \frac{x^4 + ax^3 + a^2x^2 + a^3x + a^4}{x^4 - a^4} = \frac{x^5 + ax^4 + a^2x^3 + a^3x^2 + a^4x}{x^5 - a^5} = x^5 - a^5.$$

52. Произведения членсен шучӗ. Хутланаканнинче 5 член, хутланаканнинче 3 член пултӑр. Хутланаканнин кашни членне хутланаканнин пӗрремӗш членӗ җине хутласан, произведении 5 член пулат; унтан хутланаканнин кашни членне хутланаканнин иккӗмӗш членӗ җине хутласан, произведении тага 5 член пулат т. ыт. те; апла пулсан, произведении пурӗ $5 \cdot 3$, урахла каласан, 15 член пулат. Пӗтӗмлетсе каласан, произведений членсен шучӗ, пәрвевәрлӗ членсене пӗрлештериччен, хутланаканри членсен шучӗпе хутланаканри членсен шучӗн произведенияепа тан пулат.

Произведения аслӑ членӗпе кӗҗӗн членӗн хӑйсемпе пәрвевәрлӗ членсем җук пултӑр тата произведение ытти членсем пӗтме пултарӑр, икӗ е темиҗе многочлен произведенияе членсен шучӗ, пәрвевәрлӗ членсене пӗрлештернӗ хыҗҗан, иккӗрен кая пулма пултараймасть.

Упраженисем.

җак многочленсене x саспалли степенӗ пӗчӗкленсе пыракан йӗркепе сыра хутлар:

78. $24x + 6x^2 + x^3 + 60$ тага $12x - 6x^2 + 12 + x^3$.

79. $(x^5 - x^3 + x - 1)(x^4 + x^2 - 1)$.

80. $(x^5 - ax^4 + a^2x^3 - a^3x^2 + a^4x - a^5)(x + a)$.

53. Двучленсене хутлассин хӑшпӗр формулисем. Двучленсене хутлассин җак формулисене астуса юлма кирлӗ:

а) $(a + b)^2 = (a + b)(a + b) = a^2 + ab + ab + b^2 = a^2 + 2ab + b^2$.

Сӑмахран:

$$17^2 = (10 + 7)^2 = 10^2 + 2 \cdot 10 \cdot 7 + 7^2 = 100 + 140 + 49 = 289.$$

җапла вара, икӗ число суммин квадратӗ—пӗрремӗш число квадратӗ җумне пӗрремӗшпе иккӗмӗш числон икӗ хуг илнӗ произведение тага иккӗмӗш число квадратне хушсан пулат.

б) $(a - b)^2 = (a - b)(a - b) = a^2 - ab - ab + b^2 = a^2 - 2ab + b^2$.

Сӑмахран:

$$19^2 = (20 - 1)^2 = 20^2 - 2 \cdot 20 \cdot 1 + 1^2 = 400 - 40 + 1 = 361.$$

җапла вара, икӗ число разноҗӗн квадратӗ—пӗрремӗш число квадратӗнчен пӗрремӗшпе иккӗмӗш числон икӗ хуг илнӗ произведение кӑларса, ун җумне иккӗмӗш число квадратне хушсан пулат.

в) Икё числом разноше тата пётём алгебралла выражение те алгебралла сумма пек туса сырма пулнэран малтанхи икё правилна пёрлештерсе шапла калама пулать:

Двучлен квадратчэ—пёрремёш член квадратчэ сумне пёрремёше иккёмёш членан икё хут илнэ произведении тата иккёмёш член квадратне хушсан пулать.

Анчах факна аставас пулать, квадрата хэпартакан двучленан кашни членне хэйён паллипех илмелле.

Сэмахран:

$$1. (2ab - c^2)^2 = (2ab)^2 + 2(2ab)(-c^2) + (-c^2)^2 = 4a^2b^2 - 4abc^2 + c^4.$$

$$2. (-m + 3n^3)^2 = (-m)^2 + 2(-m)(3n^3) + (3n^3)^2 = m^2 - 6mn^3 + 9n^6.$$

$$г) (a + b)(a - b) = a^2 + ab - ab - b^2 = a^2 - b^2.$$

Сэмахран:

$$25 \cdot 15 = (20 + 5) \cdot (20 - 5) = 20^2 - 5^2 = 400 - 25 = 375.$$

Шапла вара, икё число суммипе вёсен разношён произведенийё фак числосен квадратчэсен разношэ пулать.

54. Фак формуласемпе усэ курасси. Фак асаннэ формуласемпе усэ курса многочленсене хутлассине ахаль хутланинчен фамэллах шутлама пулать.

Тёслэхсем.

$$1. (4a^3 - 1)^2 = (4a^3)^2 - 2(4a^3) \cdot 1 + 1^2 = 16a^6 - 8a^3 + 1.$$

$$2. (x + y)(y - x) = (y + x)(y - x) = y^2 - x^2.$$

$$3. (x + y + 1)(x - y + 1) = [(x + 1) + y][(x + 1) - y] = (x + 1)^2 - y^2 = x^2 + 2x + 1 - y^2.$$

$$4. (a - b + c)(a + b - c) = [a - (b - c)][a + (b - c)] = a^2 - (b - c)^2 = a^2 - (b^2 - 2bc + c^2) = a^2 - b^2 + 2bc - c^2.$$

Упражненисем.

$$81. (a + 1)^2; (1 + 2a)^2; \left(x + \frac{1}{2}\right)^2.$$

$$82. (3a^2 + 1)^2; (0,1mx + 5x^2)^2.$$

$$83. (5a - 2)^2; (3x - 2a)^2; \left(3a^2 - \frac{1}{2}\right)^2.$$

84. $(a + b)^2$ тата $(a - b)^2$ двучленсен формулисемпе усэ курса фак квадратсене тупэр: 101^2 ; 997^2 ; 96^2 ; 57^2 ; 72^2 ; 89^2 .

$$85. (2m - 3n)^2; (3a^2x - 4ay)^2; \left(0,2x^3 - \frac{3}{8}\right)^2.$$

$$86. \left(\frac{1}{2}x^2 - 3\frac{1}{2}x\right)^2; (0,25p - 0,2q)^2.$$

$$87. (a + 1)(a - 1); (2a + 5)(2a - 5).$$

$$88. (2x - 3)(3 + 2x); (a^2 + 1)(1 - a^2).$$

Формуласемпе усэ курса фак произведенийсене тупэр:

$$89. (x^2 + 1)(x + 1)(x - 1); (4x^2 + y^2)(2x + y)(2x - y).$$

$$90. (m + n - p)(m + n + p); [a + (b + c)][a - (b + c)].$$

55. Икё число суммипе разношён кубё. Двучленсене хутлассин формулисем сумне тата икё формула хушпэр.

$$а) (a + b)^3 = (a + b)^2(a + b) = (a^2 + 2ab + b^2)(a + b) = a^3 + 2a^2b + \underline{\underline{ab^2}} + \underline{\underline{a^2b}} + 2ab^2 + b^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3,$$

урэхла каласан, икё число суммин кубё—пёрремёш число кубё сумне пёрремёш число квадрачёпе иккёмёшён вищё хут илнэ произведенине, пёрремёш числопа иккёмёшён квадрачён вищё хут илнэ произведенине тата иккёмёш число кубне хушсан пулать.

Сәмахран:

$$11^3 = (10 + 1)^3 = 10^3 + 3 \cdot 10^2 \cdot 1 + 3 \cdot 10 \cdot 1^2 + 1^3 = \\ = 1000 + 300 + 30 + 1 = 1331,$$

$$б) (a - b)^3 = (a - b)^2 (a - b) = (a^2 - 2ab + b^2) (a - b) = \\ = a^3 - \underline{2a^2b} + \underline{ab^2} - \underline{a^2b} + \underline{2ab^2} - b^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3,$$

урэхла каласан, икё число разнощён кубё—пёрремёш число кубёнчен пёрремёш число квадрачёпе иккёмёшён вищё хут илнэ произведенине кәларса, ун сумне пёрремёш числопа иккёмёшён квадрачён вищё хут илнэ произведенине хушсан тата унтан иккёмёш число кубне кәларсан пулать.

Сәмахран:

$$29^3 = (30 - 1)^3 = 30^3 - 3 \cdot 30^2 \cdot 1 + 3 \cdot 30 \cdot 1^2 - 1^3 = \\ = 27\,000 - 2\,700 + 90 - 1 = 24\,389.$$

Куба хәпартакан двучленән членёсене вёсен паллисемпе пёрле илсен, кун умёнхи икё правилине те пёрлештерме пултаратпәр:

Двучленән кубё—пёрремёш число кубё сумне пёрремёш член квадрачёпе иккёмёшён вищё хут илнэ произведенине унтан пёрремёш членпа иккёмёшён квадрачён вищё хут илнэ произведенине тата иккёмёш член кубне хушсан пулать.

Сәмахран:

$$(2a - 3b)^3 = (2a)^3 + 3(2a)^2(-3b) + 3(2a)(-3b)^2 + (-3b)^3 = \\ = 8a^3 - 36a^2b + 54ab^2 - 27b^3.$$

Упражненисем.

91. $(a + 1)^3$; $(a - 1)^3$; $(2x + 3)^3$; $(5 + 3x)^3$.

92. $\left(\frac{1}{2}m - 2\right)^3$; $\left(\frac{3}{4}p + \frac{1}{3}q\right)^3$; $(5 - 3x)^3$.

IV. Алгебрәлла пайласси.

56. Одночленсене пайласси. Ҷак одночленсене пайламалла пултәр:

$$a^5 : a^2,$$

Пайлаканнине частное сине хутласан пайланаканни пулнә пирки тата хутланә чухне пёрпек саспаллисен кәтартәвёсем хушәннә пирки тупмалли частнәйри a саспалли кәтартәвё хай сумне 2 хушсан 5 пулакан число пулмалла, урэхла каласан, вәл 5—2 разноспа тан число пулать. Ҷапла вара:

$$a^5 : a^2 = a^{5-2} = a^3$$

Ҷавән пекех:

$$x^3 : x^2 = x; y^4 : y = y^3 \text{ т. ит. те.}$$

Ҷапла ёнтё, пёр числон степенёсене пайланă чухне Ҷав числон частнайри степенён кăртартăвё пайланаканнин кăртартăвёнчен пайлаканнин кăртартăвне кăларсан пулать. Кёскен апа Ҷапла калаҫҫё: пёр числон степенёсене пайланă чухне пайланаканнин кăртартăвёнчен пайлаканнин кăртартăвне кăларасҫё.

б) Ҷак одночленсене пайламалла пултър:

$$12a^3b^2x : 4a^2b^2.$$

Пайлас действии определенийё тăрăх, частная пайлаканни Ҷине хутласан, пайланаканни пулать. Ҷаванпа та пулас частнайран коэффициентё 12:4, е 3 пулма тивёҫлё; a саспаллин кăртартăвё Ҷав саспаллин пайланаканнинчи кăртартăвёнчен пайлаканнинчи кăртартăвне кăларсан пулать; b саспалли частная пачах кёмест; x саспалли частная хайён кăртартăвёпех кёрет.

Ҷапла вара: $12a^3b^2x : 4a^2b^2 = 3ax$.

Тёрёслени: $3ax \cdot 4a^2b^2 = 12a^3b^2x$.

Правило. Одночлена одночлен Ҷине пайлас тесен, пайлаканнин коэффициентне пайлаканнин коэффициентё Ҷине пайламалла, пайланаканнинчи саспаллисен кăртартăвёсенчен пайлаканнинчи Ҷав саспаллисен кăртартăвёсене кăлармалла, пайланаканнинчен пайлаканнинче Ҷук саспаллисене кăртартăвёсене улаштармасăрах частная куҫармалла.

Тёслёхсем.

$$1. 3m^3n^4x : 4m^2nx = \frac{3}{4}mn^3.$$

$$2. -ax^4y^3 : \left(-\frac{5}{6}axy^2\right) = +\frac{6}{5}x^2y.$$

$$3. 0,8ax^n : (-0,02ax) = -40x^{n-1}.$$

57. Нульё кăрту. Пёр числон степенёсене пайланă чухне пайланаканнипе пайлаканнин кăртартăвёсем тан пулсан, частное 1 пулать; сăмахран, $a^3 : a^3 = 1$, мёншён тесен $a^3 = a^3 \cdot 1$. Пайланă чухне кунта та кăртартăвёсене кăларма йышăнăпър; вара частнайра пирён нуль кăртуллă саспалли пулать: $a^3 : a^3 = a^{3-3} = a^0$. Паллах, ку нуль кăртартăва эфир кăртартусем мёне пёлтерни Ҷинчен каланă пек апаанма кирлё мар, мёншён тесен числа хайне хай Ҷине 0 хут илме Ҷук. Ҷаванпа a^0 выражение a саспаллин пёрпек степенёсене пайласа пулнă частное тесе йышăнăпър; въл частное 1 пулнă пирки, a^0 выражени 1-пе тан тесе йышăнăпър.

58. Одночленсем пайланманнин паллисем. Тулли одночленсене пайласан пулнă частная тулли одночленпа Ҷырма май килмесен, вёсене пайлама Ҷук теҫҫё. Одночленсем пайланманни икё тёрлё пулать:

а) Пайлаканнинчи саспаллисем пайланаканнинче Ҷук чухне. Сăмахран: $4ab^2$ одночлена $2ax$ одночлен Ҷине пайлама Ҷук, мёншён тесен $2ax$ Ҷине кирек мёнле тулли одночлена хутласан та, произведенире x саспалли пулать, анчах пирён пайланаканнинче x саспалли пачах та Ҷук.

б) Пайлаканнинчи пёр-пёр саспаллин кáртáртáвё пайланаканнинчи çав саспаллин кáртáртáвёнчен пысáкрах чухне. Сáмахран, $10a^3b^2 : 5ab^3$ одночленсем пайланмаççё, мёншён тесен частнайра кирек мёнле тулли одночлен çырсан та, áна пайлаканни çине хутласан, произведенире b саспаллин показателё 3-рен кая пулмасть, анчах пайланаканнинче b саспалли показателё 2 кáна.

Пёр одночлен теприн çине пайланмаса, вёсен частнайне пайлас действи паллисемпе кáртáртма пулать; сáмахран, $4a$ одночлена $5b$ çине пайласан пулнá частнай çапла çырма пулать:

$$4a : 5b, \text{ e } \frac{4a}{5b}.$$

Упражненисем.

93. $8a^5x^3y : 4a^3x^2; 3ax^3 : (-5ax).$

94. $a^5b : \left(-\frac{5}{6}a^5b\right); 12a^m b^3 : 4ab.$

59. Многочлена одночлен çине пайласси. Калáпáр многочлена $a + b - c$ пёр-пёр одночлен çине пайламалла пултáр, эфир áна m саспаллипе çырáпáр:

$$(a + b - c) : m, \text{ e } \frac{a + b - c}{m}.$$

Многочлен $a + b - c$ алгебрáлла сумма пулса тáрать; алгебрáлла суммáна пёр-пёр число çине пайламалла пулсан, çав число çине кашни хушáнаканнине уйрáммáн пайлама юрать. Çавáнна:

$$\frac{a + b - c}{m} = \frac{a}{m} + \frac{b}{m} - \frac{c}{m}.$$

Áна терёслесе те пёлме пулать: $\frac{a}{m} + \frac{b}{m} - \frac{c}{m}$ многочлена пайлаканни m çине хутласан, пайланаканни $a + b - c$ пулать.

Правило. Многочлена одночлен çине пайлас тесен, многочленáн кашни членне çав одночлен çине уйрáммáн пайласа, пулнá частнайсене хушмалла.

Тёслёхсем.

1. $(20a^3 - 8a^2 - a) : 4a = 5a^2 - 2a - \frac{1}{4}.$

2. $(4x^2 - 2x + 10) : 2x = 2x - 1 + \frac{5}{x}.$

3. $\left(\frac{1}{2}x^3 - 0,3x^2 + 1\right) : 2x^2 = \frac{1}{4}x - 0,15 + \frac{1}{2x^2}.$

Упражненисем.

95. $(4a^2b + 6ab^2 - 12a^3b^5) : \frac{3}{4}ab.$

96. $(36a^2x^5 - 24a^3x^4 + 4a^4x^3) : 4a^2x^3$

97. $(3a^2y - 6a^2y^2 + 3a^2y^3 - 3a^2y^4) : 3a^2y.$

60. Одночлена многочлен çине пайласси. Калáпáр, сáмахран, a одночлена $b + c - d$ многочлен çине пайламалла пултáр. Çакáн пек пайласан пулнá частнай тулли одночленпа та, тулли много-

членпа та ғырма май ҫук, мёншён тесен частнайё пёр-пёр тулли
 одночлен е тулли многочлен пулсан, ҫак частнайпа $b+c-d$
 многочлен произведенийё ҫавах одночлен мар, многочлен пулать,
 (§ 45, 47). Ҫаванпа a одночлена $b+c-d$ многочлен ҫине пай-
 ласан пулнй частнйя пайлас действи паллипе ҫыраҫҫё:

$$a:(b+c-d), \text{ е } \frac{a}{b+c-d}.$$

61. Многочлена многочлен ҫине пайласси. Многочлена мно-
 гочлен ҫине пайласан пулакан частнйя сайра-хутра кәна тулли
 многочлен пек ғырма пулать. Сәмахран:

$$(a^2 + 2ab + b^2):(a + b) = a + b,$$

мёншён тесен

$$a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2.$$

Пётёмёшпе илсен ун пек частнайёсене пайлас действи паллипе
 кәна кәтартма пулать. Сәмахран, $a-b+c$ многочлена $d-e$
 ҫине пайласан пулнй частнйя ҫапла ҫыраҫҫё:

$$\frac{a-b+c}{d-e}, \text{ е } (a-b+c):(d-e).$$

62. Йёркеленё многочленсене пайласси. Частнйя хәш чухне
 тулли многочлен пек ғырма май килет. Ана мёнле тумаллине ҫак
 төслёхре кәтартса парар:

$$(5x^2 - 19x^3 + 17x + 6x^4 - 4):(1 - 5x + 3x^2).$$

Икё многочленне те x саспаллин пёчөкленекен степень йёр-
 кипе майласа ҫырапәр та тулли числосене пайланй чухнехи пек
 йёркепе пайләпәр:

	$6x^4 - 19x^3 + 5x^2 + 17x - 4$	$3x^2 - 5x + 1$
	$-6x^4 + 10x^3 - 2x^2$	$2x^2 - 3x - 4$
1-ш юлашки	$-9x^3 + 3x^2 + 17x - 4$	
	$+9x^3 - 15x^2 + 3x$	
2-ш юлашки	$-12x^2 + 20x - 4$	
	$+12x^2 - 20x + 4$	
3-ш юлашки	0	

Пирён пулас частное пёр-пёр многочлен пулмалла тейёпёр,
 тата унйн членёсем те x саспаллин пёчөкленекен степень йёр-
 кипе ырнаҫнй тейёпёр.

Частнайпа пайлаканнин произведенийё пайланаканнипе тан
 пулма кирлө. Йёркеленё многочленсене хутлани тәрәх, произве-
 денин аслй членё хутланаканнин аслй членне хутлаканнин аслй
 членё ҫине хутланипе пулать. Пайланаканнинче аслй член
 пёрремёшө пулать, пайлаканнипе частнайра та аслй членсем пёрре-
 мёшөсем (малтисем) пулаҫҫё. Ҫаванпа, пайланаканнин 1-мөш чле-
 нё ($6x^4$) пайлаканнин 1-мөш членёпе ($3x^2$) частнаййан 1-мөш чле-
 нён произведенийё пулма тивёслө. Апла пулсан: частнаййан 1-мөш
 членне тупма пайланаканнин 1-мөш членне пайлаканнин 1-мөш
 членё ҫине пайламалла. Пайланй хыҫҫан частнаййан 1-мөш членё
 $2x^2$ пулать. Ана лини айне частнйя ҫыратпәр.

Пайлаканнин пур членёсене те частнайън 1-мёш членё сине хутласа, пулнă произведение пайланаканнинчен кăларатпăр. Куна тума а́на пайланаканни айне пёрьевёрлĕ членсем тълме-тъл пулмалла туса сыратпăр та, пĕчĕклетекеннин пур членёсен палли-сене те хире-хирĕç паллăпа улаштаратпăр. Кăларсан вара, 1-мёш юлашки пулать. Çак юлашки нуль пулнă пулсан, частнайъра тупнă 1-мёш членсăр пуçне урăх член суккине пёлтернĕ пулĕччĕ, урăхла каласан, частное одночлен пулнă пулĕччĕ. Пирĕн тĕслĕхри пек 1-мёш юлашки нуль пулмасан, малалла сáпла сўтсе-яватпăр:

Пайлаканнин пĕтĕм членёсене частнайън кашни членё сине хутласан, пайланаканни пулать. Эпир пайлаканнин пĕтĕм членёсене чайстнайън 1-мёш членё сине хутласа пулнă произведение пайланаканнинчен кăлартăмăр; сáвăнпа, 1-мёш юлашкинче пайлаканнин пур членёсене те частнайън 2-мёш, 3-мёш тата ытти членёсем сине хутласан пулакан произведени пулма тивĕслĕ. Юлашкинчи аслă член 1-мёш пулать; пайлаканнин те аслă членё 1-мёшĕ; частнайъри аслă член (1-мёшне шутламасăр) 2-мёш членё пулать. Апла пулсан, юлашкин 1-мёш членё ($-9x^3$) пайлаканнин 1-мёш членёне частнайън 2-мёш членён произведенийĕпе тан пулмалла. Кунтан вара тупатпăр: частнайън 2-мёш членне тупма 1-мёш юлашкин 1-мёш членне пайлаканнин 1-мёш членё сине пайламалла. Пайласан частнайън 2-мёш членне— $3x$ тупатпăр. Ана частная сыратпăр.

Пайлаканнин пур членёсене те частнайън 2-мёш членё сине хутласа, пулнă произведение 1-мёш юлашкинчен кăларатпăр. 2-мёш юлашки пулать. Çак юлашки нуль пулсан, вара пайлас действи пĕтет. Анчах, пирĕн тĕслĕхри пек, 2-мёш юлашки нуль пулмасан, малалла сáпла сўтсе-яватпăр:

2-мёш юлашкийĕ пайлаканнин пĕтĕм членёсене частнайън 3-мёш, 4-мёш тата ытти членёсем сине хутласа пулнă произведенипе тан. Сáв членёсенчен частнайън аслă членё 3-мёш член; сáвăнпа, пáсăрхи пекех, 2-мёш юлашкин 1-мёш членне пайлаканнин 1-мёш членё сине пайласа частнайън 3-мёш членне тупатпăр. Пайласан,—4 пулать. Пайлаканнин пĕтĕм членёсене—4 сине хутласа, произведенине 2-мёш юлашкинчен кăларсан, 3-мёш юлашкине тупатпăр. Пирĕн тĕслĕхре ку юлашки нуль пулчĕ; вăл—частнайъра тупнă членсемсĕр пуçне урăх членсем пулас суккине пёлтерет. 3-мёш юлашки 0 пулман пулсан, сáв юлашкин 1-мёш членне пайлаканнин 1-мёш членё сине пайлама тиветчĕ; вара частнайън 4-мёш членне тупаттăмăр т. ыт. те.

Пайланаканнипе пайлаканни пĕр-пĕр сáспаллин ўсекен степень йёркипе сырсан, халĕ каланă пекех пайлас пулать; ун чухне вара произведенин кĕçĕн членё хутланаканнин кĕçĕн членне хутлаканнин кĕçĕн членё сине хутланипе пулать темеллеччĕ.

$$\begin{array}{r|l}
 \text{Тĕслĕхсем. а) } 28x^4 - 13ax^3 - 26a^2x^2 + 15a^3x & 7x^2 + 2ax - 5a^2 \\
 \text{„} & \frac{-8ax^3 + 20a^2x^2}{4x^2 - 3ax} \\
 & -21ax^3 - 6a^2x^2 + 15a^3x \\
 & \text{„} \quad + 6a^2x^2 - 15a^3x \\
 \hline
 & 0
 \end{array}$$

Эпир кунта пайлаканнин 1-мөш членне частнайын 1-мөш, 2-мөш тата ытти членёсем җине хутласа пулнӑ произведенисене җырмарамар, мөншён тесен вӑл произведенисем вёсене хӑш член айне җыраҗҗё—җав членсемпе тан пулаҗҗё, вёсем кӑларнӑ чухне пёрне-пёри пётереҗҗё. Җавӑнпа вёсене җырмаҗҗё.

$$\begin{array}{l}
 \text{б) } \frac{x^3 - a^3}{\begin{array}{l} \text{" } + ax^2 \\ ax^2 - a^3 \\ \text{" } + a^2x \\ a^2x - a^3 \\ \text{" } + a^3 \\ 0 \end{array}} \left| \frac{x - a}{x^2 + ax + a^2} \right. \quad \text{в) } \frac{x^4 - a^4}{\begin{array}{l} \text{" } + ax^3 \\ ax^3 - a^4 \\ \text{" } + a^2x^2 \\ a^2x^2 - a^4 \\ \text{" } + a^3x \\ a^3x - a^4 \\ \text{" } + a^4 \\ 0 \end{array}} \left| \frac{x - a}{x^3 + ax^2 + a^2x + a^3} \right.
 \end{array}$$

Җакӑн пекех, $x^5 - a^5$, $x^6 - a^6$... пёр сӑмахпа каласан, $x^m - a^m$ разноҗсем $x - a$ разность җине юлашки юлми пайланнине курма пулать, урӑхла каласан, икё числон пёрпек степенёсен разноҗё җак числосен разноҗё җине юлашки юлми пайланать.

63. Многочленсем пайланманнин паллисем. Многочлена многочлен җине җакӑн пек чух пайлама май җук:

а) Пайланаканнин аслӑ членри тёп саспаллин кӑтартӑвё пайлаканнин аслӑ членри җав саспаллин кӑтартӑвёнчен пёчёкрех пулсан, многочленсем пайланмаҗҗё, мөншён тесен ун пек чух частнайын аслӑ членне тупма җук.

б) Пайланаканнин кёҗён членри тёп саспаллин кӑтартӑвё пайлаканнин кёҗён членри җав саспаллин кӑтартӑвёнчен пёчёкрех пулсан, многочленсем пайланмаҗҗё, мөншён тесен ун пек чух частнайын кёҗён членне тупма җук.

в) Пайланаканнин аслӑ тата кёҗён членсенчи тёп саспалли кӑтартӑвёсем пайлаканнин аслӑ тата кёҗён членёсенчи җав саспалли кӑтартӑвёсенчен пёчёккё мар пулсан та, вӑл многочленсем пайланаҗҗё тесе калама җук. Кун пек чухне пайланассипе пайланмасси җинчен пёлес тесен вёсене пайлама тытӑнса, частное многочлен еврёлё пулассипе пулмассине пёличченех шутламалла.

Упражненисем.

98. $(x^2 - 3x - 4) : (x + 1); (y^2 - y - 2) : (y - 2).$

99. $(6x^3 + 2 - 3x^2 - 4x) : (2x - 1).$

100. $(3ax^5 - 15a^2x^4 + 6a^3x^3) : (x^2 - 5ax + 2a^2).$

101. $(x^6 - a^6) : (x^5 + ax^4 + a^2x^3 + a^3x^2 + a^4x + a^5).$

V. Хутлаканнисем җине уйӑрасси.

64. Малтан асӑрхаттарни. Алгебрӑлла пайласси җинчен каланӑ чух, эпир хӑшпёр чухне частнӑя пайлас действи паллипе кӑна кӑтартма пулать терёмёр. Җавӑн пек пулнӑ выраженисене, сӑмахран: $\frac{a}{b}, \frac{2x}{3a}, \frac{x^2 - 4x + y^2}{x + y}$ т. ыт. те, алгебрӑлла ваксем теме килёшнё.

Алгебралла ваксене, арифметикари ваксене кёскетнё пекех, кёскетсе сямаллатма, урэхла каласан, пайланаканнипе пайлаканнин общи хутлаканнисем пулсан, вёсене, сав хутлаканнисем сине пайласа вака сямаллатнинне малалла курапяр. Алгебралла ваксене ним тытанса тямасяр кёскетме пелес тесен, алгебралла выраженисен хутлаканёсене тупма вёренес пулать (арифметикари пекех, ваксене кёскетес пулсан, тулли числосен хутлаканёсене тупма пелес пулать).

65. Тулли одночленсене хутлаканнисем сине уйярасси. Пёрпёр тулли одночлен, сәмахран, $6a^2b^3$ илөпёр. Вәл произведени пулнәран, ана сәнне пәхсах хутлаканнисем сине уйярма пулать. Сапла:

$$6a^2b^3 = 2 \cdot 3 (aa) (bbb) = 2 \cdot 3 aabbb.$$

Хутлассин пёрлештерү законё тарәх сак хутлаканнисене терлә ушкәнсене пёрлештерсе, эфир ку одночлена темён терлә те уйярма пултаратпяр, сәмахран:

$$6a^2b^3 = (6a) (ab^3) = (2a^2b) (3b^2) = (3ab^2) (2ab) \text{ т. ыт. те.}$$

66. Многочленсене хутлаканнисем сине уйярасси. Многочленсене хутлаканнисем сине хәсан уйярма май пуррин сямалтарах тәсләхёсене кәтартса парар.

а) $(a + b - c) m = am + bm - cm$ пулсан, вара тепёр майлә та:

$$am + bm - cm = (a + b - c) m.$$

Сапла ёнтё, многочленән кашни членёче общи хутлаканни пулсан, ана скобка тулашне кәларма юрать.

Сәмахран:

$$1. x^6 - 2x^2 + 3x = x(x^5 - 2x + 3).$$

$$2. 16a^2 - 4a^2 = 4a^2(4 - a).$$

$$3. 5m(x - 1) + 3n(x - 1) = (x - 1)(5m + 3n).$$

$$б) (a + b)(a - b) = a^2 - b^2 \text{ пулсан,}$$

вара тепёр майлә та:

$$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b).$$

Сапла ёнтё, двучлен икё число квадратёсен разносё пулсан, ана сав числосен суммипе вёсен разносён произведенийё туса сьрма юрать.

Сәмахран:

$$1. x^2 - 4 = x^2 - 2^2 = (x + 2)(x - 2).$$

$$2. y^2 - 1 = y^2 - 1^2 = (y + 1)(y - 1).$$

$$3. 9a^2 - \frac{1}{4} = (3a)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \left(3a + \frac{1}{2}\right) \left(3a - \frac{1}{2}\right).$$

$$4. 25x^2 - 0,01 = (5x)^2 - 0,1^2 = (5x + 0,1)(5x - 0,1).$$

$$5. m^4 - n^4 = (m^2)^2 - (n^2)^2 = (m^2 + n^2)(m^2 - n^2) = (m^2 + n^2)(m + n)(m - n).$$

$$6. x^2 - (x - 1)^2 = [x + (x - 1)][x - (x - 1)] = (x + x - 1)(x - x + 1) = 2x - 1.$$

в) $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ тата $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ пулсан, вара тепёр майлă та:

$$\text{тата} \quad a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2 = (a + b)(a + b)$$

$$a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2 = (a - b)(a - b).$$

Ҙапла ёнтё, трехчлен икё число квадратёсен сумми пулсан тата ун җумне җав числосен икё хут илнё произведенине хушнă е кăларнă пулсан, ăна җав числосен суммин е разноҗён квадратёпе улăштарма юрать.

Тёслёхсем.

1. $a^2 + 2a + 1$.

$1 = 1^2$ тата $2a = 2 \cdot a \cdot 1$ пулнă пирки, $a^2 + 2a + 1 = (a + 1)^2$.

2. $x^4 + 4 - 4x^2$.

Кунта $x^4 = (x^2)^2$, $4 = 2^2$ тата $4x^2 = 2x^2 \cdot 2$; җавӳнна:

$$x^4 + 4 - 4x^2 = (x^2 - 2)^2.$$

Тата җакӳн пек те җырма юрать: $x^4 + 4 - 4x^2 = (2 - x^2)^2$, мёншён тесен $x^2 - 2$ двучленипа $2 - x^2$ двучлена квадрата хăпартсан трехчленсем пулаҗҗё:

$$(x^2 - 2)^2 = x^4 - 4x^2 + 4; \quad (2 - x^2)^2 = 4 - 4x^2 + x^4;$$

вёсен член йёркисем кăна урăхла пулчёҗ, хăйсем пёрех.

3. $-x + 25x^2 + 0,01$.

Кунта икё квадрат пур: $25x^2 = (5x)^2$ тата $0,01 = 0,1^2$; $5x$ -па $0,1$ числосен икё хут илнё произведенийё $2 \cdot 5x \cdot 0,1 = x$ пулать. Ку трехчлента икё квадратё те + паллăллă, икё хут илнё произведенийё $(x) -$ паллăллă, җавӳнна та:

$$-x + 25x^2 + 0,01 = 25x^2 - x + 0,01 = (5x - 0,1)^2 = (0,1 - 5x)^2.$$

4. $-x^2 - y^2 + 2xy$.

Скобка тулашне — паллă кăларăпър: $-(x^2 + y^2 - 2xy)$. Скобка ăшёнчи трехчлен, паллах $(x - y)^2$ пулмалла. Апла пулсан:

$$-x^2 - y^2 + 2xy = -(x^2 + y^2 - 2xy) = -(x - y)^2 = -(y - x)^2.$$

г) Хăш чухне многочлена хутлакӳннисем җине уйӳрма унӳн членёсене хăшпёр ушкӳнсене пухмалла пулать.

Сăмахран:

1. $ax + ay + bx + by = (ax + ay) + (bx + by) =$
 $= a(x + y) + b(x + y) = (x + y)(a + b).$

2. $12 - 4x - 3x^2 + x^3 = (12 - 4x) - (3x^2 - x^3) =$
 $= 4(3 - x) - x^2(3 - x) = (3 - x)(4 - x^2) = (3 - x)(2 + x)(2 - x).$

3. $m^2 + n^2 - 2mn - p^2 = (m^2 + n^2 - 2mn) - p^2 = (m - n)^2 - p^2 =$
 $= (m - n + p)(m - n - p).$

4. $x^2 - y^2 + 6y - 9 = x^2 - (y^2 - 6y + 9) = x^2 - (y - 3)^2 =$
 $= [x + (y - 3)][x - (y - 3)] = (x + y - 3)(x - y + 3).$

д) Хăш чухне пулăшакӳн членсем кёртмелле пулать е пёр-пёр членне икё члена уйӳрмалла пулать.

Сăмахран:

1. $a^3 - b^3 = a^3 - a^2b + a^2b - b^3 = a^2(a - b) + b(a^2 - b^2) =$

$$= a^2(a-b) + b(a+b)(a-b) = (a-b)[a^2 + b(a+b)] = (a-b)(a^2 + ab + b^2).$$

$$2. a^3 + b^3 = a^3 + a^2b - a^2b + b^3 = a^2(a+b) - b(a^2 - b^2) = (a+b)[a^2 - b(a-b)] = (a+b)(a^2 - ab + b^2).$$

$$3. 2x^2 + 3xy + y^2 = 2x^2 + 2xy + xy + y^2 = 2x(x+y) + y(x+y) = (x+y)(2x+y)$$

Упражненисем.

102. $2a + 2x$; $ax + ay$; $4y^2 - 6xy$.
 103. $4ax - 2ay$; $6x^2y + 9xy^2$.
 104. $12a^2b - 9a^2b^2 - 6ab^3$; $xy^2 - 7xy + 4x^2y$.
 105. $m^2 - n^2$; $a^2 - 1$; $1 - a^2$.
 106. $x^2 - 4$; $m^2 - 9$; $4x^2 - y^2$.
 107. $\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{9}y^6$; $0,01a^6 - 9$; $3a^5 - 48ab^8$.
 108. $(x-y)^2 - a^2$; $9(a+2b)^2 - 1$; $a^2 - (b+c)^2$.
 109. $(x+y)^2 - (x-y)^2$; $16x^2 - 4(x+y)^2$.
 110. $x^2 - 2xy + y^2$; $m^2 + n^2 + 2mn$.
 111. $2ab + a^2 + b^2$; $a^2 - 4ab + 4b^2$.
 112. $x^2 + 8x + 16$; $x^2 + 1 + 2x$.
 113. $5a^3 - 20a^2b + 20ab^2$.
 114. $a^2 + 2ab + b^2 - c^2$; $a^2 - b^2 - 2bc - c^2$.
 115. $ax + bx + ay + by$; $ac - ad + bd - bc$.
 116. $a^2 + ab - a - b$; $xz - 3y - 3z + xy$.
 117. $4mn + xy - 2nx - 2my$; $8a^3 - 12a^2 - 18a + 27$ (3 хутлакани сине).

VI. Алгебралла ваксем.

67. Алгебралла вакпа арифметикалла вак уйрәмләхә. Икә алгебралла выражение пайласан пулнй частнйя алгебралла вак теңгә. Сәмахран, сак алгебралла выраженисем алгебралла ваксем пулаңгә:

$$\frac{a}{b}, \frac{a+b}{c-d}, \frac{2x^2-x+5}{x+2}.$$

Алгебралла ваксен хәшпәр уйрәмләхәсене пәхса тухар.

$\frac{a}{b}$ вака илетпәр; саспаллисем вырәнне числосем: $a=12$, $b=4$ тата $a=3$, $b=7$; унтан $a=-20$, $b=30$; юлашкинчен тата $a=0$, $b=3$ илсе, унән числоллә пысакәшине тупатпәр. Вара сәпла числосем тупатпәр: $3, \frac{3}{7}, -\frac{2}{3}$ тата 0. Сәпла ёнтә:

алгебралла вакән числоллә пысакәшә тулли число та, вак та, положительнй та, отрицательнй та тата нуль те пулма пултарать.

Задача условийёсене кура a -па b саспаллисен төрлөрен числоллә пелтерешёсем пулма пултарнине кура:

алгебралла вакән числительне знаменатель кашни уйрәмән тулли е ваклә, положительнй е отрицательнй число пулма пултарасгә. Сакнашкалах вак числитель нуль те пулма пултарать; знаменатель нуль пулсан, вак хәйән пелтерешне сүхатать (мөншён тесен нуль сине пайлама сук).

Сәпла вара, алгебралла вакән әнланәвә арифметикалла вак әнланәвәнчен әнләрах. Арифметикалла вака алгебралла вакән уйрәм төсләхә тесе шутлама пулать.

68. Вакън тѣп свойстви. Вак вѣл числителе знаменатель џине пайланѣ частное пулатъ пулсан, анчах частное пайланаканнипе пайлаканнипе пѣр число џине (нульсѣр пуџне, § 34, г) хутланѣран (е пайланѣран) улѣанмасть, вара ку свойство вакѣан та џавах юлатъ, урѣхла каласан, вакън числителѣпе знаменательне пѣр число џинех (нульсѣр пуџне) хутласан (е пайласан), ва-

кѣн пысѣкѣшѣ улѣанмасть. Самахран, $\frac{-\frac{2}{3}}{\frac{7}{5}}$ вакън числителѣ-

пе знаменательне $-\frac{4}{9}$ џине хутласан, џапла пулатъ:

малтанхи вак:

$$-\frac{2}{3} : \frac{7}{5} = -\frac{10}{21};$$

џенѣ вак:

$$\begin{aligned} \left[\left(-\frac{2}{3}\right) \cdot \left(-\frac{4}{9}\right) \right] : \left[\frac{7}{5} \cdot \left(-\frac{4}{9}\right) \right] &= \left(+\frac{8}{27}\right) : \left(-\frac{28}{45}\right) = \\ &= -\frac{8 \cdot 45}{27 \cdot 28} = -\frac{360}{756} = -\frac{10}{21}; \end{aligned}$$

эпир куратпѣр, малтанхи вакън пысѣкѣшѣ улѣанмарѣ.

Ваксен џакнашкал свойствипе усѣ курса, арифметикѣра арифметикѣлла ваксене улѣштарнѣ пекех, алгебрѣлла ваксене те улѣштарма пулатъ, урѣхла каласан, май пулсан, вака кѣскетме, кирлѣ пулсан, пѣр знаменательлѣ тума пулатъ.

69. Вак членѣсене тулли число пек тѣвасси. Алгебрѣлла ваксен членѣсем хѣйсем те ваклѣ пулсан, вѣсене пѣр-пѣр суйласа илнѣ юрѣхлѣ число е алгебрѣлла выражени џине хутласа, эпир вѣл ваксенчен хѣтѣлма пултаратпѣр. Самахран:

$$1) \frac{\frac{3}{4}a}{b}; \text{ икѣ членне те 4 џине хутласан, } \frac{3a}{4b} \text{ пулатъ;}$$

$$2) \frac{\frac{2}{3}m}{\frac{7}{8}n} \text{ " " 24, " " } \frac{16m}{21n} \text{ "}$$

$$3) \frac{ax-1}{1-\frac{1}{x}} \text{ " " } x \text{ " " } \frac{ax^2-x}{x-1} \text{ "}$$

Упражненисем.

Вак членѣсене тулли число пек туса џырѣр:

$$118. \frac{\frac{5}{7}x}{y}; 0,3ab; \frac{a^2}{1-\frac{3}{8}b}; \frac{m}{2,36n}$$

$$119. \frac{\frac{3}{4}ab}{\frac{5}{6}x^2}; \frac{3-\frac{1}{2}a^3}{3-\frac{3}{4}b}; \frac{3x-\frac{1}{4}}{a-b}$$

$$120. \frac{2\frac{1}{8}(a+b)}{4\frac{1}{4}}; \frac{3a-\frac{7}{3}}{1-\frac{1}{6}a}$$

$$121. \frac{ax+b+\frac{c}{x}}{ax+1}; \frac{1+\frac{a}{x}-\frac{b}{x^2}}{1-\frac{1}{x}}$$

70. Вак членёсен паллисене улаштарасси. Вакан числителёпе знаменателён паллисене хире-хирёс паллапа улаштарни — вёсене — 1 сине хутланипе пёрех пулать, апла тунипе вакан пысакышё улашанмасть; сәпла:

$$\frac{-8}{-4} = 2 \text{ тата } \frac{+8}{+4} = 2; \quad \frac{-10}{+2} = -5 \text{ тата } \frac{+10}{-2} = -5.$$

Сакнашкал пёр вәхәтрах вакан пёр-пёр членё умёнчи паллана тата пётём вак умёнчи паллана улаштарсан, вак пысакышё улашанмасть; сәмахран:

$$\frac{-10}{+2} = -5; \quad \frac{-10}{-2} = -5; \quad \frac{+10}{+2} = -5.$$

Вакан сәк свойствисемпе усә курса, вака урәхлатса сәрма пулать; сәмахран:

$$\frac{m^2 - n^2}{n - m} = - \frac{m^2 - n^2}{-(n - m)} = - \frac{(m + n)(m - n)}{m - n} = -(m + n).$$

Упражненисем.

Ваксен числителёпе знаменателён паллисене улаштарәр:

122. $\frac{1-x}{-x}; \frac{-3a^2}{a-b}; \frac{1-a}{2-b}.$

123. $\frac{-a^2 - b^2 + 2ab}{b-a}; \frac{1-m^2}{-m+1}.$

124. Ваксен пысакышне улаштармасәр, кашни вак умне — палла лартәр:

$$\frac{-3a}{6}; \frac{5x^2}{-3}; \frac{1-a}{b}; \frac{a}{2-x}; \frac{m^2 - n^2}{n - m}.$$

71. Ваксенё кёскетесси. Числителёпе знаменателёнче общи хутланаканнисем пулсан, алгебрәлла вака ытларах сәмәллатса сәрма пулать.

Тёслөхсем.

$$\frac{48ab}{60ac} = \frac{4b}{5c}; \quad \frac{3a^2b}{7a^3b} = \frac{3}{7a}; \quad \frac{160a^5b^2cd^2}{120a^2b^5c} = \frac{4a^2d^2}{3b^3}.$$

Ку төслөхсенчен сәкә курәнать:

ваксене кёскетнё чухне числителёпе знаменателён коэффициентёсене вёсен общи пайлаканё сине кёскетессё, числителёпе знаменателёри саспаллиллё общи хутлаканнисене вёсен общи степенё сине кёскетессё.

Вакан числителё е знаменателё (е иккёшё те пёрле) многочленсем пулсан, малтан вёсене хутлаканнисем сине уйәрмалла (§ 66 катартнә пек), вара, вёсен пёрпек общи хутлаканнисем пулсан, вака вёсем сине кёскетме юрать.

Тёслөхсем.

$$\frac{6x^2 + 8xy}{9xy + 12y^2} = \frac{2x(3x + 4y)}{3y(3x + 4y)} = \frac{2x}{3y};$$

$$\frac{x^2 - 1}{2x + 2} = \frac{(x + 1)(x - 1)}{2(x + 1)} = \frac{x - 1}{2} = \frac{1}{2}(x - 1)$$

(2 сине пайлас вырәнне $\frac{1}{2}$ сине хутланә).

Упражненисем.

Ваксене кёскетёр:

$$125. \frac{7}{7x}; \frac{2m}{3m^2}; \frac{4a^2b}{6ab^2}; \frac{42x^3y^3}{112x^2y^2}.$$

$$126. \frac{12ab}{8ax}; \frac{3a^2bc}{12ab^2}; \frac{48a^3x^2y^4}{45a^2xy}.$$

$$127. \frac{ab}{a^2+ab}; \frac{9xy}{3x^2-3xy}; \frac{4a+8}{4a-8}.$$

$$128. \frac{a^2+a}{a^2-a}; \frac{x-3}{x^2-9}; \frac{a^2+a}{a^2-1}.$$

$$129. \frac{x(x-1)^2}{2x^2(x-1)(x+1)}; \frac{ax+x^2}{3bx-cx^2}; \frac{5a^2+5ax}{a^2-x^2}.$$

$$130. \frac{(a+b)^2(a-b)^2}{a^2-b^2}; \frac{p^2-1}{(1+py)^2-(p+y)^2}.$$

72. Ваксене общи знаменательлѣ тавасси. а) Знаменательсем саспаллилѣ одночленран таракан ваксене илер; сѣмахран:

$$\frac{a}{2b}; \frac{c}{3ab}; \frac{d}{5ab^2}.$$

Вёсен общи знаменатель 30ab² пуласси курянсах тарать. Вёсен членёсене танлаштаракан хутлакансем 15ab, 10b тата 6 пулащѣ.

$$\frac{15ab}{2b} = \frac{15a^2b}{30ab^2}; \frac{10b}{3ab} = \frac{10bc}{30ab^2}; \frac{6}{5ab^2} = \frac{6d}{30ab^2}.$$

Татѣх тёслѣх илер:

$$\frac{a}{12b^2c}; \frac{3b}{8a^3c^4d^2}; \frac{5c}{18ab}.$$

Общи знаменатель панѣ знаменательсем ѣине пурин ѣине те пайланма тивѣслѣ. Ыаванпа та, общи знаменательн чи пысѣк коэффиценчѣ панѣ коэффициентсен чи пѣчѣк общи кратнайѣ пулмалла. Общи знаменательри саспаллилѣ хутлаканнисен степенѣ панѣ знаменательсенчи ѣавнашкал хутлаканнисен степенѣ ѣине пайланмалла. Ыапла вара, ку тёслѣхре общи знаменательн коэффициентчѣ 12, 8 тата 18 числосен чи пѣчѣк общи кратнайѣ, урѣхла каласан, 72 пулать.

a саспаллин кѣтартѣвѣ 3; b саспаллин кѣтартѣвѣ 2 пулать т. ыт. те. Общи знаменатель 72a³b²c⁴d² пулать.

Танлаштаракан хутлакансем 6a³c³d², 9b² тата 4a²bc⁴d² пулащѣ.

$$\frac{6a^3c^3d^2}{12b^2c} = \frac{6a^4c^3d^2}{72a^3b^2c^4d^2}; \frac{9b^2}{8a^3c^4d^2} = \frac{27b^3}{72a^3b^2c^4d^2}; \frac{4a^2bc^4d^2}{18ab} = \frac{20a^2bc^5d^2}{72a^3b^2c^4d^2}.$$

Ку тёслѣхсенчен ѣакѣ курянать:

Одночлен знаменательлѣ темисѣ вакѣн общи знаменательне тупас тесен, панѣ ваксен знаменатель коэффициентсене чи пѣчѣк общи кратнайне тата панѣ знаменательсене кѣрекен чи аслѣ степенлѣ саспаллисене илмелле; вара ѣаксен производенийѣ панѣ вакѣн общи знаменательлѣ пулать.

б) Малалла знаменателё многочленран таракан ваксене илер; сәмахран:

$$\frac{x}{a-b}; \frac{y}{a+b}; \frac{z}{a^2-b^2}.$$

Қашни знаменательне хутлаканнисем сине уйғарар. Малтанхи икё знаменателё хутлаканнисем сине уйрәлмәсчә, виçсәмешә $(a+b)(a-b)$ пулать. Саванпа, общи знаменатель a^2-b^2 пулать; вара сакна тупатпәр:

$$\frac{a+b}{a-b} = \frac{ax+bx}{a^2-b^2}; \frac{a-b}{a+b} = \frac{ay-by}{a^2-b^2}; \frac{z}{a^2-b^2}.$$

в) Ваксен знаменателёнчен нихәш мәшәрән те общи хутлаканнисем сук пулма пултарать. Кун пек чухне арифметикәри пек шутлас пулать: кашни вакән числителёпе знаменательне ытти мёнпур ваксен знаменателёсен произведенийё сине хутламалла.

Сәмахран:

1. $\frac{a}{3m}; \frac{2b}{5n}; \frac{3c}{2p} \dots \frac{a \cdot 5n \cdot 2p}{3m \cdot 5n \cdot 2p}; \frac{2b \cdot 3m \cdot 2p}{5n \cdot 3m \cdot 2p}; \frac{3c \cdot 3m \cdot 5n}{2p \cdot 3m \cdot 5n}$, урәхла каласан,

$$\frac{10anp}{30mnp}; \frac{12bmp}{30mnp}; \frac{45cmn}{30mnp}.$$

2. $\frac{a}{a+b}; \frac{b}{a-b}; \dots \frac{a(a-b)}{(a+b)(a-b)}; \frac{b(a+b)}{(a+b)(a-b)}$, урәхла каласан,

$$\frac{a^2-ab}{a^2-b^2}; \frac{ab+b^2}{a^2-b^2}.$$

Упражненисем.

Сак ваксене пёр знаменательлө тәвәр:

131. $\frac{3}{a}; \frac{4}{6}; \frac{x}{3y}; \frac{y}{4x}; \frac{x}{4}; \frac{4}{x}.$

132. $\frac{2}{a}; \frac{3}{b}; \frac{1}{2c}; \frac{7x}{4a^2}; \frac{2}{3b^2}; \frac{4b^2}{5x}.$

133. $\frac{5xy}{3a^2bc}; \frac{3ab}{4mx^2y}; \frac{x}{4ab}; \frac{y}{8a^2b^2}.$

134. $\frac{3}{8ab}; 3x; \frac{a}{5x^3} \left(3x - a \frac{3x}{1} \text{ вак туса шутламалла} \right).$

135. $\frac{x+y}{2x-2y}; \frac{x-y}{3x+3y}; \frac{1}{m+1}; \frac{2}{m^2-1}; \frac{3}{m-1}.$

136. $\frac{2}{x^2-2x+1}; \frac{3a}{x-1}; \frac{1}{x-1}; \frac{1}{2x-1}; \frac{1}{(x-1)(2x-1)}.$

137. $\frac{x}{28a^2b^2}; \frac{y}{21a^2b}; \frac{a-b}{b}; \frac{2a}{a-b}; \frac{1}{a^2-b^2}.$

73. Ваксене хушассипе кәларасси. Многочлена одночлен сине пайлас правило тәрәх (§ 59) эфир сәпла сьрма пултаратпәр:

$$\frac{a+b+c}{m} = \frac{a}{m} + \frac{b}{m} + \frac{c}{m}; \frac{a-b}{m} = \frac{a}{m} - \frac{b}{m}.$$

Сак пёртанлөксене сылтәмран сулахаялла вуласан, сакна куратпәр:

1. Пёрпек знаменательлѣ ваксене хушас тесен, вѣсен числительсене хушса, сумма айне сав знаменателѣх сырмалла.

2. Пёрпек знаменательлѣ ваксене каларас тесен, вѣсен числительсене каларса, разность айне сав знаменателѣх сырмалла.

Хушма е каларма паня ваксен знаменательсем пёрпек мар пулсан, вѣсене малтав пёр знаменательлѣ тумалла.

С а м а х р а н :

$$1. \frac{\overbrace{df}^{2b}}{b} + \frac{\overbrace{cf}^{5ac}}{d} + \frac{\overbrace{e}^{bd}}{f} = \frac{adf + cbf + ebd}{bdf}.$$

$$2. \frac{\overbrace{3m^2}^{2b}}{10a^2bc} - \frac{\overbrace{5n^2}^{5ac}}{4ab^2} = \frac{6bm^2 - 25acn^2}{20a^2b^2c}.$$

$$3. \frac{x+1}{2x-2} - \frac{x^2+3}{2x^2-2}.$$

$$\frac{2x-2=2(x-1)}{2x^2-2=2(x^2-1)=2(x+1)(x-1)} \left| \begin{array}{l} \text{танл. хутл.} = x+1 \\ \text{„ „} = 1 \end{array} \right.$$

Общи знам. $2(x+1)(x-1)$

Каларса шутланя хыссын сапла пулать:

$$\frac{(x+1)^2 - (x^2+3)}{2(x+1)(x-1)} = \frac{x^2+2x+1-x^2-3}{2(x+1)(x-1)} = \frac{2x-2}{2(x+1)(x-1)} = \frac{1}{x+1}.$$

Упражненисем.

$$138. \frac{1}{a} + \frac{1}{2b} + \frac{1}{3c}; \quad \frac{2}{x^2} + \frac{5}{3x}; \quad \frac{a-1}{2} - \frac{2x+3}{4}.$$

$$139. 1 - \frac{5}{x} + \frac{2}{x^2} \left(\text{1-не вак } \frac{1}{1} \text{ туса шутлар} \right).$$

$$140. 1 + \frac{x-1}{2}; \quad x - \frac{2(3-x)}{3}; \quad 1 - \frac{2(x-1)}{3}.$$

$$141. \frac{2+x}{1+2x} - \frac{2-x}{1-2x} - \frac{1+6x}{4x^2-1}; \quad 142. \frac{2ab}{a^2-b^2} + \frac{b}{a^2+ab} - \frac{a+b}{a^2-ab}.$$

$$143. x \text{ вырӑйне } \frac{mn}{m+n} \text{ лартсан, } \frac{m-x}{n-1} \text{ вак мӑнле пулать?}$$

74. Ваксене хутласси. Вака вак сине хутлас тесен, числителе числитель сине, знаменателе знаменатель сине хутламалла та пёрремеш произведение числитель, иккёмешне—знаменатель тумалла, урӑхла каласан:

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}. \quad (1)$$

Ку правило арифметикалла ваксене хутлассин правиле пѣрех. Анчах саспаллисем вырӑнѣнче тулли положительнай числосем кӑна мар, вакля тата отрицательнай числосем те пулма пултаращѣ. Савӑнпа ку правило алгебралла ваксемшѣн те, a, b, c , тата d саспаллисем вырӑнѣнче кирек мѣнле число пулма пултарнай чухне те юрӑхла пулнине тѣрѣслесе пӑхас пулать. Малтанляха сак числосем пурте положительнай вакля числосем пулччӑр. Сӑмахран:

$$a = \frac{2}{3}, \quad b = \frac{7}{8}, \quad c = \frac{5}{6} \quad \text{тата} \quad d = \frac{9}{4}.$$

Ўақ числосене (1) пёртанлӑха лартса, сулахай тата сылтӑм пайӑсене уйрӑм шутласа кӑларар та результатсене танлаштарса пӑхар; ҫапла вара:

$$\frac{a}{b} = \frac{2}{3} : \frac{7}{8} = \frac{2 \cdot 8}{3 \cdot 7}; \quad \frac{c}{d} = \frac{5}{6} : \frac{9}{4} = \frac{5 \cdot 4}{6 \cdot 9};$$

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{2 \cdot 8}{3 \cdot 7} \cdot \frac{5 \cdot 4}{6 \cdot 9} = \frac{2 \cdot 8 \cdot 5 \cdot 4}{3 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 9}$$

(пурӑ мӑн чухлӑ пулнине шутламӑпӑр).

Халӑ пёртанлӑхӑн (1) сылтӑм енне шутласа кӑларар:

$$ac = \frac{2}{3} \cdot \frac{5}{6} = \frac{2 \cdot 5}{3 \cdot 6}; \quad bd = \frac{7}{8} \cdot \frac{9}{4} = \frac{7 \cdot 9}{8 \cdot 4};$$

$$\frac{ac}{bd} = \frac{2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9}{3 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 4} = \frac{2 \cdot 5 \cdot 8 \cdot 4}{3 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 9}.$$

Пулнӑ результатсене танлаштарса пӑхсан, эфир вӑсем пӑрпекх пулнине куратпӑр, мӑншӑн тесен (тулли числосене хутлассин ылмаштару законӑ тӑрӑх) $2 \cdot 8 \cdot 5 \cdot 4 = 2 \cdot 5 \cdot 8 \cdot 4$ тата $3 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 9 = 3 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 9$. Ҫапла ӑнтӑ, пёртанлӑх (1) каллех тӑрӑс пулса юлать.

Халӑ a , b , c тата d числосенчен хӑшӑ те пулин отрицательнӑй пултӑр. Калӑпӑр, сӑмахран, $a = -\frac{2}{3}$ (b , c , тата d малтанхи пекх пулчӑр).

Вара $\frac{a}{b}$ вак отрицательнӑй пулать, ҫавӑнпа пёртанлӑхӑн (1) сулахай пайӑ пӑтӑмпекх отрицательнӑй пулать. Сылтӑм пайӑнче ac произведени отрицательнӑй пулать, ҫавӑнпа пӑтӑм сылтӑм пайӑ те отрицательнӑй число пулать. Абсолютнӑй пӑсӑкӑшӑ сулахай пайӑн те, сылтӑм пайӑн те малтанхи пекх пулать. Ҫапла ӑнтӑ, пёртанлӑх (1) пӑсӑлмасть. Ҫакӑн пекх ытти числосем отрицательнӑй пулсан та пёртанлӑх (1) тӑрӑс юлнине курма пулать.

Халӑ эфир пӑр уйрӑм тӑслӑх ҫинчен каларӑмӑр, анчах вӑл кирек мӑнле тӑслӑхшӑн те ҫавах тӑрӑс пулать; ҫапла ӑнтӑ, a , b , c , тата d саспаллисем кирек мӑнле пӑлтерӑшлӑ пулсан та, пёртанлӑх (1) тӑрӑсех пулса тӑрать.

75. Вакӑн квадратӑпе кубӑ. Ваксене хутлассин правилепе вӑсене квадрата тата куба хӑпартнӑ ҫӑрте усӑ курар. Правило тӑрӑх ҫапла пулать:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^2 = \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} = \frac{a^2}{b^2}; \quad \left(\frac{a}{b}\right)^3 = \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} = \frac{a^3}{b^3}.$$

Ҫавӑнпа та:

Алгебрӑлла вака квадрата е куба хӑпартас тесен, числитӑльпе знаменателе уйрӑммӑн ҫав степенепе хӑпартмалла.

76. Ваксене пайласси. Вака вак ҫине пайлас тесен, пӑрремӑш вакӑн числитӑльне иккӑмӑшӑн знаменателӑ, пӑрремӑш вакӑн знаменатӑльне иккӑмӑшӑн числителӑ ҫине хутламалла та, пӑрремӑш произведение числитӑль, иккӑмӑшне знаменатӑль тумалла, урӑхла каласан:

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{ad}{bc}.$$

Ку пёртанлăх кирек мёнле a , b , c , d числосемшён те тёрёс пулнине хутласа тёрёсleme пулать: частнăя пайлаканни çине хутласан пайланаканни пулать:

$$\frac{ad}{bc} \cdot \frac{c}{d} = \frac{adc}{bcd} = \frac{a}{b}.$$

77. Асърхаттарнисем. 1) $\frac{ad}{bc} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}$ пулнăран, пайлассин правилине тепёр майлă калама пулать:

Вака вак çине пайлас тесен, пёрремёш вака иккёмёшён хирёсле вакё çине хутламалла кăна.

2) Кирек мёнле тулли алгебралла выражение те вак тесе йышăнма пулать, вара вал вакăн числителё çав тулли выражени, знаменателё 1 пулать; сăмахран, $a = \frac{a}{1}$; $3x^2 = \frac{3x^2}{1}$ т. ыт. те. Çавăнпа, ваксемпе действисем тумалли çак правилăсемпе, панă выраженисенчен хăшё-пёри тулли выражени пулсан та, усă курма пулать, тулли выражение вак туса çырмалла кăна. Сăмахран:

$$a : \frac{b}{c} = \frac{a}{1} : \frac{b}{c} = \frac{ac}{b}.$$

Упражненисем.

$$144. -\frac{3x}{5a} \cdot \frac{10ab}{7x^3}; \quad \frac{1-a}{5x^3} \cdot \frac{x^2}{1-a^2}. \quad 145. \frac{4x^2y^2}{15n^4a^3} \cdot 45p^2q^2; \quad \frac{x^2-1}{3} \cdot \frac{6a}{x+1}.$$

$$146. \left(a^2 + \frac{ab}{a+b}\right) : \left(b - \frac{ab}{a+b}\right); \quad \frac{3a^2b^5c^4}{4x^2y^2z^4}; \quad \frac{4a^4b^3c^2}{3x^4y^2z^2}.$$

$$147. \frac{12a^4b^2}{5mp} : 4ab^2; \quad 81a^3b^2 : \frac{27ab^2}{5x^2y}.$$

$$148. \frac{a^2+b^2}{a^2-b^2} : \frac{5a^2+5b^2}{a+b}; \quad \left(x + \frac{xy}{x-y}\right) : \left(x - \frac{xy}{x+y}\right).$$

ТАВАТТАМЁШ СЫПЛАК,

ПЁРРЕМЁШ СТЕПЕНЬРИ УРАВНЕНИСЕМ,

1. Уравненисен пётёмёшле свойствисем.

78. Пёртанләхсемпе вёсен свойствисем. Икё числа е икё алгебралла выражение пёр-пёринпе = палләпа сыхантарсан, пёртанләх пулать. Ҙав числосене е выраженисене пёртанләх пайёсем теҗҗё; = палләран сулахай енче тарақанвине сулахай пайё, җак палләран сылтәм енче тарақанвине сылтәм пайё теҗҗё. Сәмахран:

$$a + a + a = a \cdot 3$$

пёртанләхра сулахай пайё $a + a + a$ сумма пулать, сылтәм пайё $a \cdot 3$ произведени пулать.

Пёртанләхән кашни пайне пёр саспаллипе паллә туса, эфир пёртанләхән тәп свойствисене җакән пек җырса кәтартма пулатратпәр:

а) $a = b$ пулсан, вара $b = a$, ур. кал., пёртанләх пайёсене хай вырәнәнчен улаштарса лартма юрать.

б) $a = b$ тата $b = c$ пулсан, вара $a = c$, ур. кал., икё число уйрәмән виҗҗёмёшпе тан пулсан, вёсем пёр-пёринпе тан пулаҗҗё.

в) $a = b$, тата $m = n$ пулсан, вара $a + m = b + n$ тата $a - m = b - n$, ур. кал., тан числосем җумне тан числосем хушсан е кәларсан, пёртанләх пәсәлмасть.

г) $a = b$ тата $m = n$ пулсан, вара $am = bn$ тата $\frac{a}{m} = \frac{b}{n}$, ур. кал., тан числосене тан числосем җине хутласан е пайласан, пёртанләх пәсәлмасть.

Тата җакна астуса юлма кирлө: пёртанләхән икё пайне те — 1 җине хутлани е пайлани пёртанләх пайёсен паллисене улаштарнипе пөрех. Ҙапла, $-x = -5$ пёртанләхән икё пайне те — 1 җине хутласан, $x = 5$ пулать.

79. Тожество. Икё алгебралла выражение, вёсенчи саспаллисем вырәнне кирек мәнле число лартсан та вёсен числолла пысакәшө пөрех пулсан, тождествәллә выраженисем теҗҗё. Сәмахран:

$$ab \text{ тата } ba; \quad a + (b + c) \text{ тата } a + b + c$$

тождествәллә выраженисем пулаҗҗё.

Пёр-пёр пёртанләхән икё пайё те тождествәллә алгебрәллә
выраженисем пулсан, ун пек пёртанләха *тождество* теҫсё.
Сәмахран:

$$a + b + c = a + (b + c)$$

пёртанләх — тождество пулать.

Пёртанләх пайёсенче цифрапа сырнә числосем кәна пулсан
та, пур кәтартнә действисене те тунә хыҫсән икё пайёенче те
пёрпек числосемех пулсан, әна та тождество теҫсё; сәмахран:

$$(40 \cdot 5) : 8 = 5^2.$$

80. Уравнени. Пирён ҫакән пек задача шутламалла пултәр:
ашшө 40 ҫулта, ывәлө 17 ҫулта. Тата миҫе ҫултан ашшө ывә-
лөнчен икё хут асла пулать?

Ку задачәна арифметикалла мелпе шутлама йывәр. Ҷавәнпа
әна саспаллисеме уса курса шутләпәр. Тупмалли ҫул хисепне
 x саспаллипе ҫырапәр. Тепөр x ҫултан ашшө $40 + x$ ҫулта, ывә-
лө $17 + x$ ҫулта пулать. Задача условийө тәрәх ашшө ҫулө
 $(40 + x)$ ывәлөн ҫулөнчен $(17 + x)$ икё хут пысәк пулмалла.
Эпир әна ҫакән пек пёртанләх туса ҫырапәр:

$$40 + x = 2(17 + x).$$

Төрөслесе пәхса, ку пёртанләх $x = 6$ пулсан, төрөс пулнине
куратпәр. Чәнах та x ыраңне 6 лартсан:

$$40 + 6 = 2(17 + 6); 46 = 46$$

пёртанләх пәсәлмасть. Анчах x ыраңне урәх число лартсан,
пёртанләх пәсәлать.

Ку пёртанләха тождество теме ҫук, мөншөң тесен саспаллин
кирек мөнле пёлтерөшөсемпе те мар, пёр числопа кәна пёртан-
ләх төрөс пулать. x ыраңне 6 лартсан кәна пёртанләх тож-
дествәна куҫать.

$$46 = 46.$$

Пёр саспаллилө е темиҫе саспаллилө пёртанләхән икё пайё
ҫав саспаллисен пёр числоллә пысәкәшине илсен кәна пёрпек
пулать пулсан, ун пек пёртанләха *уравнени* теҫсё. Саспалли-
семпе ҫырнә числосене уравненин *палләмар* числисем теҫсё.
Палләмар числосене латин алфавичән хыҫалти саспаллисеме
($x, y, z \dots$) ҫыраҫсө.

Уравненин палләмар хисепөсем пөрре, иккө, т. ыт. те пулаҫсө.

Уравнение шутлас тени — унән палләмар числисен
уравнение тождествәна куҫаракан пёлтерөшне тупас тени пу-
лать. Уравненин палләмар числисен ҫав пёлтерөшөсене уравнени
коренөсем теҫсө.

Пёр палләмар числоллә уравненин коренө пөрре, иккө тата
ытларах та пулма пултарать; сәмахран, $3x - 2 = 13$ уравнени
пёр коренөлө (5), $x^2 + 2 = 3x$ уравнени икө коренөлө (1 тата 2),
 $(x - 1)(x - 2)(x + 1) = 0$ уравнени виҫө коренөлө (1, 2 тата -1)¹,
т. ыт. те. Хәшпөр уравненин нимөнле коренө те пулмасть. Сә-

¹ Аса илер: пёр-пёр хутланаканни нуль пулсан, произведени те нуль пу-
лать, тепөр майлә: произведени нуль пулсан, пёр-пёр хутланаканни нуль пулать.

махран: $x^2 = -4$ урвненин коренё сук; x вырӑнне эфир кирек мёнле положительнай е отрицательнай число лартсан та, унӑн квадратё отрицательнай число пулма пултараймасть.

Пирён сӗлтерехри задача условийёсем тӑрӑх тунӑ урвненин коренё 6. Сакӑ пулать те задача ыйтӑвё сине паракан ответ. Чӑнах та, 6 сӗлтан ашшё 46 сӗлта, ывлё 23 сӗлта, урӑхла каласан, икё хут кёсёнрех пулать.

Сапла вара, хӑшпӑр задачӑсене шутламашкӑн урвнени туса сырмат тивет, савӑнпа вёсене шутлама пёлесси кирлё; вёсене шутлас тесен, урвненисен хӑшпӑр пётёмёшлё свойствисемпе паллашни питё кирлё.

Тёслёхрен, сӗлте асӑннӑ задачӑри урвнение шутлӑпӑр:

$$40 + x = 2(17 + x).$$

Урвненин сылтӑм енчи скобкисене усапӑр:

$$40 + x = 34 + 2x.$$

Урвненин икё пайёнчен те x -шер кӑларар, вара:

$$40 = 34 + x \text{ пулать.}$$

Юлашкинчен, урвненин икё пайёнчен те 34-шар кӑларар вара сапла пулать:

$$6 = x, \text{ е } x = 6.$$

Сапла вара, урвнение тёрлё майпа улӑштарса пырса x пёлтерёшне 6 тупрӑмӑр.

Эфир ытти урвненисене те сакӑн пекех шутланине малашне курӑпӑр.

Упражненисем.

149. Сак пёртанлӑхсенчен хӑшне тождество, хӑшне урвнени теме пулать:

$$\begin{aligned} x + y &= y + x; & (a - b + x)c &= ac - bc + xc; \\ 3a - 4 &= 2a + 1; & 8x + 1 &= 5x + 7; & a(bc) &= abc; \\ 2x &= x + 1; & (xy) : y &= x; & a : 2b &= \frac{a}{2} : b. \end{aligned}$$

81. Пёрпёлтерёшлё урвненисем. Пёрремёш урвненин пур коренёсем те иккёмёш урвнени коренёсем пулаççё пулсан, е тепёр майлӑ, иккёмёш урвненин пур коренёсем те пёрремёш урвнени коренёсем пулаççё пулсан, сак икё урвненине пёрпёлтерёшлё (равносильные) урвненисем теççё. Самахран:

$$x^2 + 2 = 3x \text{ тата } 3x - 2 = x^2$$

урвненисем пёрпёлтерёшлё пулаççё, мёншён тесен вёсен коренёсем пёр числосемех: 1 тата 2.

$$7x = 14 \text{ тата } x^2 + 2 = 3x$$

урвненисем пёрпёлтерёшлё мар, мёншён тесен пёрин пёр 2 корень кӑна, теприн ку кореньсёр пуçне тата тепёр корень 1 пур.

Пёр-пёр урвнение шутланӑ чухне эфир урвнени сӑнне урӑхлатса, ӑна ытти сӑмӑлрах урвненисемпе улӑштарса пырса чи

сәмәл сәмлә: $x = a$ туса ҫыратпәр; ун чухне вара ҫав a число панә уравненин коренә пулать тетпәр. Анчах нимән йәнәш тумасәр ҫакан пек калас тесен, уравненин сәнне улаштарса ҫенәрен пулакан уравненисем чәнах та малтанхипе пәрпелтерешлә пулнине пәлмелле.

Уравненисене улаштарса пыни уравненисен икә свойствипе ҫыханса тәрәть, әпир халә ҫав свойствисене пәхса тухәпәр.

82. Уравненисен пәрремеш свойстви. Сәмахран, ҫаван пек уравнени илер:

$$x^2 + 2 = 3x. \quad (1)$$

ҫак уравненин икә енне те пәр-пәр m число (положительнай, отрицательнай е нуль) хушнә пултәр; вара пирән ҫенә уравнени пулать:

$$x^2 + 2 + m = 3x + m. \quad (2)$$

ҫак уравнени панә уравненипе пәрпелтерешлә пулнине кәтартса парар. Ана пәлме, пәрремешәнчен, (1) уравнени коренәсем (2) уравненишән юрәхлә пулнине тата, иккәмешәнчен, тепәр майлә, (2) уравнени коренәсем (1) уравненишән юрәхлә пулнине пәлсен те ҫителәклә.

а) Каләпәр, (1) уравненин пәр-пәр коренә, сәмахран, $x = 1$ пултәр. Вара уравнение x вырәнне 1 лартсан $x^2 + 2$ выражени $3x$ выраженипе тан пулать (ку выраженисенчен кашниех 3 число пулать). Анчах ун чухне $x = 1$ пулсан, $x^2 + 2 + m$ тата $3x + m$ суммәсем тан пулаҫҫә, мәншән тесен тан числосем (3-пе 3) ҫумне пәр числонах (m) хушсан, тан числосем пулаҫҫә ($3 + m$ тата $3 + m$). Апла пулсан, (1) уравнени коренә $x = 1$ ҫавнашкалах (2) уравнени коренә те пулмаллә; (1) уравненин мәнле те пулин урәх корень пулсан, ун ҫинчен те ҫак корень $x = 1$ ҫинчен каланинх каламаллә; урәхла каласан, вәл та (2) уравненишән юрәхлә пулать. ҫапла ёнтә, (1) уравненин кашни коренә (2) уравненишән те юрәхлә пулать.

б) Каләпәр, (2) уравненин пәр-пәр коренә, сәмахран, $x = 2$ пултәр. Вара уравнение x вырәнне 2 лартсан, $x^2 + 2 + m$ выражени $3x + m$ выраженипе тан пулать (вәл-выраженисенчен кашниех $6 + m$ число пулать). Анчах ун чухне $x = 2$ пулсан, $x^2 + 2$ тата $3x$ выраженисем те тан пулаҫҫә, мәншән тесен тан числосенчен ($6 + m$ тата $6 + m$) пәр числонах (m) кәларсан, тан числосем пулаҫҫә. Апла пулсан, корень $x = 2$ ҫавнашкалах (1) уравненин коренә те пулать; (2) уравненин мәнле те пулин урәх корень пулсан, ун ҫинчен те ҫак корень $x = 2$ ҫинчен каланинх каламаллә, урәхла каласан, ҫак тепәр корень те (1) уравненишән юрәхлә пулать.

Апла пулсан, (2) уравненин кашни коренә (1) уравненишән те юрәхлә пулать.

(1) тата (2) уравненисен коренәсем ҫав-ҫавах пулсан, ку уравненисем пәрпелтерешлә. Ку свойство уравненин икә енчен пәр числолах кәларнә чухне те тәрәс пулать, мәншән тесен пәр-пәр числона кәларни ҫав числона хире-хирәҫ палләпа хушни пулать.

Ҷапла ёнтё, уравненин икё пайё Ҷумне те пёр числонах хушсан е вёсенчен каларсан, малтанхине пёрпёлтерёшлё Ҷёнё уравнени пулать.

83. Следствисем. Ку свойствёран Ҷакан пек следствисем тухса тараҶҶё, вёл следствисемпе уравненисене шутланё чухне час-часах усё курма тивет.

1. Уравнени членёсене, умёнчи паллисене хире-хирёҶ палла-па улаштарса, пёр енчен тепёр енне куҶарма юрать. Самахран:

$$8 + x^2 = 7x - 2$$

уравненин икё енне те 2 хушар, вара Ҷапла пулать:

$$8 + x^2 + 2 = 7x.$$

Сылтам енчи -2 член хире-хирёҶ $+$ паллапа сулахай енне куҶрё. Уравненин икё енчен те x^2 каларсан, тупатпёр:

$$8 + 2 = 7x - x^2.$$

$+x^2$ член сулахай енчен сылтём енне хире-хирёҶ паллапа куҶрё.

2. Икё пёрпек паллалла пёртан членсем уравненин тёрлё енёсенче тараҶҶё пулсан, вёл членсене пётерме те юрать. Самахран:

$$6x + 3 = x^2 + 3$$

уравненирен икё пайёнчен те 3-шер каларсан, Ҷапла пулать:

$$6x = x^2.$$

84. Уравненисен иккёмёш свойстви. Ҷав уравниенх илер:

$$x^2 + 2 = 3x. \quad (1)$$

Ҷак уравненин икё пайне те мёнле те пулин положительнай е отрицательнай число m Ҷине хутлар (анчах нуль Ҷине мар). Вара Ҷёнё уравнени пулать:

$$(x^2 + 2)m = 3xm. \quad (2)$$

Ҷак уравненисем пёрпёлтерёшлё пулнине тупса пёлме малтанхи свойство Ҷинчен каланё чухнехи пекех сётсе-явёлпёр, чанниперех, пёрремёшёнчен, (1) уравненин кирек мёнле коренё (2) уравнишиён те юрэхлине тата, иккёмёшёнчен, тепёр майла, (2) уравненин кирек мёнле коренё (1) уравнишиён те юрэхлине катартапёр.

а) Калёлпёр, (1) уравненин пёр-пёр коренё $x = 1$ пултёр. Вара уравнение x вырэнне 1 лартсан, $x^2 + 2$ выражени $3x$ выраженипе тан пулать (вёл выраженисенчен кашниех 3 число пулать). Анчах ун чухне $x = 1$ пулсан, $(x^2 + 2)m$ тата $3xm$ произведенисем те тан пулаҶҶё, мёншён тесен тан числосене (3-пе 3) пёр число m Ҷинех хутласан, тан числосемех пулаҶҶё ($3m$ тата $3m$). Апла пулсан, корень $x = 1$ Ҷавнашкалах (2) уравненин коренё те пулать. Уравненин (1) ытти пур коренёсем Ҷинчен те Ҷакнах

калама тивнѣрен, (1) уравненин кашни коренѣ (2) уравненишѣн те юрӕхлӕ пулатъ.

б) Тепѣр майлӕ шутлӕпӕр: (2) уравненин пѣр-пѣр коренѣ $x=2$ пултӕр. Вара уравнение x вырӕнне 2 лартсан, $(x^2+2)t$ тата $3xt$ произведенисем тан пулаццѣ (вѣсенчен кашниех $6t$ число пулатъ). Анчах ун чухне $x=2$ пулсан, x^2+2 тата $3x$ выраженисем те тан пулаццѣ, мѣншѣн тесен тан ($6t$ тата $6t$) числосене пѣр t число синех, нуль мар число сине, пайласан, тан числосем пулаццѣ. Апла пулсан, корень $x=2$, (2) уравненин ытти коренѣсем пекех, (1) уравненишѣн те юрӕхлӕ; савӕнпа та ку уравненисем пѣрпѣлтерѣшлѣ.

Халѣ уравненин икѣ пайне те хутланӕ t число нуль пе тан тесе шутлатпӕр. Сӕмахран, 1 тата 2 кореньсемлѣ $x^2+2=3x$ уравненин пайцсене нуль сине хутлӕпӕр; ун чухне пирѣн сѣнѣ уравнени пулатъ:

$$(x^2+2) \cdot 0 = 3x \cdot 0.$$

Ку уравненине 1 тата 2 кӕна мар, x -ӕн кирек мѣнле пѣлтерѣшѣ те юрӕхлӕ пулатъ. Сӕмахран, x вырӕнне 5, 6 т. ыт. числосем лартар:

$$(5^2+2) \cdot 0 = 3 \cdot 5 \cdot 0; \quad (6^2+2) \cdot 0 = 3 \cdot 6 \cdot 0,$$

урӕхла каласан

$$27 \cdot 0 = 15 \cdot 0; \quad 38 \cdot 0 = 18 \cdot 0,$$

е

$$0 = 0; \quad 0 = 0$$

(мѣншѣн тесен нуль сине кирек мѣнле число хутласан та произведени нуль пулатъ). Савӕнпа, нуль сине хутласан уравненин пѣрпѣлтерѣшлѣхѣ пӕсӕлать.

Сӕпла ӕнтѣ, уравненин икѣ пайне те пѣр число синех, анчах нуль мар число сине, хутласан е пайласан, малтанхипе пѣрпѣлтерѣшлѣ сѣнѣ уравнени пулатъ.

85. Следствисем. Уравненисен иккѣмѣш свойствинчен сӕкӕн пек вицѣ следстви тума пулатъ:

1. Уравнени членѣсен общи хутлаканны пулсан, вӕл хутлаканны нуль мар тата паллӕмар числоллӕ та мар пулсан, уравненин кашни членне сӕв число сине пайлама юратъ. Сӕмахран:

$$60x - 160 = 340 - 40x.$$

Пур членѣсене те 20 сине пайласан, уравнени сӕмӕлрах пулатъ:

$$3x - 8 = 17 - 2x.$$

2. Уравнени членѣсем ваклӕ пулсан, тата знаменательре паллӕмар число сук пулсан, уравнение вакран хӕтарма пулатъ.

Сӕмахран:

$$\frac{7x-3}{6} - \frac{x-5}{4} = \frac{43}{6}.$$

Пур членсене те пёр знаменательлѣ тавар:

$$\frac{14x+6}{12} - \frac{3x-15}{12} = \frac{86}{12}, \text{ e: } \frac{14x-6-(3x-15)}{12} = \frac{86}{12}.$$

Ѕак уравненин общи знаменательне пѣрахсан, уравненин икѣ пайне те пёр число џинех, нуль мар число џине (12 џине), хутлани пулать; вара малтанхи уравненипе пѣрпѣлтерѣшлѣ уравнени пулать:

$$14x - 6 - (3x - 15) = 86, \text{ e } 14x - 6 - 3x + 15 = 86.$$

3. Уравненин кашни членѣ умѣнчи палла̀на хире-хирѣс палла̀па улаштарма юрать, мѣншѣн тесен вѣл уравненин икѣ пайне те -1 џине хутланипе пѣрех. Сѣмахран, $-8 - x^2 = -7 + 2$ уравненин пайѣсене џавнашкал хутласан, $-8 + x^2 = 7 - 2$ пулать.

86. Уравненин пайѣсене пѣр алгебрѣлла выражени џинех хутлассипе пайласси. Хѣш чухне уравненин сѣнне улаштарма унѣн икѣ енне те пѣр алгебрѣлла выражени џинех хутламалла (е пайламалла) пулать (џитес параграфра ун пек тѣслѣхе куратпѣр). Уравненин икѣ пайне те хутлакан (е пайлакан) алгебрѣлла выражени нульпе тан мар пулсан кѣна џапла хутласа пулна џѣнѣ уравнени малтанхипе пѣрпѣлтерѣшлѣ пулать, мѣншѣн тесен нуль џине хутласан уравненин пѣрпѣлтерѣшлѣхѣ пѣсѣлать.

87. Ют кореньсем. Ваклѣ уравненисен знаменателѣнче палла̀мар число пулсан, ун пек уравненисене шутланѣ чухне уравненин икѣ пайне те пѣр пек алгебрѣлла выражени џине хутлама тивет. Сѣмахран, џак уравнение шутламалла пултѣр:

$$\frac{x^2}{(x-2)^2} + \frac{2}{(x-2)^2} = \frac{1}{x-2} + \frac{2x+2}{(x-2)^2}. \quad (1)$$

Кунта ваксен общи знаменателѣ, паллах, $(x-2)^2$ пулать. Пур членсене те пѣр знаменательлѣ тавар:

$$\frac{x^2}{(x-2)^2} + \frac{2}{(x-2)^2} = \frac{x-2}{(x-2)^2} + \frac{2x+2}{(x-2)^2};$$

Знаменательсене пѣрахсан, ур. кал., пур членне те $(x-2)^2$ выражени џине хутласан, џакѣн пек уравнени пулать:

$$x^2 + 2 = x - 2 + 2x + 2,$$

урѣхла каласан,

$$x^2 + 2 = 3x. \quad (2)$$

Ку уравненин икѣ корень: 1 тата 2. Анчах эфир ку кореньсем иккѣшѣ те малтанхи уравненишѣн те юрѣхлѣ тесе калама пултараймастпѣр, мѣншѣн тесен вѣл уравненин икѣ пайне те $(x-2)^2$ выражени џине хутламалла пулчѣ; $x = 2$ пулсан, $(x-2)^2$ выражени нульпе тан пулать, анчах нуль џине хутланѣран уравненисен пѣрпѣлтерѣшлѣхѣ пѣсѣлма пултарать.

Ѕавѣнпа 1 тата 2 кореньсем (2) уравненишѣн кѣна мар, тата (1) уравненишѣн те юрѣхлѣ пулнине тѣрѣслесе пѣхмалла пулать. $x = 1$ корень (1) уравненишѣн юрѣхлѣ:

$$\frac{1^2}{(1-2)^2} + \frac{2}{(1-2)^2} = \frac{1}{1-2} + \frac{2 \cdot 1 + 2}{(1-2)^2},$$

$$\frac{1}{(-1)^2} + \frac{2}{(-2)^2} = \frac{1}{-1} + \frac{2+2}{(-1)^2},$$

$$1 + 2 = -1 + 4, \text{ урэхла каласан, } 3 = 3.$$

Анчаг тепёр коренё $x = 2$ (1) уравненишён юрэхсэр, мёншён тесен $x = 2$ пулсан, уравнени хайён пёлтерёшне сүхатать;

$$\frac{4}{0} + \frac{2}{0} = \frac{1}{0} + \frac{6}{0}$$

(нуль сине пайлама сүк).

Сапла ёнтё, эфир куратпяр, паня уравненири ваксен знаменателёсенче палләмар число пулсан, вара ун пек знаменательсенчен хйталма уравнени икё пайне те общи знаменатель сине хутларамяр пулсан, пулня уравнени коренёсене тупня хысқан, вёсем хушшинче ют кореньсем пуррипе-сүккине малтанхи уравнение лартса сйнаса пяхмалла.

Уравнени икё пайне те палләмар числоллә алгебралла выражени сине пайласан, эфир уравнени хашпёр коренёсене сүхатма пултаратпяр. Самахран:

$$(2x + 3)(x - 3) = (3x - 1)(x - 3)$$

уравнени икё пайне те $x - 3$ сине пайласан, сёне уравнени тупатпяр:

$$2x + 3 = 3x - 1,$$

ку уравнени малтанхипе пёрпёлтерёшлө мар, мёншён тесен ку уравнени пёр корень кйна: $x = 4$, малтанхи уравнени икё корень: $x = 4$ тата $x = 3$.

II. Пёр палләмар числоллә уравнени.

88. Пёрремёш степеньлө пёр палләмар числоллә уравненисене шутласси. Пёрремёш степеньлө пёр палләмар числоллә уравненисене мёнле шутлассине сак икё төслөхе илсе кятартса парар.

1. Сак уравнение шутламалла пултяр:

$$3x + 2(4x - 3) = 5(x + 2) - 4.$$

Скобкасене усар:

$$3x + 8x - 6 = 5x + 10 - 4.$$

Палләмар числоллә членсене сулахай ене, паллә членёсене сылтәм ене кусарар (уравненисен пёрремёш свойствин следствине пях):

$$3x + 8x - 5x = 10 - 4 + 6.$$

Пёрёвөрлө членсене пёрлештерер:

$$6x = 12.$$

Юлашкинчен, уравненин икё пайне те 6 сине пайлатпър (уравненисен иккёмёш свойстви тәрәх). Татаклянах тупатпър:

$$x = 2.$$

Уравнение шутланә чухне пирён пёр-пёр йәнәш пулни-пулманнине пёлме шутланине тёрёслесе пәхмалла. Ана тёрёслес тесен, шутласа тупнә корене малтанхи уравнение x вырәнне лартса, уравненире кәтартнә действисене тәвас пулать. Вара, уравненирен тождество пулсан, кореньне тёрёс тупнә пулать. Пирён тәсләхре:

$$3 \cdot 2 + 2(4 \cdot 2 - 3) = 5(2 + 2) - 4,$$

e

$$16 = 16.$$

Шутлани тёрёсех пулнә.

2. Çак уравнение шутламалла пултәр.

$$\frac{3x-4}{2} + \frac{3x+2}{5} - x = \frac{7x-6}{6} - 1.$$

Пур членёсене те пёр знаменателе кўрер, вәл 30 пулать:

$$\frac{15(3x-4)}{30} + \frac{6(3x+2)}{30} - \frac{30x}{30} = \frac{5(7x-6)}{30} - \frac{30}{30}.$$

Уравненин кашни членне 30 сине хутлатпър (урәхла каласан, общи знаменательне пәрахатпър):

$$15(3x-4) + 6(3x+2) - 30x = 5(7x-6) - 30.$$

Скобкәсене уçатпър:

$$45x - 60 + 18x + 12 - 30x = 35x - 30 - 30.$$

Палләмар числоллә членсене сулахай енне, паллә членёсене сылтәм енне куçаратпър:

$$45x + 18x - 30x - 35x = 60 - 12 - 30 - 30.$$

Пёрьевёрлө членсене пёрлештеретпёр:

$$-2x = -12.$$

Икё енне те палләмар число умёнчи коэффициент сине пайлатпър (числосем положительнәй пулма малтан икё енне те -1 сине хутлама юрать):

$$x = \frac{-12}{-2} = \frac{12}{2} = 6.$$

Шутланине тёрёслесе пәхар:

$$\frac{3 \cdot 6 - 4}{2} + \frac{3 \cdot 6 + 2}{5} - 6 = \frac{7 \cdot 6 - 6}{6} - 1; \quad 7 + 4 - 6 = 6 - 1; \quad 5 = 5.$$

Шутланә тәсләхсем тәрәх, пёрремёш степеньлө пёр палләмар числоллә уравненине шутламалли йёркене çапла сьрма пултартпәр:

1. Уравнение ваклә членсенчен хәтармалла.

2. Скобкәсене уçмалла.

3. Палләмар числолла членсене пәр ене, паллә членёсене тепәр ене кусармалла.

4. Пәрвевёрлө членсене пәрлештермелле.

5. Уравнения икё пайне те палләмар число умёнчи коэффициент сине пайламалла.

Малалла, шутласа тупнә числона малтанхи уравнение лартса, шутланине тәрәслемелле.

Паллах, уравнения мёнле пулнине кура, сакан пек яланах пек тәрлө операци тума кирлө те пулмасть.

А сәрхаттарни. Уравнение шутланч чухне малтанхи таватә операцие туса пётерсен, уравнения кашни енге пәрер член юлат: сулахайра — палләмар числолла член, сылтәмра — паллә член. Ку уравнения пётёмөшле формине сәпла сьрма пулат:

$$ax = b,$$

кунта a тата b саспаллисем положительнәй, отрицательнәй число е нуль пулма пултараçсө. Сакан пек уравнение пәрремөш степенлө пәр палләмар числолла уравнения нормальнәй сәнө теçсө.

Упражнениясем.

Сак уравнениясене шутлар:

150. $2x + 1 = 35$; $19 = 4 + 3y$; $7y - 11 = 24$.

151. $3x + 23 = 104$; $89 = 11y - 10$; $38 = 2 + 3x$.

152. $3x = 15 - 2x$; $4x - 3 = 9 - 2x$; $5x + \frac{1}{4} = 3 - \frac{1}{2}$.

153. $2,5x - 0,86 = 4 + 0,7x$; $29 + 2x = (x - 7) \cdot 3$.

154. $x - 7 = \frac{3x + 13}{20}$; $-x = 3$; $-2x = 8$.

155. $\frac{2x + 1}{2} = \frac{7x + 5}{8}$; $x + \frac{11 - x}{3} = \frac{20 - x}{2}$.

156. $x + \frac{3x - 9}{5} = 11 - \frac{15x - 12}{3}$.

157. $3x - 4 - \frac{4(7x - 9)}{15} = \frac{4}{5} \left(6 + \frac{x - 1}{3}\right)$.

158. $2x - \frac{19 - 2x}{2} = \frac{2x - 11}{2}$

159. $\frac{x - 1}{7} + \frac{23 - x}{5} = 2 - \frac{4 + x}{4}$.

89. Уравнения тавасси синачен. Арифметикалла майсемпе шутлама йывәр е пачах шутлама сук задачәсене уравнения сәмәлләнах шутлама пулат. Кун пек шутлас пулсан, задача ответне тупмалли уравнение тума кәна пөлмелле. Уравнениясем тумалли пётёмөшле формула кәтартса пама сук; мөншөн тесен задача условийәсем тәрлөрен пулаçсө. Задачән панә условийәсем тәрәх уравнениясене мөнле тумалли хәшпәр пётёмөшле тәслөхсене кәна кәтартса пама пулат. Чәннипе каласан, задачәсене уравнения туса шутлассине практикәра сөç хәнәхса ситме пулат.

Уравнения тумалли йөркөсене тәслөх илсе әнлантарса парәпәр.

Задача. Вѣренекенсем валли хулам тетрадьсем тата сѹхе тетрадьсем пурѣ 80 штук илнѣ. Хулам тетрадь 35 пус, сѹхе тетрадь 4 пус тарать. Пѣтѣмпе 9 тенкѣ те 40 пус тѹленѣ пулсан, миѣ хулам тетрадь тата миѣ сѹхе тетрадь илнѣ?

1. Паллăмар пысăкăшсенчен хăшне x -па сьрасине йышăнатпăр.

Пирѣн задачăра паллăмар число иккѣ: хулам тетрадьсен хисепѣ тата сѹхе тетрадьсен хисепѣ. Сăмахран, хулам тетрадьсен хисепне x тейепѣр. Пѣтѣмпе 80 тетрадь пулна пирки сѹхе тетрадьсен хисепѣ 80 — x пулать.

Хулам тетрадьсен хисепѣ	x
Сѹхе	" " 80 — x .

2. Задачăн пѣтѣм условине x -па тата панă числосемпе математикăлла сьхăнтарса сьрар.

Пирѣн задачăра хулам тетрадьсем 35 пус, сѹхе тетрадьсем 4 пус тарасѣ тенѣ. Сапла вара, эфир хулам тетрадьсемшѣн тата сѹхе тетрадьсемшѣн уйрăммăн мѣн чухлѣ тѹленѣ, тесе ытту лартма пултаратпăр (мѣншѣн тесен задачăра пѣтѣм тетрадьсен хакне кăтартнă).

Хулам тетрадьсен хакѣ	$35x$ пус.
Сѹхе	" " 4(80 — x) пус.
Пѣтѣмпе	" " 9 тен. 40 пус.

3. Уравнени тăватпăр.

Задачăра тетрадьсемшѣн пурѣ 9 т. 40 пус тѹленѣ тесе каланă, саванпа хулам тетрадьсемшѣн тѹленипе $35x$ сѹхе тетрадьсемшѣн $4(80 - x)$ тѹленин сумми шăпах 9 т. 40 пус пулать:

$$35x + 4(80 - x) = 940.$$

Ку уравнение шутласан, $x = 20$ тупатпăр.

Эфир x -па хулам тетрадьсен хисепне кăтартрăмăр. Сапла ѣнтѣ, хулам тетрадьсене 20 штук илнѣ, сѹхисене $80 - 20 = 60$ тетрадь илнѣ.

Уравнени тума миѣ число кирлѣ, задачăра саван чухлѣ панă число пулать. Саванпа та уравнени тунă хьсѣн, задачăри пур панă числосем те епле те пулин формăра уравнение кѣнипе кѣменнине пăхса тухни усăллă пулать.

Упраженисем.

160. Икѣ число сумми 2548, вѣсенчен пѣри тепринчен 148-па пѣчѣкрех. Сав числосене тупăр.

161. Виѣ хушăнакан числосен сумми 100; иккѣмѣш хушăнаканни пѣрремѣшѣнчен 10-па пысăкрах, виѣсѣмѣш хушăнаканни иккѣмѣшѣнчен 20-пе пысăкрах. Сав хушăнакансене тупăр.

162. Юланутлă сын сехетре 10 км каять, суран сын сехетре 4 км каять. Суранни юланутлинчен 15 км малта пулсан, юланутли апа миѣ сехетрен хăваласа ситет?

163. Икѣ сорт чей хутăштарса 32 кг хутăш тунă. Пѣрремѣш сортăн килограмѣ 8 тенкѣ, иккѣмѣшѣн килограмѣ 6 тен. 50 пус пулна. Хутăштарнă чейѣн килограмѣ 7 тен. 10 пус тарать пулсан, кашни сорти миѣшер килограмм хутăштарнă?

164. Велосипедист пѣр хушша сехетне 8 км хавѣртлѣхпа кайнѣ. Каялла унѣн тепѣр сѣуппа таврѣнмалла пулнѣ. Ку сѣулѣ малтанхи сѣулѣнчен 3 км вѣрѣм-рах. Каялла килнѣ чух сехетне 9 км тунѣ пулин те, вѣхѣчѣ $7\frac{1}{2}$ минута ыгла-рах тухнѣ. Кашни сѣулѣ мѣн тѣршшѣ пулнѣ-ши?

90. Саспаллилѣ уравненисем. Паллах, паллѣмар числосене ялан x саспаллипе сѣрмасан та юратъ, ѣна кирек мѣнле урѣх саспаллипе те сѣрма пулатъ. Сѣмѣхран сѣкѣн пек формула илер:

$$s = \frac{1}{2}bh,$$

вал треугольник лаптѣкне шутламалли формула пулса тѣратъ, кунта треугольник тѣпѣ b линиллѣ единицѣпа, сѣллѣшѣ h линил-лѣ единицѣпа тав пулатъ. Ку формула уравнени пулса тѣратъ, кунта s , b , h саспаллисенчен кашниех паллѣмар число пулма пултара тѣ. Калѣпѣр, сѣкѣн пек задача панѣ пултѣр: треугольник сѣллѣшѣ h линиллѣ единицѣпа тав, лаптѣкѣ s , треугольник тѣпне тупмалла. Вара пирѣн формулѣра b паллѣмар число, s тата h паллѣ числосем пула сѣсѣ. Паллах, эфир треугольникѣн паллѣмар тѣпне x саспаллипе паллѣ туса, сѣпла уравнени сѣрма пулта-ратпѣр:

$$s = \frac{1}{2}hx,$$

кунтан вара

$$x = s : \frac{1}{2}h = 2s : h = \frac{2s}{h}.$$

Анчах b саспалли вярѣнне x сѣрмасан та, b пысѣкѣшне $s = \frac{1}{2}bh$ уравненирен тѣрех тупма пултара тѣпѣр:

$$s = \frac{1}{2}bh; \quad 2s = bh; \quad b = \frac{2s}{h}.$$

Тѣрѣсрех каласан, числ ол лѣ уравненисене, вѣсенче паллѣ числосене цифрѣсемпе, паллѣмар числona x саспаллипе кѣтар тнѣ чухне сѣс мар, саспаллиллѣ уравненисене те, вѣсенче панѣ числисемпе паллѣмаррисене те тѣрлѣ саспаллисемпе кѣтар тнѣ чухне шутлама хѣнѣхасси кирлѣ.

Тѣслѣхсем:

$$1. a + bx = c. \quad 2. a(x - c) = b(x + d);$$

$$bx = c - a. \quad ax - ac = bx + bd;$$

$$x = \frac{c - a}{b}. \quad ax - bx = bd + ac;$$

$$x(a - b) = bd + ac;$$

$$x = \frac{bd + ac}{a - b}.$$

$$3. \frac{y}{a} - y = b; \quad 4. \frac{x}{a} + \frac{x}{b} = 1;$$

$$y - ay = ab; \quad bx + ax = ab;$$

$$y(1 - a) = ab; \quad x(b + a) = ab;$$

$$y = \frac{ab}{1 - a}. \quad x = \frac{ab}{a + b}.$$

Упражненисем.

165. $(a+x)(b+x) = (a-x)(b-x)$.

166. $(x-a)(x+b) + c = (x+a)(x-b)$.

167. $a+bx=4-3(a-x)$ уравненирен a тата b тѣлѣшѣнчен x мѣн чухлѣ пулнине тупӑр.

168. Трапеци тѣпѣсем b_1 тата b_2 , сѳуллѣшѣ h . Трапецин q лаптӑкне сак формулапа пѣлессѣ: $q = \frac{1}{2}(b_1 + b_2)h$. Кунтан q , b_1 тата b_2 тѣлѣшѣнчен h мѣн чухлѣ пулнине тупӑр.

III. Пѣрремѣш степеньлѣ уравнинисен системи.

Икѣ паллӑмар числолла икѣ уравни системи.

91. Задача. Опыт туса сакна пѣлнѣ: пӑхӑрпа кѣмѣлтен шӑратса тунӑ 148 кг туртакан чӑмӑркка шывра хӑйѣн йывӑрӑшне $14\frac{2}{3}$ кг сѳухатать. Шывра 21 кг кѣмѣл йывӑрӑшѣнчен 2 кг, 9 кг пӑхӑр йывӑрӑшѣнчен 1 кг сѳухалать пулсан, сав чӑмӑрккара мѣн чухлѣ кѣмѣл тата мѣн чухлѣ пӑхӑр пулатъ?

Сак чӑмӑрккара кѣмѣл x килограмм, пӑхӑр y килограмм пултӑр. Вара пѣр уравненийѣ сакӑн пек пулатъ:

$$x + y = 148.$$

Тепѣр уравни тума сакна шута илетпѣр: 21 кг кѣмѣл шывра 2 кг сӑмӑлланать пулсан, ку вара 2 кг кѣмѣл шывра $\frac{2}{21}$ кг сӑмӑлланнине пѣлтерет. Вара x кг кѣмѣл шывра $\frac{2}{21}x$ килограмм сӑмӑлланать.

Савна евѣрлех, 9 кг пӑхӑр шывра 1 кг сӑмӑлланать пулсан, ку вара 1 кг пӑхӑр шывра $\frac{1}{9}$ кг сӑмӑлланнине пѣлтерет. Сапла вара y килограмм пӑхӑр $\frac{1}{9}y$ кг сӑмӑлланать.

Савӑнна та, иккѣмѣш уравни сапла пулатъ:

$$\frac{2}{21}x + \frac{1}{9}y = 14\frac{2}{3}.$$

Сапла ѣнтѣ, пирѣн икѣ паллӑмар числолла икѣ уравни пулчѣ:

$$x + y = 148 \text{ тата } \frac{2}{21}x + \frac{1}{9}y = 14\frac{2}{3}.$$

Иккѣмѣш уравнин вакѣсене пѣтерсе, уравнение сӑмӑлрах сырма пулатъ. Савӑнна пур ваксене те пѣр знаменательлѣ тӑвӑпӑр.

$$\frac{6}{63}x + \frac{7}{63}y = \frac{924}{63}.$$

Халѣ уравнин икѣ пайне те 63 сине хутласан, унпа пѣрпѣлтерѣшлѣ сѣнѣ уравни пулатъ:

$$6x + 7y = 924.$$

Пирѣн ѣнтѣ икѣ уравнени пур:

$$x + y = 148 \text{ тата } 6x + 7y = 924.$$

Ку икѣ уравнение эфир темиѣе тѣрлѣ те шутлама пултаратпѣр. Сѣмахран, пѣрремѣш уравненин x -не y урлѣ тупар.

$$x = 148 - y.$$

Иккѣмѣш уравненири x -па y саспаллисем пѣрремѣш уравненири пысѣкѣшсенех пѣлтернѣ пирки, иккѣмѣш уравненире x вырѣине 148 — y разноѣе лартма пултаратпѣр:

$$6(148 - y) + 7y = 924.$$

Халѣ ѣак пѣр паллѣмар числоллѣ уравнение шутласа кѣларар:

$$888 - 6y + 7y = 924; \quad y = 924 - 888 = 36.$$

Вара:

$$x = 148 - 36 = 112.$$

Ѣапла ѣнтѣ, задачара кѣтартнѣ чѣмѣрккара 112 кг кѣмѣл, 36 кг пѣхѣр пулнѣ.

92. Пѣрремѣш степенлѣ икѣ паллѣмар числоллѣ уравненин нормальнѣй сѣнѣ. Икѣ паллѣмар числоллѣ уравненин ѣакѣн пек тѣслѣхне илер:

$$2(2x + 3y - 5) = \frac{5}{8}(x + 3) + \frac{3}{4}(y - 4).$$

Ку уравнение ѣмѣлрах тѣвас тесе, ѣна пѣр паллѣмар числоллѣ уравнение улѣштарнѣ йѣркепех улѣштарса пырар:

1. Скобкѣсене уѣар:

$$4x + 6y - 10 = \frac{5}{8}x + \frac{15}{8} + \frac{3}{4}y - 3.$$

2. Пур членне те 8 ѣине хутласа, знаменательсене пѣтерер:

$$32x + 48y - 80 = 5x + 15 + 6y - 24.$$

3. Паллѣмар членсене пѣр енне, паллѣ членсене тепѣр енне куѣрар:

$$32x + 48y - 5x - 6y = 15 - 24 + 80.$$

4. Пѣрьеверлѣ членсене пѣрлештерер:

$$27x + 42y = 71.$$

Ѣапла ѣнтѣ, панѣ уравнение ѣакнашкѣл улѣштарса пырса, уравненин сулахѣй енче икѣ член кѣна юлчѣ: пѣр паллѣмар число x (пѣрремѣш степенлѣ) тата тепѣр паллѣмар число y (пѣрремѣш степенлѣ); сылтѣм енче пѣр паллѣ член кѣна пулчѣ. x -па y коѣфициенчѣсем иккѣш те положительнѣй (ѣак тѣслѣхри пек) е иккѣш те отрицательнѣй (пур членне те -1 ѣине хутласан, вѣл малтанхи тѣслѣхренех пулатѣ), е пѣри положительнѣй, тепри отрицательнѣй пулма пултараѣѣ; сылтѣмра тѣракан член е положительнѣй (ѣак тѣслѣхри пек), е отрицательнѣй, е нуль те

пулма пултарать. x -па у ϕ мёнчи коэффициентсене a -па b саспаллисемпе, паллә членне c саспаллипе паллә туса, эфир пёрремёш степеньлэ икё палләмар числолла уравнини пётёмёшле форми не ϕ апла катартма пултаратпяр:

$$ax + by = c.$$

Уравнини ϕ ак сәнне пёрремёш степеньлэ икё палләмар числолла уравнини *нормальной* сәнэ те ϕ сё.

93. Икё палләмар числолла пёр уравнении палләмарләхё. Икё палләмар числолла пёр уравнение вёсёмсёр нумай тёрлэ шутлама пулать. Чаных та, пёрремёш палләмар число вырәнне пёр-пёр ирёклё число илсе уравнение лартсан, пирён пёр палләмар числолла уравнини пулать, вара уравнение шутласа ϕ ав иккёмёш палләмар числона тупма пулать. Пёрремёш палләмар число вырәнне пёр-пёр урэх число лартсан, иккёмёш палләмар число вырәнёнче тепёр ϕ ёнё число пулать, малалла та ϕ аплах. ϕ апла вара, ку уравнение эфир темён тёрлэ те шутлама пултаратпяр.

Сәмахран, пире ϕ акән пек задача павя пултяр: танураллә треугольникён периметрё 40 м, унән енёсене тупмалла. ϕ ак треугольник тепён тяршшёне x саспаллипе тата кашни аяк енён тяршшёне y саспаллипе паллә туса, эфир ϕ акән пек уравнени ϕ ырма пултаратпяр: $x + 2y = 40$.

x вырәнне пёр-пёр ирёклё число, сәмахран, 10 илөпёр. Вара: $10 + 2y = 40$, $2y = 30$, $y = 15$ пулать. Апла пулсан, треугольникән тепё 10 м чухне, кашни аяк енё 15-шер м пулмалла. Халё x вырәнне мёнле те пулин урэх число, сәмахран, 8 илөпёр. Вара $2y = 32$, $y = 16$ пулать. ϕ апла ёнтё эфир вёсёмсёр нумай тёрлэ шутлама пултаратпяр, ϕ аванпа та ку уравнениипе задача татякля пулмасть.

94. Уравнинисен системи. Уравнинисенчи x , y ... саспаллисем ϕ ак пур уравниисемшён те пёр числонах пёлтерес ϕ ё пулсан, вара теми ϕ е уравнени система пулса тярать теме йышяннй. Сәмахран, ϕ ак икё уравниире

$$\begin{cases} 2x - 5 = 3y - 2; \\ 8x - y = 2y + 21 \end{cases}$$

x саспалли иккёшёнче те пёр числонах, ϕ аван пекех y саспалли те пёр числонах пёлтерет пулсан, ϕ ав уравниисем система пулса тярас ϕ ё. Уравниисене пёр задача условийё тярэхых тусан яланах система пулать.

Пёрремёш степеньлэ икё палләмар числолла икё уравненини системине шутламалли икё мелне катартса паратпяр.

95. Вырәнне лартса шутламалли мел. Ку мелпе малтанах кёмёлпе пяхяр чямяркки ϕ инчен задача шутланя чухне уса куртямяр.

Халё ёнтё йывяртарах тёслёх илер.

$$8x - 5y = -16; \quad 10x - 3y = 17.$$

(Ку уравниисене иккёшне те *нормальной* сәна күйё).

Пёр уравнири, сѣмахран, пѣрремѣш уравнири, пѣр-пѣр паллѣмар числона, сѣмахран у-а, теприн урлѣ тупатпѣр:

$$y = \frac{8x + 16^1)}{5}.$$

Пѣрремѣш уравнири паллѣмар числосен пѣлтерѣшѣсем иккѣмѣш уравнишѣн те юрѣхлѣ пулма тивѣс пирки, у-ѣн тупнѣ пѣлтерѣшне иккѣмѣш уравнение у вырѣнне лартма пултаратпѣр, вара пирѣн пѣр паллѣмар х-лѣ уравнири пулать:

$$10x + 3 \cdot \frac{8x + 16}{5} = 17.$$

Сѣк уравнение шутлѣпѣр:

$$10x + \frac{24x + 48}{5} = 17; \quad 50x + 24x + 48 = 85, \quad x = \frac{1}{2}.$$

Вара:

$$y = \frac{8x + 16}{5} = \frac{4 + 16}{5} = 4.$$

Сѣкнашкалах пѣр уравнирирен у урлѣ х пѣлтерѣшне тупса, пулнѣ выражение тепѣр уравнири х вырѣнне лартма пулать; вара пирѣн у паллѣмар числоллѣ уравнири пулать.

Ку мелпе шутлама пуринчен ытла пѣр-пѣр паллѣмар число умѣнчи коѣфициент 1 пулсан аван. Ун пек чухне сѣв паллѣмар числона теприн урлѣ тупма лайѣх (коѣфициент сѣне пайламалла пулмасть). Сѣмахран:

$$\begin{cases} 3x - 2y = 11; \\ 4x + y = 22. \end{cases}$$

Иккѣмѣш уравнирирен тупатпѣр: $y = 22 - 4x$.

Вара пѣрремѣш уравнение сѣпла шутлатпѣр:

$$3x - 2(22 - 4x) = 11; \quad 3x - 44 + 8x = 11; \quad 11x = 44 + 11 = 55;$$

$$x = \frac{55}{11} = 5; \quad y = 22 - 4 \cdot 5 = 2.$$

Правило. Икѣ паллѣмар числоллѣ икѣ уравнири системине вырѣнне лартса шутламалли мелпе шутлас тесен, пѣр-пѣр уравнири пѣр паллѣмар числине тепѣр паллѣмар число урлѣ сѣхѣнтарса сѣрмалла та, пулнѣ выражение тепѣр уравнение лартмалла; вара пѣр паллѣмар числоллѣ уравнири пулать. Ку уравнение шутласа сѣв паллѣмар числона тупассѣ. Тупнѣ числона малтанхи паллѣмар число валли сѣрнѣ выражение лартса, тепѣр паллѣмар числине те тупассѣ.

96. Алгебрѣлла хушса шутламалли мел. Панѣ уравнирисен системинче (нормальнѣй сѣна кѣнѣскерѣнче) пѣр-пѣр паллѣмар числона, сѣмахран у-ѣн, коѣфициенчѣсем палисемпе кѣна уйрѣм тѣрассѣ тесе калѣпѣр. Сѣмахран, сѣкѣн пек система панѣ пултѣр:

¹⁾ Ку формулѣна тупма эфир $-5y$ члена сылтѣм енне, -16 члена сулахай енне кусартѣмѣр, унган икѣ пѣйне те 5 сѣне пѣйларѣмѣр та уравнири пѣйѣсен вырѣнѣсене улѣштарса лартрѣмѣр. Сѣк улѣшѣнусене ѣшра тумѣ вѣрени кирилѣ.

$$\begin{cases} 7x - 2y = 27; \\ 5x + 2y = 33. \end{cases}$$

Эпир пѣлетпѣр, тан числосем ъмне тан числосем хушсан (е кѣларсан), тан числосем пулаѣѣ. Ѣавѣнна панѣ уравненисен сулахай енѣсене пѣр-пѣринпе тата сылтам енѣсене пѣр-пѣринпе хушсан (е кѣларсан), пѣртанлѣх палли = пасѣлмасть (кѣна кѣс-кен ѣапла калаѣѣ: уравненисен членѣсене хушма та, кѣларма та юрать, теѣѣ).

Ѣакна асра тытса, панѣ уравненисене хушѣпѣр; вара — $2y$ членпа + $2y$ член пѣр-пѣрне пѣтереѣѣ те, паллѣмар x числолла уравнени пулса юлать:

$$\begin{cases} 7x - 2y = 27 \\ 5x + 2y = 33 \end{cases} \\ 12x = 60, \text{ кунтан } x = 5.$$

Вара панѣ уравненисенчен пѣрне x вырѣнне ѣак тупѣннѣ числона 5-е лартсан, y тупатпѣр:

$$7 \cdot 5 - 2y = 27; \quad 35 - 2y = 27; \quad 35 - 27 = 2y; \quad 8 = 2y; \quad y = 4.$$

Уравненирен кѣлармалли членсен коѣфициенчѣсен абсолютлѣ пысѣкашѣсем те, паллисем те пѣрпек пулсан, пѣр уравненинчи кашви член умѣнчи паллѣна хире-хирѣѣ паллѣпа улѣштарса, халѣ кѣна пѣхса тухнѣ тѣслѣхри пек тума пулать. Ѣакѣн пек система панѣ пултѣр:

$$\begin{cases} 3x - 5y = 8; \\ 3x + 7y = 32. \end{cases}$$

Кунта x умѣнче икѣ уравненийѣнче те пѣр коѣфициентах тѣ-рять, ѣавѣнна эпир, калѣпѣр, пѣрремѣш уравненинне, паллисене хире-хирѣѣ паллѣпа улѣштаратпѣр (урѣхла каласан, уравненин икѣ пайне те — 1 ѣине хутлатпѣр), унтан уравненисене хушатпѣр ¹⁾:

$$+ \begin{cases} -3x + 5y = -8 \\ 3x + 7y = 32 \end{cases} \\ \hline 12y = 24, \quad y = 2, \\ 3x + 7 \cdot 2 = 32; \quad 3x = 32 - 14 = 18; \quad x = 6.$$

Халѣ коѣфициенчѣсем пѣрпек мар системѣна илѣпѣр, сѣмахран

$$\begin{cases} 7x + 6y = 29; \\ -5x + 8y = 10. \end{cases}$$

Кун пек чухне эпир пѣр-пѣр паллѣмар число умѣнчи коѣфициентсен, сѣмахран, x коѣфициенчѣн абсолютлѣ пысѣкашѣсене пѣрпеклетме пултаратпѣр. Вѣсене пѣрпеклетме 7-пе 5 ѣине пайланакан чи пѣчѣк число тупатпѣр (вѣл 35 пулать); вара кашви уравненин икѣ пайне те коѣфициентсене танлаштаракан число ѣине хутлатпѣр (ваксене общи знаменательлѣ тунѣ чухнехи пек):

¹⁾ Паллах, уравненин пур членѣсен умѣнчи паллѣсене те хире-хирѣѣ паллѣсемпе улѣштарса, кѣйран тепѣр уравнени членѣсем ѣмне хушни — ѣав уравнени членѣсене тепѣр уравнени членѣсенчен кѣларнипе пѣрех пулать.

$$\begin{cases} 7x + 6y = 29 \text{ (5 \u0448\u0438\u043d\u0435);} \\ -5x + 8y = 10 \text{ (7 \u0448\u0438\u043d\u0435),} \end{cases} \quad \begin{cases} 35x + 30y = 145; \\ -35x + 56y = 70, \end{cases}$$

хал\u0435 \u044d\u043d\u0442\u0435 малтанхи т\u0435сл\u0435\u0445 пекех пулч\u0435.

Правило. Ик\u0435 палл\u0430мар числолл\u0430 ик\u0435 уравненин системине алгебр\u0430лла хушмалли мелпе шутлас тесен, малтан уравненири п\u0435р-п\u0435р палл\u0430мар число ум\u0435нчи ко\u0435фициентсен абсолютл\u0430 пыс\u0430к\u0430\u0448\u0435\u0441ене п\u0435рпеклетмелле, тата \u0449ав палл\u0430мар числосен ум\u0435нчи палл\u0430сем п\u0435рпек пулсан, п\u0435р уравненири членсен ум\u0435нчи палл\u0430сене хире-хир\u0435\u0449 палл\u0430семпе ул\u0430штармалла. \u0429ак уравненисене хушсан, п\u0435р палл\u0430мар числолл\u0430 уравнени пулат\u044c, \u0430на шутласан, \u0449ав палл\u0430мар числа тупа\u0449\u0449\u0435. Тупн\u0430 числа пан\u0430 уравненисенчен п\u0435рине лартса, теп\u0435р палл\u0430мар числа тупа\u0449\u0449\u0435.

97. Саспалли ко\u0435фициентл\u0430 уравненисен системи. Х\u0430ш чухне ко\u0435фициент\u0448ене саспаллипе \u0449ырн\u0430 уравненисен системине шутламалла пулат\u044c. С\u0430махран \u0449ак уравнение шутламалла пулт\u0430р:

$$\begin{cases} ax + by = c; \\ a'x + b'y = c'. \end{cases}$$

Ку систем\u0430на \u0435пир числосемпе \u0449ырн\u0430 ко\u0435фициентл\u0430 уравненисене шутлама к\u0430тартн\u0430 ик\u0435 мел\u0435нчен кирек х\u0430шинпе те шутлама пултаратп\u0430р. Ку т\u0435сл\u0435\u0445ре алгебр\u0430лла хушса шутлама лай\u0430храх, ур\u0430хла каласан, п\u0435р уравненин член\u0448ем ум\u0435нчи палл\u0430сене хире-хир\u0435\u0449 палл\u0430семпе ул\u0430штаратп\u0430р, п\u0435р-п\u0435р палл\u0430мар число ум\u0435нчи, с\u0430махран y ум\u0435нчи, ко\u0435фициентсен абсолютл\u0430 пыс\u0430к\u0430\u0448\u0435\u0441ене п\u0435рпеклететп\u0435р, унтан уравненисене хушатп\u0430р:

$$\begin{array}{l} ax + by = c \\ -a'x - b'y = -c' \end{array} \left| \begin{array}{l} b' \\ b \end{array} \right| \begin{array}{l} ab'x + bb'y = b'c \\ -a'bx - bb'y = -bc' \end{array} \left| \begin{array}{l} ab' - a'b \\ (ab' - a'b)x \end{array} \right| \begin{array}{l} = b'c - bc' \\ = b'c - bc' \end{array},$$

$ab' - a'b \neq 0$ пулсан, кунтан тупатп\u0430р:

$$x = \frac{b'c - bc'}{ab' - a'b}.$$

\u0429ав\u0430н пекех y -е тупатп\u0430р

$$\begin{array}{l} ax + by = c \\ -a'x - b'y = -c' \end{array} \left| \begin{array}{l} a' \\ a \end{array} \right| \begin{array}{l} aa'x + a'by = a'c \\ -aa'x - ab'y = -ac' \end{array} \left| \begin{array}{l} aa' - a'a \\ (a'b - ab')y \end{array} \right| \begin{array}{l} = a'c \\ = a'c - ac' \end{array},$$

кунтан:

$$y = \frac{a'c - ac'}{a'b - ab'}.$$

Упражненисем.

169. Выр\u0430нне лартса \u0449ак уравненисен системине шутл\u0430р:

$$\begin{cases} y = 2x - 3; \\ 3x + 2y = 8. \end{cases} \quad \begin{cases} 5x + y = 3; \\ 3x - 2y = 7. \end{cases} \quad \begin{cases} 3x - 5y = 6; \\ x + 4y = -15. \end{cases}$$

170. \u0429ак систем\u0430сене алгебр\u0430лла хушса шутл\u0430р:

$$\begin{cases} 4x + 7y = 5; \\ -2x + 5y = 6. \end{cases} \quad \begin{cases} 3x + 5y = 20; \\ 2x - 10y = 0. \end{cases} \quad \begin{cases} 5x - 8y = 19; \\ 2x - 2y = 10. \end{cases}$$

171. Ҷақ уравненисен системисене кирек хăш мелпе те пулин шутлăр.

$$\begin{cases} (2x - 1)(y + 2) = (x - 2)(2y + 5); \\ 5x - 2 = 2y + 15. \end{cases}$$

172. $\begin{cases} ax + by = c; \\ y = mx. \end{cases} \quad \begin{cases} x + a = my; \\ y + b = nx. \end{cases}$

173. $y = ax + b$ двучленри a -па b пѐлтерѐшѐсене тупăр; $y = -11$, $x = -2$ пулсан, тата $y = 1$, $x = 2$ пулсан.

174. Пѐр таварне 8 кг, тепѐр таварне 19 кг илсе, пѐтѐмпе 16 тен. 40 п. тўленѐ; тепѐр чухне җив хаксемнех пѐр таварне 20 кг, тепѐр таварне 16 кг илсе, пѐтѐмпе 28 тен. 40 п. тўленѐ. Кашни таваран килограмѐ мѐн хак тăрать?

175. Пѐр трест 65 велосипед сутма илнѐ: ахаллисем тата моторлисем. Ахаль велосипедсемшѐн 100-шер тенкѐ, моторлисемшѐн 400-шер тенкѐ тўленѐ. Ҷав тавара сутсан, ахаль велосипедсемшѐн 12%, моторлисемшѐн 25% услам илнѐ, пѐтѐмпе трест 2980 тенкѐ тупăш илнѐ. Кашни йышши велосипед миҗе пулнă?

176. Икѐ вырăн хушшине инженерăн телеграф юписем лартмалла пулнă. Вăл шутланă тăрăх, хѐррисене икѐ пуҗне пѐрер юпа лартса, унтан 50-шер м хăварса юпасем лартса тухас пулсан, унăн 21 юпа җитмест. 55 м хăварса юпа лартас пулсан, 1 юпа җеҗ җитмест. Пѐтѐмпе миҗе юпа пулнă? Тата юпасем лартса тухмалли хушă мѐн тăршшѐ пулнă?

177. Тўркѐтеслѐ икѐ треугольникан гипотенузисем пѐр пекех. Пѐр треугольникан пѐр катечѐ теприн пѐр майлă выртакан катетѐнчен 4 м кѐскерех, тепѐр катечѐ тепѐр треугольникан пѐр майлă выртакан катетѐнчен 8 м вăрăмрах. Малтахи треугольникан лаптăкѐ теприн лаптăкѐнчен 34 кв. м ытларах пулсан, вѐсен катечѐсем мѐн тăршшѐ пулаҗҗѐ.

Виҗѐ паллăмар числоллă виҗѐ уравни системи.

98. Пѐрремѐш степенлѐ виҗѐ паллăмар числоллă уравненин нормальнăй сăнѐ. Пѐрремѐш степенлѐ виҗѐ паллăмар x , y тата z числоллă уравненине пѐр паллăмар числоллă тата икѐ паллăмар числоллă уравниисене улăштарнă пекех улăштарса пырсан, ăна эфир нормальнăй сăна кўретпѐр, вара сулахай енче виҗѐ член кăна пулать: пѐри x -лă, тепри y -лă, виҗѐмѐшѐ z -лă, сылтăм енче пѐр паллă член кăна пулать. Сăмахран:

$$5x - 3y - 4z = -12.$$

Унăн пѐтѐмѐшле (нормальнăй) сăнѐ җапла пулать:

$$ax + by + cz = d,$$

кунта a , b , c тата d саспаллисем мѐнле те пулин панă относительнăй числосем пулаҗҗѐ.

99. Виҗѐ паллăмар числоллă икѐ уравненин тата пѐр уравненин паллăмарлăхѐ. Виҗѐ паллăмар числоллă икѐ уравни системи панă пултăр:

$$5x - 3y + z = 2; \quad 2x + y - z = 6.$$

Пѐр паллăмар числи, сăмахран z , вырăнне пѐр-пѐр ирѐклѐ число, калăпăр 1, илер те ăна z вырăнне лартар:

$$\begin{cases} 5x - 3y + 1 = 2, \\ 2x + y - 1 = 6, \end{cases} \text{ ур. кал. } \begin{cases} 5x - 3y = 1; \\ 2x + y = 7. \end{cases}$$

Ҷапла ѐнтѐ, пирѐн икѐ паллăмар числоллă икѐ уравни системи пулчѐ. ăна пѐр-пѐр мелпе шутласан $x = 2$, $y = 3$ тупатпăр,

апла пулсан, виҗе палләмар числолла уравнини панә системи $x=2$, $y=3$, $z=1$ чухне киләшсе тәрәть. Халә z вырәнне пәр-пәр урәх число, сәмахран $z=0$ иләпәр те, әна җак уравнение лартәпәр:

$$5x - 3y = 2; \quad 2x + y = 6.$$

Пирән каллех икә палләмар числолла икә уравнини системи пулчә. Әна пәр-пәр мелпе шутласан, тупатпәр:

$$x = \frac{20}{11} = 1\frac{9}{11}; \quad y = 2\frac{4}{11}.$$

Җапла вара, $x = 1\frac{9}{11}$, $y = 2\frac{4}{11}$, $z = 0$ чухне, панә система киләшсе тәрәть. z вырәнне татах пәр-пәр урәх число илсен, каллех икә палләмар числолла икә уравнини системи пулать, әна шутласан x -па y -ән җәнә пәлтерәшәсене тупатпәр; z вырәнне эфир тәрләрен число темән чухлә те илме пултаратпәр, җавәнпа x -па y пәлтерәшәсем (z вырәнне илнә число тәләшәнчен) вәҗәмсәр нумай пулма пултарәҗҗә. Апла пулсан, виҗе палләмар числолла икә уравнение вәҗәмсәр нумай тәрлә шутлама пулать, вәл пәр паллә система мар.

Виҗе палләмар числолла уравнини пәрре кәна пулсан, палләмарләх татах ытларах пулать. Ун чухне икә палләмар числи вырәнне те ирәклә числосем илмелле пулать; виҗәш палләмар числийә вара икә палләмар число вырәнне илнә ирәклә числосене уравнение лартсан тупәнәть.

100. Виҗе палләмар числолла виҗе уравнини системи. Виҗә палләмар x , y , z числосен җән-җән пәлтерәшәсене тупас тесен, виҗе уравнини системи кирлә. Кун пек системәна вырәнне лартса шутламалли мелпе те, алгебрәлла хушса та шутлама пулать. Вәл мелсемпе мәнле усә курнине җак тәсләхре пәхса тухар (кашни уравнение малтан нормальнай сәна күнә):

$$\begin{cases} 3x - 2y + 5z = 7 \\ 7x + 4y - 8z = 3; \\ 5x - 3y - 4z = -12. \end{cases}$$

101. Вырәнне лартса шутламалли мел. Пәр-пәр уравнини, сәмахран, пәрремәшәнчен, палләмар числосенчен пәрне, кәлпәр x -а, ытти икә палләмаррисем урлә җыхәнтарса җырәпәр:

$$x = \frac{7 + 2y - 5z}{3}$$

Кашни уравнини рех x пәр числонах пәлтерет, җавәнпа x пысәкәшне пәлтәрекән выражение ытти уравнинисене x вырәнне лартма пултаратпәр:

$$7 \cdot \frac{7 + 2y - 5z}{3} + 4y - 8z = 3.$$

$$5 \cdot \frac{7 + 2y - 5z}{3} - 3y - 4z = -12.$$

Вара эфир икә палләмар числолла икә уравнини системи патне пырса тухатпәр: палләмар числосем y -па z пулаҗҗә. Ку систе-

мәна малта кәтартнә мелсенчен хәшинпе те пулин шутласа, у-па z -ән числоллә пәлгерәшәсене тупатпәр. Пирән төсләхре $y = 3$, $z = 2$ пулашсә; ку числосене x пысакәшне пәлтерекең выражение лартсан, тепәр палләмар числине те тупатпәр:

$$x = \frac{7 + 2 \cdot 3 - 5 \cdot 2}{3} = 1.$$

Ҙапла әнтә ку системән результатәсем $x = 1$, $y = 3$, $z = 2$ пулашсә (вәсене төрәслесе пәхма пулать).

102. Алгебрәлла хушса шутламалли мел. Панә виҗә уравненирен пәр-пәр икә уравнение, сәмахран, пәрремәшпе иккәмәшне илсе, вәсен пәр палләмарри, каләпәр, z умәнчи коэффицентсен абсолютлә пысакәшәсене пәрпеклетәпәр. Вара, алгебрәлла хушса, вәсенчен z числона кәларатпәр та, икә (x -па y) палләмар числоллә пәр уравнени пулать. Унтан, панә виҗә уравненирен тата икә уравнени, сәмахран, пәрремәшпе виҗәмәшне (е иккәмәшпе виҗәмәшне) илсе, җав майпах z числона кәларатпәр, вара татах x -па y -лә тепәр уравнени пулать:

$$1) 3x - 2y + 5z = 7 \quad (8 \text{ җине})$$

$$2) 7x + 4y - 8z = 3 \quad (5 \text{ җине})$$

$$1) 3x - 2y + 5z = 7 \quad (4 \text{ җине})$$

$$2) 5x - 3y - 4z = -12 \quad (5 \text{ җине})$$

$$24x - 16y + 40z = 56$$

$$35x + 20y - 40z = 15$$

$$\hline 59x + 4y = 71$$

$$12x - 8y + 20z = 28$$

$$25x - 15y - 20z = -60$$

$$\hline 37x - 23y = -32$$

Ҙак икә уравнение шутласан: $x = 1$, $y = 3$ пулать. Ку числосене панә виҗә уравненирен пәрне, сәмахран, пәрремәшне лартсан, z тупанать:

$$3 \cdot 1 - 2 \cdot 3 + 5z = 7; \quad 5z = 7 - 3 + 6 = 10; \quad z = 2.$$

А сәрхат тарни. Ҙак икә мелпех эфир тәватә палләмар числоллә тәватә уравнени системине виҗә палләмар числоллә уравнени системине кўме пултаратпәр (ку системәна — икә палләмар числоллә икә уравнени системине кўретпәр т. ыт. те). Пәтәмлетсе каласан, m палләмар числоллә m уравнени системине $m - 1$ палләмар числоллә $m - 1$ уравнени системине кўме пултаратпәр (ку системәна — $m - 2$ палләмар числоллә $m - 2$ уравнени системине кўме пулать т. ыт. те).

Упражненисем.

$$178. \begin{cases} 4x - 3y + 2z = 9; \\ 2x + 5y - 3z = 4; \\ 5x + 6y - 2z = 18. \end{cases}$$

$$179. \begin{cases} 2x + 5y - 3z - 6\frac{1}{4} = 0 \\ 5x - 6y + 2z = 12; \\ 5z = 42\frac{1}{4} - 7x + y. \end{cases}$$

$$180. \begin{cases} 3x - y + z = 17; \\ 5x + 3y - 2z = 10; \\ 7x + 4y - 5z = 3 \end{cases} \quad 181. \begin{cases} \frac{x+2y}{5x+6z} = \frac{7}{9}; \\ \frac{3y+4z}{x+2y} = \frac{8}{7}; \\ x+y+z = 123. \end{cases}$$

Уравненисен хәшпәр уйрәм төсләхәсем.

103. Панә уравненисенче кашнинчех хәшпәр палләмар числосем пулмаҗҗә, сәмахран:

$$\begin{cases} 10x - y + 3z = 5; \\ 4v - 5x = 6; \\ 2y + 3z = 6; \\ 3y + 2v = 4. \end{cases}$$

Ку төсләхри системәна яланхинчен хәвәртрах шутлама пулать, мәншән тесен кунта хәшпәр уравненисенче хәш-хәш палләмар числосем пачах сук. Пәр палләмар числолла уравнени сине хәвәртрах куҗма хәш уравненисенчен хәш палләмар числисене кәлармаллине сәс чухласа илмелле. Пирән төсләхре пәрремәшпе виҗсәмәш уравненисенчен z , тата иккәмәшпе тәваттәмәш уравненисенчен v кәларса пәрахсан, x -па y палләмар числосемлә икә уравнени пулать.

$$\begin{array}{rcl} 10x - y + 3z = & 5 & 4v - 5x = 6 \\ -2y - 3z = & -6 & -4v - 6y = -8 \\ \hline 10x - 3y & = -1; & -5x - 6y = -2. \end{array}$$

Ку уравненисене шутласан, $x = 0$, $y = \frac{1}{3}$ пулать.

Җак числосене иккәмәшпе виҗсәмәш уравненисене лартсан пирән сәпла тупанать:

$$v = \frac{3}{2}; \quad z = \frac{16}{9} = 1 \frac{7}{9}.$$

104. Уравненири палләмар числосем вак пулса тәраҗҗә: $\frac{1}{x}, \frac{1}{y}, \dots$ Җакән пек система панә пултәр:

$$\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} - \frac{1}{z} = \frac{7}{6} \\ \frac{1}{x} - \frac{1}{y} - \frac{1}{z} = -\frac{5}{6} \\ \frac{1}{y} - \frac{1}{x} - \frac{1}{z} = \frac{1}{6}. \end{cases}$$

Кун пек системәна урәх палләмар пуләшакан числосем кәртсе шутлама сәмәл. Каләпәр, $\frac{1}{x} = x'$, $\frac{1}{y} = y'$, $\frac{1}{z} = z'$.

Вара x' , y' , z' паллмар числомлё уравнисен системи пулать:

$$\begin{cases} x' + y' - z' = \frac{7}{6}; \\ x' - y' - z' = -\frac{5}{6}; \\ y' - x' - z' = \frac{1}{6}. \end{cases}$$

Ку системәна шутласан, тупатпәр:

$$x' = \frac{1}{2}, \quad y' = 1, \quad z' = \frac{1}{3},$$

ур. кал.

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{2}, \quad \frac{1}{y} = 1, \quad \frac{1}{z} = \frac{1}{3}.$$

Кунтан вара татәкләнах тупатпәр:

$$x = 2, \quad y = 1, \quad z = 3.$$

Тата тепәр төсләх иләпәр:

$$\begin{cases} \frac{3}{x} + \frac{2}{y} - \frac{4}{z} = -13; \\ \frac{6}{x} - \frac{3}{y} - \frac{1}{z} = 5\frac{1}{2}; \\ -\frac{5}{x} + \frac{7}{y} + \frac{2}{z} = 3\frac{1}{2}. \end{cases}$$

$\frac{3}{x}$, $\frac{2}{y}$ тата савән еверлө ваксене 3. $\frac{1}{x}$, 2. $\frac{1}{y}$ произведенисем тесе шутлама пулать. Савәнпа, $\frac{1}{x} = x'$, $\frac{1}{y} = y'$ тата $\frac{1}{z} = z'$ йышансан, панә системәна сапла сырма пулать:

$$\begin{aligned} 3x' + 2y' - 4z' &= -13; \\ 6x' - 3y' - z' &= 5\frac{1}{2}; \\ -5x' + 7y' + 2z' &= 3\frac{1}{2} \end{aligned}$$

Ку уравнисенчен тупатпәр:

$$x' = 2, \quad y' = \frac{1}{2}, \quad z' = 5;$$

апла пулсан:

$$\frac{1}{x} = 2, \quad \frac{1}{y} = \frac{1}{2}, \quad \frac{1}{z} = 5,$$

кунта вара:

$$x = \frac{1}{2}, \quad y = 2, \quad z = \frac{1}{5}.$$

105. Панă уравненисене хушса шутлама усăллă. Ҷакан пек система панă пултър:

$$\begin{cases} x + y = a; \\ y + z = b; \\ x + z = c. \end{cases}$$

Пур уравненисене те хушсан, тупатпър:

$$\begin{aligned} 2(x + y + z) &= a + b + c; \\ x + y + z &= \frac{a + b + c}{2}. \end{aligned}$$

Ҷак юлашки уравненирен павă уравненисене кашнинех кăларсан, Ҷапла пулать:

$$z = \frac{a + b + c}{2} - a; \quad x = \frac{a + b + c}{2} - b; \quad y = \frac{a + b + c}{2} - c.$$

Упражненисем.

$$182. \begin{cases} 3x + 5y = 74; \\ 7x + 2z = 66; \\ 2y + z = 25. \end{cases}$$

$$183. \begin{cases} \frac{6}{x} + \frac{5}{y} = 1; \\ \frac{30}{x} + \frac{31}{y} = 6. \end{cases}$$

$$184. \begin{cases} 4x - 3z + u = 10; \\ 5y + z - 4u = 1; \\ 3y + u = 17; \\ x + 2y + 3u = 25. \end{cases}$$

$$185. \begin{cases} \frac{2}{x} + \frac{3}{y} - \frac{4}{z} = \frac{1}{12}; \\ \frac{3}{x} - \frac{4}{y} + \frac{5}{z} = \frac{19}{24}; \\ \frac{4}{x} - \frac{5}{y} + \frac{1}{z} = \frac{6}{z}. \end{cases}$$

186. Ҷак системăна мѐнле мелпе шутлама Ҷăмăлрах:

$$\begin{cases} x + y + z = 29\frac{1}{4}; \\ x + y - z = 18\frac{1}{4}; \\ x - y + z = 13\frac{3}{4}. \end{cases}$$

187. ВиҶе сын кофе, сахър, чей илнѐ. Пѐрремѐш сынни 8 кг кофе, 10 кг сахър, 9 кг чей илнѐ те 35 тенкѐ тўленѐ; иккѐмѐшѐ 4 кг кофе, 15 кг сахър, 5 кг чей илсе, 40 тен. тўленѐ; виҶсѐмѐшѐ 12 кг кофе, 20 кг сахър, 10 кг чей илсе, 82 тен. 50 пус тўленѐ. Кофен, сахъран тата чейен килограмм хакне пѐлѐр.

188. Ылтăна, кѐмѐле тата пăхăра пѐрле шăратнă виҶе катăк сплав пур; вăл катăксене Ҷапла шăратса тунă:

- 1) Ылтăн 5 пай, кѐмѐл 6 пай, пăхър 8 пай
 2) " 3 " " 5 " " 7 "
 3) " 7 " " 13 " " 18 "

Сплавра 79 кг Ылтăн, 118 кг кѐмѐл, 162 кг пăхър пултър тесен, Ҷав виҶе катăкран кашнине миҶшер килограмм илмелле?

Историллэ сведенисем.

Египет сыннисем уравнисене ёлэк-авалах пёлдине куратпър. А х м е с ыр-
нă папирус сиче (пирён эрӳччен 2000 сул ёлӳкрех) пӳрремӳш степенӳлӳ пӳр
паллӳмар числоллӳ уравнисеме тӳл пулассӳ, анчах, паллӳмар числона вӳсем
„хау“—купа сӳмахпа паллӳ тунӳ.

Грексен математикӳ Диофант сӳрнисенче (пирён эрӳн IV ӳмӳрӳнче) те-
мӳн тӳрлӳ уравнисене тупатпър, вӳл шутра темиӳе паллӳмар числоллӳ уравни-
нисеме те тӳл пулассӳ, анчах Диофант уравнисене шутламалли пӳтӳмӳшле мел-
сене кӳтартса памасть.

Н ь ю т о н вара уравнисене системисене шутламалли темиӳе мел те кӳтартса
парать, вӳсем хушшинче подстановка меточӳ те (вырӳнне лартса шутламалли
мел) пур.

Уравнисемпе араб ученӳйӳсем нумай ӳсленӳ; вӳсем уравнение шутланӳ
чух уравнини икӳ пайӳ сӳмне те пӳрпек членсем хушас е кӳларас правилӳсем-
пе усӳ курнӳ. Пӳрремӳш дейстини вӳсем „малтанхи пек туни“ тенӳ, арабла
вӳл — *algebre* (альджебр); иккӳмӳш действие — *almukabalah* тенӳ, вӳл „хирӳсле
хуни“ тени пулать. Арабсен „альджебр“ сӳмахӳнчен „алгебра“ сӳмах тухса
кайнӳ.

КВАДРАТЛА КОРЕНЕ ТУПАССИ.

1. Кореньсен тәп свойствисем.

106. Корене определени пани. Пәр-пәр a числон иккәмеш степенълә (е квадратла) коренә тесе хәш числон квадратчә a пулать, сав числона калаçсә. Сапла, 49 числон квадратла коренә 7 тата — 7 пулать, мәншән тесен $7^2 = 49$, $(-7)^2 = 49$. Пәр-пәр a числон виçәмеш степенълә е кубла коренә тесе хәш числон кубә a пулать, сав числона калаçсә. Самахран, — 125 числон кубла коренә — 5 пулать, мәншән тесен $(-5)^3 = (-5)(-5)(-5) = -125$.

Пәр сәмахпа каласан, a числон n -мәш степенълә коренә тесе, хәш числон n -мәш степенә a пулать, сав числона калаçсә.

Миçемеш степенълә корене тупмаллине кәтартакан n числона корень кәтартәвә теçсә.

Корене $\sqrt{\quad}$ палләпа кәтартаçсә (әна радикал е корень палли теçсә). Унән горизонтальлә йәрә айне кореньне тупмалли числона сыраçсә, кәтесә сине корень кәтартәвне сыраçсә. Сапла:

27-ән кубла кореньне $\sqrt[5]{27}$ сыраçсә;

32-ән пилләкмәш степенне . . . $\sqrt[3]{32}$ сыраçсә.

Квадратла коренән кәтартәвне сырмаçсә; сәмахран, $\sqrt[2]{16}$ вырәнне $\sqrt{16}$ сыраçсә.

Корене тупмашкан шутланә действие корене тупасси теçсә; вәл—степене хәпартассине тепәр майлә действи пулса тәрәт, мәншән тесен ку действи степенә хәпартма панә степен кореньне тупатпәр, степенә хәпартнә чухне шыракан числона (степен основании) кунта панә. Савәнпа та, корене тупни тәрәс пулние эфир степенә хәпартса тәрәслеме пултаратпәр.

Сәмахран, $\sqrt[3]{125} = 5$ пәртанләха тәрәслесе пәхма, 5 числона куба хәпартмалла кәна; вара радикал айәнче 125 пулать пулсан, эфир 5 чән-чәнах 125 числон кубла коренә теме пултаратпәр.

107. Арифметикәлла корень. Положительнай числоран тупнә положительнай корене арифметикәлла корень теçсә. Сәмахран, 49-ән арифметикәлла квадратла коренә 7 пулать; анчах — 7 числона, вәл 49-ән квадратла коренә пулсан та, арифметикәлла корень теме сук.

Арифметикалла коренён икё свойствине катартапяр.

а) Каләпяр, 49-тан арифметикалла корене тупмалла пултяр. Вәл корень 7 пулать, мәншён тесен $7^2 = 49$. Халё сакән пек ыйту лартәпяр: $\sqrt{49}$ пулмалли пёр-пёр урәх положительнай число x тупма пулмасть-ши? Ун пек число пурах тесе шутләпяр. Вара вәл число 7-рен пёчөкрех е 7-рен пысәкрах пулма кирлө; $x < 7$ тесе илсен, вара $x^2 < 49$ (хутланаканнипе хутлаканны положительнай пулсан, вёсене пёчөклетнөрен произведени те пёчөкленет); $x > 7$ тесе илсен, вара $x^2 > 49$. Апла пулсан, нименле положительнай число 7-рен пёчөкки те, 7-рен пысәкки те $\sqrt{49}$ танлашма пултараймасть. Сапла ёнтё, панә числоран панә степеньлө арифметикалла корень пөрре кәна тухма пултарать.

Коренён положительнай пёлтерөшө сүнчен сөс мар, ыйтава анләрах илсе пәхнә пулсан, эфир урәх шухәш патне пырса тухнә пултәтмәр. Сәмахран, $\sqrt{49}$ коренө 7 те, -7 те пулать [мәншён тесен $7^2 = 49$ тата $(-7)^2 = 49$].

б) Пёр-пёр икё тан мар положительнай число, сәмахран 49 тата 64 илөпөр; $49 < 64$ пулнәран, эфир $\sqrt{49} < \sqrt{64}$ тесе шутлама пултаратпяр (арифметикалла квадратлә корене $\sqrt{\quad}$ палләпа сыратпяр пулсан). Чәнах та: $7 < 8$. Сапән пекех $64 < 125$ пулнәран $\sqrt[3]{64} < \sqrt[3]{125}$ теме пултаратпяр. Чәнах та: $\sqrt[3]{64} = 4$, $\sqrt[3]{125} = 5$; сапла ёнтё, $4 < 5$. Пётөмлетсе каласан:

Пёчөкрех положительнай числон арифметикалла коренө те (пөрех степеньлө пулсан) пёчөкрех пулать.

108. Алгебрәлла корень. Корене тупнә чухне йна положительнай числоран тупмалла тата коренө те положительнай пулмалла тесе каламан пулсан, йна алгебрәлла корень те сөсө. Сапла

n
ёнтё, $\sqrt[n]{a}$ выраженире n степеньлө корене алгебрәлла корень те сөсө пулсан, вәл вара a положительнай та, отрицательнай та пулма пултарнине, унән коренө положительнай та отрицательнай та пулма пултарнине пёлтерет.

Алгебрәлла коренөн сакнашкал тәватә свойствине катартса парәпяр.

а) Положительнай числон хәрахлә степень коренө положительнай число пулать.

Сапла, $\sqrt[3]{8}$ положительнай число пулма тивөслө (вәл 2 пулать), мәншён тесен отрицательнай числона хәрахлә показательлө степене хәпартсан, отрицательнай число пулать.

б) Отрицательнай числон хәрахлә степень коренө отрицательнай число пулать.

Сапла, $\sqrt[3]{-8}$ отрицательнай число пулма тивөслө (вәл -2 пулать), мәншён тесен положительнай числона кирек мәнле степене хәпартсан та, положительнай число пулать, отрицательнай число мар.

в) Положительнай число маъарла степень коренё икё пёлтерёшлэ число пулатъ, вёсен абсолютла пысакашё пёрех, паллисем хирёсле пулаççё.

Çапла, $\sqrt{+4} = +2$ тата $\sqrt{+4} = -2$, мёншён тесен $(+2)^2 = +4$ тата $(-2)^2 = +4$; çаван пекех $\sqrt[4]{+81} = +3$, $\sqrt[4]{+81} = -3$, мёншён тесен $(+3)^4$, $(-3)^4$ степеньсем пёр $+81$ число-лах тан пулаççё.

Коренён икё пёлтерёшне коренён абсолютла пысакашё умне икё палла лартса çыраççё, сáмахран, çапла çыраççё:

$$\sqrt{4} = \pm 2; \quad \sqrt{a^2} = \pm a; \quad \sqrt{9x^4} = \pm 3x^2.$$

г) Отрицательнай число маъарла степень коренё нимёнле положительнай число та, отрицательнай число та пулма пул-тараймасть, мёншён тесен вёсене маъарла кáртулла степене хáпартсан, отрицательнай число мар, положительнай число пулатъ. Сáмахран, $\sqrt{-9}$ вáл $+3$ те, -3 те, нимёнле урáх число та пулмасть.

Отрицательнай число маъарла степенье коренёне *мнимай* число теме йышáнна, ытти числосене *вещественнай* е *чáн* чис-лосем теççё.

Упражненисем.

Çак выраженисене шугласа пёлёр.

$$189. \sqrt{100}; \sqrt{0,01}; \sqrt{\frac{1}{4}}; \sqrt{\frac{9}{16}}; \sqrt{a^2}; \sqrt{x^2};$$

$$190. (\sqrt{5})^2; (\sqrt[3]{27})^3; (\sqrt[5]{a})^5; (\sqrt{1+x})^2.$$

$$191. \sqrt[3]{+27}; \sqrt[3]{-27}; \sqrt[3]{\frac{1}{8}}; \sqrt[3]{-\frac{1}{8}}; \sqrt[3]{-0,001}.$$

$$192. \sqrt[4]{16}; \sqrt[4]{\frac{1}{16}}; \sqrt[4]{81}; \sqrt{-4}; \sqrt{-a^2}; \sqrt{-16}.$$

109. Произведенин, степенён тата вакáн коренёне тупас-си. а) abc произведенин арифметикалла коренёне тупмалла пул-тáр. Произведение квадрата хáпартмалла пулнá пулсан, унáн кашни хутлаканнине уйрáммáн квадрата хáпартма кирлине эфир пёлетпёр (§ 46). Корене тупасси степене хáпартассине тепёр майла действи пулнáран, произведенирен корень тупас пулсан та, йна кашни хутлаканнинчен уйрáммáн тупмалли палáрсах тáрать, урáхла каласан, çапла пулмалла:

$$\sqrt{abc} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b} \cdot \sqrt{c}.$$

Ку пёртанлáх тёрёс иккенне пёлес тесе, унáн сылтáм, пайне произведени степенён теореме тáрáх квадрата хáпартатáр:

$$(\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} \cdot \sqrt{c})^2 = (\sqrt{a})^2 \cdot (\sqrt{b})^2 \cdot (\sqrt{c})^2.$$

Коренён определенийё тáрáх:

$$(\sqrt{a})^2 = a, \quad (\sqrt{b})^2 = b, \quad (\sqrt{c})^2 = c.$$

Ҷапла вара:

$$(\sqrt{a}\sqrt{b}\sqrt{c})^2 = abc.$$

$\sqrt{a}\sqrt{b}\sqrt{c}$ произведенин квадратчѣ abc пулсан, Ҷак произведени abc квадратлӑ коренѣпе тан пулнине пѣлтерет. Ҷавӑн пекех:

$$\sqrt[3]{abc} = \sqrt[3]{a}\sqrt[3]{b}\sqrt[3]{c},$$

мѣншѣн тесен

$$\left(\sqrt[3]{a}\sqrt[3]{b}\sqrt[3]{c}\right)^3 = \left(\sqrt[3]{a}\right)^3\left(\sqrt[3]{b}\right)^3\left(\sqrt[3]{c}\right)^3 = abc.$$

Ҷапла ѣнтѣ, произведенирен арифметикӑлла корень тупас тесен, кашни хутланаканнин кореньне уйрӑммӑн тупмалла.

б) Ҷак пѣртанлӑхсем тѣрѣс иккенне тѣрѣслесе пѣлме пулатъ:

$$\sqrt{a^4} = a^2, \text{ мѣншѣн тесен } (a^2)^2 = a^4,$$

$$\sqrt[3]{x^{12}} = x^4, \text{ мѣншѣн тесен } (x^4)^3 = x^{12} \text{ т. ыт. те.}$$

Ҷапла вара, степеньрен корень тупас тесен, степень кӑртӑвѣ корень кӑртӑвѣ Ҷине пайланатъ пулсан, степень кӑртӑвӑне корень кӑртӑвѣ Ҷине пайламалла.

в) Ҷак пѣртанлӑхсем те тѣрѣс пулаҶҶе:

$$\sqrt{\frac{9}{16}} = \frac{\sqrt{9}}{\sqrt{16}} = \frac{3}{4}, \text{ мѣншѣн тесен } \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{3^2}{4^2} = \frac{9}{16},$$

$$\sqrt[3]{\frac{8}{27}} = \frac{\sqrt[3]{8}}{\sqrt[3]{27}} = \frac{2}{3}, \text{ мѣншѣн тесен } \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{2^3}{3^3} = \frac{8}{27}.$$

Пѣтѣмлетсе каласан:

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}; \sqrt[3]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{b}}.$$

Апла пулсан, вакран корень тупас тесен, ӑна числителѣпе знаменателѣнчен уйрӑммӑн тупмалла.

Ку правилӑсенче арифметикӑлла кореньсем Ҷинчен сӑмах пынине астутарса хӑварӑпӑр.

Тѣслѣхсем:

1. $\sqrt{9a^4b^6} = \sqrt{9} \sqrt{a^4} \sqrt{b^6} = 3a^2b^3.$

2. $\sqrt[3]{125a^6x^9} = \sqrt[3]{125} \sqrt[3]{a^6} \sqrt[3]{x^9} = 5a^2x^3.$

Асӑрхаттарни. Тупмалли корень мӑшӑрлӑ степеньлѣ пулсан тата вӑл алгебрӑлла корень пулатъ тетпѣр пулсан, тупнӑ результат умне икѣ знак \pm лартмалла. Ҷапла:

$$\sqrt{9x^4} = \pm 3x^2.$$

Упражненисем.

193. $\sqrt{4 \cdot 9}$; $\sqrt{\frac{1}{4} \cdot 0,01 \cdot 25}$; $\sqrt{4a^2b^2}$; $\sqrt{9a^2x^2y^4}$.

194. $\sqrt[3]{-27a^3b^3}$; $\sqrt[4]{\frac{1}{16}a^4x^4}$; $\sqrt[5]{abc}$.

195. $\sqrt{a^4}$; $\sqrt{2^4}$; $\sqrt{x^6}$; $\sqrt{(a+b)^4}$.

196. $\sqrt[3]{2^6}$; $\sqrt[3]{-a^6}$; $\sqrt[3]{x^9}$; $\sqrt[3]{(m+n)^6}$.

197. $\sqrt{\frac{8}{125}}$; $\sqrt[3]{-\frac{27}{1000}}$; $\sqrt[3]{\frac{a^6}{b^3}}$; $\sqrt[3]{\frac{x}{y^3}}$; $\sqrt[3]{\frac{x}{y}}$.

198. $\sqrt{25a^6b^2c^4}$; $\sqrt{0,36x^4y^2}$; $\sqrt{\frac{1}{4}(b+c)^6x^4}$.

II. Числосен квадратлӑ кореньне тупасси.

110. Малтан асӑрхаттарнисем. а) Ку сыпӑкра сӑмаха кӑскетес шутпа, „квадратлӑ корень“ тесе калас ырӑнне кӑскен „корень“ тейӑпӑр.

б) Натуральнӑй ретри 1, 2, 3, 4, 5... числосене квадрата хӑпартсан, сӑкӑн пек квадратсен таблици пулать:

1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100, 121, 144, ...

Паллах, ку таблицӑна кӑмен тулли числосем сӑв тери нумай; анчах ун пек числосенчен тулли корень тупма пулмасть. Сӑвӑнпа та, пӑр-пӑр тулли числоран корень тупмалла пулсан, сӑмахран, $\sqrt{4082}$ тупмалла пулсан, ӑна пирӑн сӑкӑн пек ӑнланмалла тейӑпӑр: май килсен, 4082 числоран тулли корень тупмалла; май килмесен, хӑш тулли число квадратчӑ 4082 числоран сӑвӑх тӑрать, сӑвӑн пек чи пысӑк тулли число тупмалла (ун пек число 63, мӑншӑн тесен $63^2 = 3969$, а $64^2 = 4096$).

в) Тулли число 100-тен пӑчӑкрех пулсан, уӑн кореньне хутлассин таблици тӑрӑх тупащӑ.

111. 10 000-тен пӑчӑкрех, 100-тен пысӑкрах тулли числосенчен корень тупасси. $\sqrt{4082}$ тупмалла пултӑр. Ку число 10 000-тен пӑчӑккӑ пулиӑран, уӑн коренӑ 100-тен пӑчӑкрех пулмалла. Тепӑр енчен, панӑ число 100-тен пысӑк, апла пулсан, уӑн коренӑ 10-ран пысӑкрах (е 10-па тан) пулать. Анчах, 10-ран пысӑкрах (е 10-па тан) тата 100-тен пӑчӑкрех кашни число икӑ цифрӑллӑ пулать, сӑвӑнпа тупмалли корень сӑкӑн пек сумма пулать:

тещӑткесем + единицӑсем,

сӑвӑнпа та уӑн квадратчӑ сӑк суммӑпа тан пулмалла:

$(\text{тещӑткесем})^2 + 2 \cdot (\text{тещ.}) \cdot (\text{един.}) + (\text{единицӑсем})^2$.

Ку сумма 4082 числори чи пысӑк квадрат пулма тивӑщӑлӑ. Тещӑткесен квадратчӑ сӑрсем пулащӑ, сӑвӑнпа тещӑткесен квадратне панӑ числосен сӑрӑсенче шырама кирлӑ. Панӑ числора сӑрсем 40 (вӑл числоран эфир сылтӑмран икӑ цифрӑна запятайӑпа уйӑрса тупатпӑр). Анчах 40-ре темищӑ тулли квадрат та пур:

36, 25, 16... т. ыт. те. Вёсенчен чи пысак квадратне 36 илөпөр те, коренён теҗеткисен квадрачә җав чи пысак квадратпа тан пулать тейөпөр: вара кореньре теҗеткесен хисепё 6 пулма кирлө. Җапла вара, **корень теҗеткисен хисепё радикал айёнчи җёрсен хисепён чи пысак тулли коренёне тан пулать**, вәл ялан җавән пек пулассине төрөслесе пелер. Чәнах та, пирён төслөхре кореньри теҗеткесен хисепё 6-ран ытла пулма тивөслө мар, мөншён тесен (7 теҗ.)² = 49 җөр пулать, вәл 4082-рен иртсе каять. Анчах 6-ран кая та пулма пултараймасть, мөншён тесен 5 теҗетке (единицәсемпе пөрле) 6 теҗеткерен пөчөккө, җавах (6 теҗ.)² = 36 җөр пулать, вәл та 4082-рен пөчөкрех. Эпир чи пысак тулли корене шыраня пирки, пирён корень валли 5 теҗетке илме юрмасть, мөншён тесен 6 теҗетке те ытлаши пулмасть. Җапла ёнтө, эпир корень теҗеткисен хисепне 6 тупрәмәр. Вәл цифрәна = палләран сылтәма җыратпәр та вәл коренён теҗеткисене пөлтәрнине асра тытатпәр. Ана квадрата хәпартсан, 36 җөр пулать. Җак 36 җөре радикал айёнчи числон 40 җөрөнчен кәларатпәр та юлашки җумне 82 җыrsa хуратпәр:

$$\sqrt{40'82} = 6$$

$$\begin{array}{r} 36 \\ \hline 482 \end{array}$$

482 числора җак сумма пулма кирлө:

$$2 \cdot (6 \text{ теҗ.}) \cdot (\text{един.}) + (\text{един.})^2.$$

Җак (6 теҗ.) · (един.) произведени теҗеткесем пулма тивөҗ, җавәнпа теҗеткесемпе единицәсен икө хут илнө произведенине юлашкин теҗеткисем җинче, урәхла каласан, 48-та шырамалла (яна эпир юлашкине сылтәмран пөр цифра 48'2 запятайяпа уйәрса пөлетпөр). Коренён теҗеткисене икө хут илни 12 пулать. Җав 12-не коренён единицәсем җине хутласан (халө вөсене пөлместпөр-ха), 48-ра көрекен числона тупмалла. Җавәнпа эпир 48-а 12 җине пайлатпәр. Җапла пайлас тесе, юлашкирен сулахайра вертикальлө йөр туртатпәр, җав йөртен сулахаялла пөр вырән хәварса (мөншён җавән пек вырән хәварни халех палләрать) коренён пөрремөш цифрине икө хут илсе җыратпәр (12 пулать), ун җине 48-а пайлатпәр.

Частное 4 пулать. Анчах җак цифрәна коренён единицәсем тесе тўрех йышәнма җук, мөншён тесен 12 җине юлашкинчи пур теҗеткесене те пайларәмәр, анчах хәшпөр теҗеткисем теҗеткесемпе единицәсен икө хут илнө произведенийөнче мар, единицәсен квадратне кеме пултараҗҗө. Җавәнпа 4 цифра пысакрах та пулма пултарать. Ана җана са пә х малла. $2 \cdot (6 \text{ теҗ.}) \cdot 4 + 4^2$ сумма 482-рен (юлашкирен) пысак пулмасан җөҗ, 4 цифра юрәхлә пулма пултарать. Вәл суммәна эпир җасах шутласа кәларатпәр: вертикальлө йөр леш енчи коренён икө хут илнө цифри (12) җумне сылтәмран 4 җыратпәр (унта пөр вырән җавәнпа хәвартәмәр), вара 124 пулать, яна җав 4 җинех хутлатпәр:

$$\begin{array}{r} \sqrt{40'82} = 6 \\ 36 \\ \hline 124 \overline{) 48'2} \\ 4 \quad 49 \quad 6 \end{array}$$

Чанах та, ҫакан пек хутласа, эфир 4 ҫине 4 хутлатпәр та, корень единицисен квадратне тупатпәр; унта эфир 12 теҫеткене 4 ҫине хутлатпәр та, корень теҫеткисемпе единицәсен икә хут илнә произведенине тупатпәр. Вара эфир тўрех вәсен суммине тупатпәр. Тупнә произведени 496 пулчә, вәл 482 юлашкирен пысакрах, ҫаванпа 4 илни ытлаши пулать. Вара пәчәкрех цифра 3 илсе, ҫаван пекех сәнаса пәхатпәр. 4 цифрәна тата 496 произведение хурататпәр та 4 цифра вырәнне 3 лартатпәр, вара 123-не 3 ҫине хутлатпәр:

$$\begin{array}{r} \sqrt{40'82} = 63 \\ 36 \\ \hline 123 \overline{) 4 \ 8'2} \\ 3 \quad 3 \quad 6 \quad 9 \\ \hline 1 \quad 1 \quad 3 \end{array}$$

369 произведени 482 юлашкирен пәчәкрех пулчә; ҫаванпа 3 цифра юрәхлә (ку цифра та ытлаши пулнә пулсан, тепәр пәчәкрех цифрәна, 2-не сәнаса пәхмалла пулатчә). Тупнә 3 цифрәна кореньри теҫеткесен цифри ҫумне сылтама ҫыратпәр. Кайранхи юлашки панә число хәйәнчи чи пысак тулли квадратран 113-не ытлашине кәтартать. Корене тупнине тәрәслесе пәхма 63 числа квадрата хәпартатпәр та результат ҫумне 113 хушатпәр:

$$\begin{array}{r} 63^2 = 3969 \\ + 113 \\ \hline 4082 \end{array}$$

Суммәра 4082 пулчә пулсан, действие те тәрәс тунә пулать.

Тәсләхсем:

$$1. \sqrt{12'25} = 35$$

$$\begin{array}{r} 9 \\ \hline 65 \overline{) 32'5} \\ 5 \quad 32 \quad 5 \\ \hline 0 \end{array}$$

$$2. \sqrt{86'55} = 93$$

$$\begin{array}{r} 81 \\ \hline 183 \overline{) 55'5} \\ 3 \quad 54 \quad 9 \\ \hline 6 \end{array}$$

$$3. \sqrt{16'05} = 40$$

$$\begin{array}{r} 16 \\ \hline 8 \overline{) 0'5} \end{array}$$

$$4. \sqrt{8'72} = 29$$

$$\begin{array}{r} 4 \\ \hline 49 \overline{) 47'2} \\ 9 \quad 44 \quad 1 \\ \hline 3 \quad 1 \end{array}$$

$$5. \sqrt{64'00} = 80$$

$$\begin{array}{r} 64 \\ \hline 00 \end{array}$$

Тәваттамәш тәсләхре юлашки 47 теҫеткине 4 ҫине пайланә чухне частное 11 пулать. Анчах корень единицисен цифри икә цифрәллә 11 е 10 число пулма пултарайман пирки, тўрех 9 цифрәна сәнамалла.

Пиллѣкмѣш тѣслѣхре панă числон 64 ҫѣрѣнчен 8-рăн квадратне кăларсан, юлашкийѣ нуль пулать, вара малалли ушкăнра та нульсем кăна пулаҫҫѣ. Ун пек пулни тупмалли корень 8 теҫеткеллѣ ҫеҫ пулнине пѣлтерет, ҫавăнпа единицăсен вырăнне нуль ҫырмалла.

112. 10 000-тен пысăкрах тулли числосенчен корень тупасси.
 $\sqrt{35782}$ тупмалла пултăр. Радикал айѣнчи число 10 000-тен пысăкрах, ҫавăнпа унтан корень $\sqrt{10\,000} = 100$ -тен пысăкрах тухать, ҫапла вара вăл корень 3 е ытларах цифрăллă пулать. Вăл хăть миҫе цифрăллă пулсан та, эфир а́на теҫеткесемпе единицăсен сумми тесе шутлама пултаратпăр. Сăмахран, ҫав корень 482 число пулнă пулсан, а́на эфир 48 теҫетке +2 единица сумми тесе шутлама пултаратпăр. Вара корень квадратѣнче хушăнаканнисем виҫҫѣ кăна пулаҫҫѣ:

$$(\text{теҫеткесем})^2 + 2 \cdot (\text{теҫеткесем}) \cdot (\text{единицăсем}) + (\text{единицăсем})^2.$$

Халѣ ѣнтѣ иртнѣ параграфра $\sqrt{4082}$ тупнă чухнехи пекех сўтсе-явма пултаратпăр. Кунта уйрăмми пѣтѣмпе те, 4082 число коренѣн теҫеткисене тупма 40-рен корень тупма тиврѣ пулсан, а́на хутлассин таблици тăрăх тупма май пулчѣ; хальхи тѣслѣхре $\sqrt{35782}$ теҫеткисене тупма 357 числоран корень тупма тивет, а́на хутлассин таблици тăрăх шутлама ҫук. Анчах $\sqrt{357}$ иртнѣ параграфри майпах тупма пултаратпăр, мѣншѣн тесен $\sqrt{357} < 10\,000$.

$$\begin{array}{r} \sqrt{3'57'82} = 189 \\ \begin{array}{r} 1 \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ 28 \overline{) 257} \\ 8 \quad \overline{) 224} \\ 369 \overline{) 338} \\ 9 \quad \overline{) 332} \\ \hline 61 \end{array} \end{array}$$

357 числон чи пысăк тулли корень 18 пулать. Ҫавăнпа $\sqrt{3'57'82}$ кореньре те 18 теҫетке пулма тивѣҫлѣ.

Единицăсене тупма 3'57'82-рен 18 теҫетке квадратне кăларатпăр; а́на тума 357 ҫѣртен 18-ăн квадратне кăлармалла та юлашки ҫумне радикал айѣнчи числон кайри икѣ цифрине антарса ҫырмалла. Пирѣн 357-рен 18-ăн квадратне кăларнин юлашки пулса та тăчѣ: вăл 33. Апла пулсан, 3'57'82-рен 18 теҫетке кăларнин юлашки пултăр тесен, 33-рен сылтăм ене 82 цифра кăна ҫырса хумалла.

Малалла $\sqrt{4082}$ тупнă пекех туса пыратпăр: 3382 юлашкирен сулахайра вертикальлѣ йѣр туртатпăр та йѣртен сулахайра (пѣр вырăн хăварса) коренѣн тупнă теҫеткисене икѣ хут илсе 36 (икѣ хут 18) ҫыратпăр. Юлашкинче сулахайран пѣр цифра уйăратпăр та юлашкинчи теҫеткесене, урăхла каласан, 338-ра 36 ҫине пайлатпăр. Частное 9 пулать. Ку цифрăна сăнама а́на 36 ҫумне сылтăма ҫырса, ҫав цифра ҫинех хутлатпăр. Произведени 3321 пулчѣ, вăл юлашкирен пѣчĕкрех. Апла пулсан, 9 цифра юрăхлă, а́на корене ҫырса хуратпăр.

Пётёмёшле каласан, кирек мёнле тулли числосенчен те квадратлă корень тупас тесен, малтан ҫав числори ҫёрсенчен корень тупмалла; ку число 100-тен пысăкрах пулсан, ҫав числори ҫёрсен ҫёрёсенчен, урăхла каласан, панă числон вунă пинёсенчен корень тупмалла пулать; ку число та 100-тен пысăкрах пулсан, панă числори ҫёрсен вунă пинёсенчен, урăхла каласан, панă числон миллионёсенчен корень тупмалла пулать т. ыт. те.

Тёслёхсем.

$$1. \sqrt{8'72'00'00} = 2952$$

	4				
49	472				
9	441				
585	3100				
5	2925				
5902	1750'0				
2	11804				
	5696				

$$2. \sqrt{3'50'32'60'89} = 18717$$

	1						
28	25'0						
8	224						
367	263'0						
7	2569						
3741	636'0						
1	3741						
37427	26198'9						
7	261989						
	0						

$$3. \sqrt{9'51'10'56} = 3084$$

	9				
608	511'0				
8	4864				
6164	2465'6				
4	24656				
	0				

Кайранхи төслөхре, пёрремёш цифрине тупса, унăн квадратне каларсан, юлашки 0 пулать. Иккёмёш уйрăмри 51 цифрăна антаратпър. Теҫеткисене уйърсан, пирён 5 теҫетке ҫеҫ пулать, коренён икё хут илнё цифри 6. Апла пулсан, 5-е 6 ҫине пайласан, 0 пулать. Кореньти иккёмёш вырăна 0 ҫыратпър та юлашки ҫумне тепёр уйрăмри икё цифрăна антаратпър, вара 5110 пулать. Малалла яланхи пекех шутлатпър.

$$4. \sqrt{81'00'00} = 900$$

81
0

Ку төслөхре тупмалли корень 9 ҫёртен ҫеҫ тәрать, ҫаванла та теҫеткесемпе единицасем вырăнне нульсем ҫырмамла.

Правило. Панă тулли числоран квадратлă корень тупас тесен, ҫав числона сылтăм енчен сулахаялла икшер цифрăн уйърса тухмалла, юлашки (сулахай хёрринчи) пёченех те юлма пултарать.

Коренён пёрремёш цифрине тупас тесен, пёрремёш уйрăмран квадратлă корень тупмалла.

Иккёмёш цифрине тупас тесен, коренён пёрремёш цифрин квадратне пёрремёш уйрәмран каларса, юлашки сүмне иккёмёш уйрәмри цифрасене антармалла, вара пулнә число те-сеткисене коренён пёрремёш цифрине икё хут илнө число сине пайламалла. Пайласан пулнә числона сәнаса пәхмалла.

Ана сәпла сәнассё: вертикальё йёрён леш енче (юлашкинчен сулахайра) коренён малтан тупнә числине икё хут илсе сырассё те ун сүмне сылтәма сәнамалли цифрәна сырса ху-рассё; сәпла сырсан пулнә числона сәнамалли цифра сине хутлассё. Хутласан пулнә число юлашкирен ытларах пулсан, сәнакан цифра юрәхсәр, вара унтан пёчөкрех тепөр число илсе сәнамалла.

Коренён малалли цифрисене сак майпах тупассё.

Пёр-пёр уйрәмне антарса сырсан пулнә число тесеткисем пайлаканнинчен, урәхла каласан, тупнә коренён икё хут илнө пайенчен пёчөкрех пулсан, кореньте 0 лартса, тепөр уйрәмне антармалла та действие малалла тумалла.

113. Кореньти цифрасен шучё. Кореньсене тупассин процесне пәхса тухнә хыссән сакна каламалла: радикал айёнчи число икшер цифрән шутласан пурё мисе уйрәм пулать (сулахайри уйрәмра пёр цифра та пулма пултарать), кореньре те савән чухлө цифра пулать; урәхла каласан, радикал айёнчи число цифрисен шучё мәшәрлә пулсан, кореньти цифрасен шучё икё хут каярах пулать; радикал айёнчи число цифрисен шучё харахла пулсан, сав шут сүмне 1 хушса икё хут пёчөклетсен, кореньти цифрасен шучё пулать:

Упражненисем.

Сак числосенчен квадратлә корень тупәр:

199. $\sqrt{289}$; $\sqrt{4225}$; $\sqrt{61009}$; $\sqrt{582169}$.

200. $\sqrt{135424}$; $\sqrt{956484}$; $\sqrt{57198969}$.

201. $\sqrt{68492176}$; $\sqrt{422220304}$. 202. $\sqrt{285970396644}$.

203. Юлашки цифри вырйёнче сак тәватә цифрәран: 2, 3, 7, 8 пөри тәрәт пулсан, ун пек кирек мөнле тулли число та мөншён тёрёс квадрат пулма пултараймасть?

III. Квадратлә кореньсене сывхартса тупасси.

114. Шәп тёрёс корень тупма сүккин икё төслөхө. Панә тулли е ваклә числоран тухакан шәп тёрёс квадратлә корень тесе квадратчө шәпах панә числопа тан пулакан числона калассё. Панә числоран шәп тёрёс корень тупма сүккине пёлмелли палләсене кәтартәпәр.

а) Панә тулли числоран шәп тёрёс тулли корень тупма сүк пулсан (корень тупнә чух юлашки юлать пулсан), ун пек числоран ваклә шәп тёрёс корень те тупма сүк, мөншён тесен кирек мөнле вака та хайне хай сине хутласан произведенире тулли число мар, вак пулать.

б) Вақран кореньне тупма числитель кореньне знаменатель коренё сине пайламалла пулсан, кёскелмен вакән числительненчен е знаменательненчен шәп тёрёс корень тупәнмасть пулсан,

ҫав вакран шӑп тӗрӗс корень тупӑнмасть. Сӑмахран, $\frac{4}{5}$, $\frac{8}{9}$

тата $\frac{11}{51}$ ваксен шӑп тӗрӗс кореньне тупма ҫук, мӗншӗн тесен пӗрремӗш вакӑн знаменателӗнчен шӑп тӗрӗс корень тухмасть, иккӗмӗшӗн — числителӗнчен, виҫӗмӗшӗн — числителӗнчен те, знаменателӗнчен те шӑп тӗрӗс корень тухмасть.

Шӑп тӗрӗс корень тупма ҫук хисепсенчен ҫывхартӑ корень тупма пулать, халӗ ӗнтӗ ҫавӑн ҫинчен калаҫӑпӑр.

115. Пӗрре таран тӗрӗслӗхпе ҫывхартса тупӑ корень. Панӑ числоран (тулли числоран е вакран—пурӗ пӗрех) 1 таран тӗрӗслӗхпе ҫывхартса тупӑ квадратлӑ корень тесе ҫакӑн пек икӗ условие килӗшекен тулли числона калаҫҫӗ: 1) ҫав числон квадратчӗ панӑ числоран пӗчӗкрех (е унпа тан) пулмалла, анчах 2) ҫав число ҫумне 1 хушса Ӱстернӗ квадратчӗ панӑ числоран пысӑк пулмалла. Урӑхла каласан, *1 таран тӗрӗслӗхпе тупӑ квадратлӑ корень тесе квадратчӗ панӑ числоран пысӑк мар чи пысӑк тулли числона калаҫҫӗ*; ун пек корене кун умӗнхи уйрӑмра тупрӑмӑр. Вӑл корене 1 таран тӗрӗслӗхпе тупӑ корень теҫҫӗ, мӗншӗн тесен шӑп тӗрӗс кореньне тупма ҫывхартӑ корень ҫумне 1-рен пӗчӗкрех татах пӗр-пӗр число хушмаллаччӗ; ҫапла, паллӑмар шӑп тӗрӗс корень вырӑнне ҫывхартӑ корень илсен, эфир вара 1-рен пӗчӗкрех йӑнӑш тӑватпӑр.

Калӑпӑр, 395,74 числоран 1 таран тӗрӗслӗхпе ҫывхартӑ квадратлӑ кореньне тупмалла пултӑр. Вара, вак ҫине пӑхмасӑрах, кореньне тулли числоран кӑна тупатпӑр:

$$\sqrt[1]{395} = 19$$

29	295
9	261
	34

Тупӑ корень 19 пулчӗ. Вӑл эфир шыракан корень пулать, мӗншӗн тесен $19^2 < 395,74$; $20^2 > 395,74$.

Правило. Квадратлӑ корене 1 таран тӗрӗслӗхпе ҫывхартса тупас тесен, панӑ числон тулли пайӗнчен чи пысӑк тулли кореньне тупас пулать.

Ҫак правило тӑрӑх тупӑ корене ҫителӗксӗр ҫывхартса тупӑ корень теҫҫӗ, мӗншӗн тесен унта шӑп тӗрӗс корене пӗр-пӗр число ҫитмест (1-рен пӗчӗкрех число). Ҫак корень ҫумне 1 хушсан, тепӗр число пулать, ку число шӑп тӗрӗс кореньрен кӑшт ытларах, ытлашшийӗ тата 1-рен пӗчӗкрех пулать. Ҫак 1 хушса пысӑклатӑ корене те 1 таран тӗрӗслӗхпе ҫывхартӑ корень теме пулать, анчах вӑл ытлашширех.

116. $\frac{1}{10}$ таран тӗрӗслӗхпе ҫывхартӑ корень. $\sqrt{2,35104}$ корене $\frac{1}{10}$ таран тӗрӗслӗхпе (ҫителӗксӗр) ҫывхартса тупмалла пултӑр. Ку ӗнтӗ ҫапла тупас тени—тулли единицӑсемпе вунӑмӗш пайӗсенчен тӑракан вуншарлӑ вака тупмаллине тата вӑл ҫак икӗ

условие килёше тәмаллине пёлтерет: 1) ҫак вакън квадратчә 2,35104-чен пысак пулмалла мар, анчах 2) ун ҫумне $\frac{1}{10}$ хушсан, ҫак пысаклатнй вак квадратчә 2,35104-чен пысаккрах пулмалла.

$$\sqrt[1]{2,35'104} = 1,5$$

$$25 \begin{array}{r} 13'5 \\ 5 \overline{) 125} \\ \underline{10} \end{array}$$

Ҫакън пек вака тупас тесе, эфир малтан 1 таран төрөслөхпе ҫывхартнй корене тупатпяр, урәхла каласан, тулли числоран 2-рен кәна квадратлй корень тупатпяр. Вара 1 пулать (юлашкинче те 1 юлать). Кореньте 1 цифра ҫырса, ана запятайяпа уйяртпяр. Маллалла вуннәмеш пайёсен цифрисене шыратпяр. Ҫавна валли юлашки 1 ҫумне запятайяран сылтәмри 35 цифрәсене антарса ҫыратпяр та, вара тулли 235 числоран корень тупнй пек шутлатпяр. Шутласа тупнй 5 цифрәна корене вуннәмеш пайёсен ырянне ҫыратпяр. Радикал айёнчи ытти числосем (104) пире кирлө мар. Эфир тупнй число 1,5 чәнах та $\frac{1}{10}$ таран төрөслөхпе ҫывхартса тупнй корень пуллине ҫакънтан куратпяр: 235-рен 1 таран төрөслөхпе ҫывхартнй чи пысак тулли корень тупсан, 15 пулать, апла пулсан:

$$15^2 \leq 235, \text{ анчах } 16^2 > 235.$$

Ҫав числосене 100 ҫине пайласан ҫапла пулать:

$$\frac{15^2}{100} \leq 2,35; \quad \frac{16^2}{100} > 2,35,$$

урәхла каласан

$$\left(\frac{15}{10}\right)^2 \leq 2,35 \quad \left(\frac{16}{10}\right)^2 > 2,35,$$

е

$$1,5^2 \leq 2,35; \quad 1,6^2 > 2,35.$$

Ҫапла вара, $1,5^2 < 2,35104; \quad 1,6^2 > 2,35104^1$.

Ҫапла ёнтө, 1,5 вуншарлй вак—панй числоран $\frac{1}{10}$ таран төрөслөхпе ҫывхартса тупнй корень пулать.

Ҫак майпах 0,1 таран төрөслөхпе ҫывхартса ҫакън пек квадратлй кореньсене тупар:

$$\sqrt{57,40} = 7,5 \quad \sqrt{0,30} = 0,5 \quad \sqrt{0,03'8} = 0,1$$

$$\begin{array}{r} 49 \\ 145 \overline{) 84'0} \\ \underline{5} \overline{) 725} \\ \underline{115} \end{array} \quad \begin{array}{r} 25 \\ \underline{5} \end{array} \quad \begin{array}{r} 1 \\ \underline{28} \end{array}$$

¹⁾ 0,00104 числана хушнипе иккёллө знак \leq улшайса $<$ знак ҫине куҫни курансах тәрәт, $>$ знак ҫавах юлать (мөншөн тесен $0,00104 < 0,01$).

117. $\frac{1}{100}, \frac{1}{1000}$ т. ыт. таран төрөслөхпө сывхартна корень.

$\sqrt{248}$ корене $\frac{1}{100}$ таран төрөслөхпө сителёксёр сывхартса тупмалла пултәр. Вәл тулли единицәсенчен тата вуннәмөшпө сөрмөш пайёсенчен тәракан вуншарлә вак тупмаллине тата вәл сак икё условие килёшсе тәмаллине пёлтерет: 1) унән квадратчө 248-тан пысак пулмалла мар, анчах 2) вәл вак сүмне $\frac{1}{100}$ хушсан, сак пысаклатна вак квадратчө 248-тан пысак пулмалла. Вәл вака эфир сакән пек йөркепө тупса пыратпәр: малтан тулли числине, унтан вуннәмөш пайёсен цифрине, кун хысқан сөрмөш пайёсен цифрине тупатпәр. Тулли числоран корень 15 тухать. Вуннәмөш пайёсен цифрине тупас тесен, па сәрхи пек, юлашки 23 сүмне запятайәран сылтәмри икё цифрана антарса сүрмалла:

$$\sqrt{2'48',00'00} = 15,74$$

1	1 4'8	1 2 5	2 3 0'0	1 510'0
25	5	307	7	3144
	5	7	4	4
				252 4

Пирән төслөхрө вәл цифрасем сук; вөсен вярәнне нульсем лартатпәр, юлашки 23 сүмне нульсем сыратпәр та, 24800 тулли числоран корень тупна пек, малалла шутласа вуннәмөш пайёсен цифрине 7 тупатпәр. Малалла сөрмөш пайёсен цифрине тупмалли юлать. Савна тума юлашки 151 сүмне тата икё нуль сыратпәр та, 2480000 числоран корень тупна пек, малалла шутлатпәр. Вара пирән 15,74 пулать. Ку чәнах та 248 числоран $\frac{1}{100}$ таран төрөслөхпө сителёксёр сывхартса тупна корень пулни сакантан курәнать. 2480000 тулли числоран чи пысак тулли квадратлә кореньне тупна пулсан, 1574 пулатчө; апла пулсан:

$$1574^2 \leq 2480000, \text{ анчах } 1575^2 > 2480000.$$

Кашни числине 10000 ($= 100^2$) сине пайласан, сапла пулать:

$$\frac{1574^2}{100^2} \leq 248,0000; \quad \frac{1575^2}{100^2} > 248,0000,$$

урәхла каласан

$$\left(\frac{1574}{100}\right)^2 \leq 248,0000; \quad \left(\frac{1575}{100}\right)^2 > 248,0000,$$

е

$$15,74^2 \leq 248; \quad 15,75^2 > 248.$$

Сапла ёнтө, 248 числоран $\frac{1}{100}$ таран төрөслөхпө сывхартса тупна корень 15,74 вуншарлә вак пулать.

• Ҷақ майпах $\frac{1}{1000}$, $\frac{1}{10000}$ т. ыт. таран тёрёслёхпе ҫывхартнă кореньсене тупнă чухне те усă курса, ҫакан пек правило калама пултаратпăр:

Правило. Панă тулли числоран е панă вуншарлă вакран $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{100}$, $\frac{1}{1000}$ т. ыт. таран тёрёслёхпе ҫителёксёр ҫывхартнă корень тупас тесен, малтан 1 таран тёрёслёхпе ҫителёксёр корень тупаҫсё (панă числон тулли пайё ҫук пулсан, кореньте 0 ҫыраҫсё).

Унтан вуннăмеш пайёсен цифрине тупаҫсё. Ӑна тупма юлашки ҫумне радикал айёнчи числон запятайӑран сылтӑмри икё цифрине антарса ҫыраҫсё (вёсем ҫук пулсан, юлашки ҫумне икё нуль ҫыраҫсё), вара тулли числоран корень тупнă пекх шутлаҫсё. Тупнă цифрӑна кореньти вуннăмеш пайсен вырӑнне ҫыраҫсё.

Малалла ҫёрмеш пайёсен цифрине тупаҫсё. Ӑна тупма юлашки ҫумне кун умён антарнисенчен сылтӑмра тӑракан икё цифрине антараҫсё тата малалла та ҫаплах.

Ҫапла вара, тулли тата вуншарлă ваклă числоран корень тупнă чухне ҫақ числона запятайӑран сулахаялла та (числон тулли пайне), сылтӑмалла та (ваклă пайне) икшер цифрӑн уйӑрса тухмалла.

Тёслёхсем.

1. $\frac{1}{100}$ таран тёрёслёхпе кореньсем тупмалла: а) $\sqrt{2}$; б) $\sqrt{0,3}$.

а) $\sqrt{2} = 1,41$ б) $\sqrt{0,30} = 0,54$

$\begin{array}{r} 1 \\ 24 \overline{) 10'0} \\ \underline{4 } \\ 281 \overline{) 40'0} \\ \underline{1 } \\ 119 \end{array}$	$\begin{array}{r} 25 \\ 104 \overline{) 50'0} \\ \underline{4 } \\ 84 \end{array}$
--	---

2. $\frac{1}{1000}$ таран тёрёслёхпе кореньсем тупмалла: а) $\sqrt{0,38472}$;

б) $\sqrt{\frac{3}{7}}$.

а) $\sqrt{0,38'47'20} = 0,6202$

$\begin{array}{r} 36 \\ 122 \overline{) 24'7} \\ \underline{2 } \\ 12402 \overline{) 3200'0} \\ \underline{2 } \\ 7196 \end{array}$

б) $\sqrt{\frac{3}{7}} = \sqrt{0,42'85'71'42}$

$\begin{array}{r} 36 \\ 125 \overline{) 68'5} \\ \underline{5 } \\ 1304 \overline{) 60'7'1} \\ \underline{4 } \\ 13086 \overline{) 85'54'2} \\ \underline{6 } \\ 7026 \end{array}$	$\sqrt{0,42'85'71'42} = 0,6546$
---	---------------------------------

Юлашки төсләхре $\frac{3}{7}$ вакән кореньне тупма а́на вуншарлӓ вака куҗартӓмӓр. Кореньте вуншарлӓ знаксем 2 пулмашкӓн вака 4 ушкӓна уйӓрас тесе, а́на 8 вуншарлӓ знака җити шутларӓмӓр.

А сӓрхат тарни. Нумай числосенчен квадратлӓ корене тупса җырнаӓ (пӓр-пӓр паллӓ төрӓслӓх таран җывхартса шутланӓ) таблицӓсем пур. Вӓл таблицӓсемпе усӓ курмалли мелсене таблицӓсен умӓн каланисенче кӓтартса параҗҗӓ.

118. Ахаль ваксенчен корень тупасси. Кӓскелмен вакән икӓ членӓ те төрӓс квадрат пулсан кӓна, унӓн шӓп төрӓс квадратлӓ кореньне тупма пулать (§ 114). Ун пек чухне числителӓпе знаменателӓнчен уйрӓммӓн корень тупмалла, сӓмахран:

$$\sqrt{\frac{9}{16}} = \frac{\sqrt{9}}{\sqrt{16}} = \frac{3}{4}.$$

Ахаль ваксенчен пӓр-пӓр вуншарлӓ төрӓслӓхӓ таран җывхартнӓ кореньне тупма җав вака малтан вуншарлӓ вака куҗарсан аван; вара вуншарлӓ вакән запятая хыҗҗӓнхи вуншарлӓ знаксем тупмалли кореньти вуншарлӓ знаксенчен икӓ хут нумай рах пулмалла. Калӓпӓр $\sqrt{2\frac{3}{7}}$ җывхартса 0,01 таран төрӓслӓхпе тупмалла пултӓр, урӓхла каласан, җав кореньте запятая хыҗҗӓн икӓ вуншарлӓ знак пулмалла пултӓр. А́на тупма $2\frac{3}{7}$ вака вуншарлӓ вака куҗаратпӓр та 4 вуншарлӓ знака җитиччен шутлӓпӓр: $2\frac{3}{7} = 2,4285\dots$, вара 2,4285 числоран 0,01 таран төрӓслӓхпе җывхартса корень тупатпӓр:

$$\begin{array}{r} \sqrt{2,4285} = 1,55 \\ 1 \\ 25 \overline{) 14'2} \\ 5 \overline{) 12\ 5} \\ 305 \overline{) 1\ 78'5} \\ 5 \overline{) 1\ 52\ 5} \\ \hline 26\ 0 \end{array}$$

Урӓхларах шутлама та пулать. А́на җак төслӓхре пӓхса тухӓпӓр:

җак $\sqrt{\frac{5}{24}}$ җывхартса тупмалла пултӓр.

Знаменательне төрӓс квадрат тӓватпӓр. Вӓл төрӓс квадрат пултӓр тесе, вакән икӓ членне те 24 җине хутламалла пулнӓ пулӓччӓ; анчах ку төслӓхре урӓхларах шутлама та пулать. Знаменателӓн простой хутлаканнисене тупӓпӓр: $24 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3$. Кун пек уйӓрсан җакӓ курӓнать: 24 числоран тата 2-пе 3 җине хутласан, произведенире кашни простой хутлаканни хӓйне хӓй җине мӓшӓрлӓн хутлавать, җапла вара знаменатель квадрат пулса тӓрать:

$$\sqrt{\frac{5}{24}} = \sqrt{\frac{5}{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3}} = \sqrt{\frac{5 \cdot 2 \cdot 3}{2^4 \cdot 3^2}} = \frac{\sqrt{30}}{2^2 \cdot 3} = \frac{\sqrt{30}}{12}.$$

Малалла числителән $\sqrt{30}$ пәр-пәр тәрәсләхпә ҫывхартса туп-малли тата результатне 12 ҫине пайласси юлатъ. Анчах 12 ҫине пайласан, корене мәнле тәрәсләхпә тупнине кәтартакан вак те пәчәкленет. Сәмахран, $\sqrt{30}$ ҫывхартса $\frac{1}{10}$ таран тәрәсләхпә тупатпәр та 12 ҫине пайлатпәр пулсан, $\frac{5}{24}$ вакән $\frac{1}{120}$ таран тәрәсләхпә ҫывхартнә кореньне тупатпәр $(\frac{54}{120}$ тата $\frac{55}{120})$.

Упражненисем.

Ҫывхартнә кореньсене тупәр:

204. $\sqrt{13}$ 1 таран, $\sqrt{13}$ 0,1 таран; $\sqrt{13}$ 0,001 таран.

205. $\sqrt{101}$ $\frac{1}{100}$ таран; $\sqrt{0,8}$ 0,01 таран.

206. $\sqrt{0,0081}$ $\frac{1}{100}$ таран; $\sqrt{19,0969}$ $\frac{1}{100}$ таран.

207. $\sqrt{356}$ 1-не, унтан 0,1-не, юлашкнчен 0,01-не ҫити ҫывхартса пәләр.

208. Малтан кашни вакне вуншарлә знаксем ҫителәклә пуличчен, вуншарлә вака куҫарса, ҫак ваксен квадратлә кореньне 0,01 таран ҫывхартса тупәр

$$\frac{3}{5}, \frac{3}{7}, \frac{7}{11}, \frac{5}{12}, \frac{7}{250}.$$

209. Ҫав ваксенченех, ваксене вуншарлә вака куҫармасәр, знаменателәсене тәрәс квадрат туса, квадратлә корень тупәр.

210. Кореньсене тупәр:

$$\sqrt{0,3}, \sqrt{5,7} \quad (\text{иккәшне те } \frac{1}{10} \text{ таран}),$$

$$\sqrt{2,313}, \sqrt{0,00264} \quad (\text{иккәшне те } \frac{1}{100} \text{ таран}).$$

Историллә сведенисем.

Рудольф математик 1525 султа корене тупас действие $\sqrt{\quad}$ палләпа ҫырма тытәннә. Унччен маларах вәл действие тулли сәмахпа „корень“ (латинла radix) тесе ҫырың. Кайран вәл сәмаха кәскетсе, малти саспаллине кәна ҫыра пусланә, ку саспаллирен вара пурәннәсем $\sqrt{\quad}$ паллә тухса кайнә.

УЛТТАМЁШ СЫПĀК.

КВАДРАТЛĀ УРАВНЕНИ.

119. Задача. МоторлĀ кимё 7 сехет хушшинче шыва майĀн 28 км анса, ҫавĀнтах каялла хĀпарнĀ. Шыв сехетре 3 км юхатъ пулсан, юхман шывра кимё мёнке хĀвĀртлĀхпа ҫўренине пёлмелле.

Кимён юхман шыври хĀвĀртлĀхё сехетре x км пултĀр; вара вĀл шыва майĀн сехетре $(x+3)$ км, шыва хирёҫ сехетре $(x-3)$ км кайнĀ пулатъ. Ҫапла вара, 28 км тĀршшёне кимё шыва майĀн $\frac{28}{x+3}$ сехет кайнĀ, каялла шыва хирёҫле $\frac{28}{x-3}$ сехет кайнĀ, вара пётёмпе 7 сехет иртнё.

Задача условийё тĀрĀх пирён ҫакĀн пек уравнени пулатъ:

$$\frac{28}{x+3} + \frac{28}{x-3} = 7.$$

Ваксене знаменательсёр ҫырса, ҫапла пулатъ:

$$28(x-3) + 28(x+3) = 7(x+3)(x-3),$$

ур. кал.

$$28x - 84 + 28x + 84 = 7(x^2 - 9),$$

е

$$56x = 7x^2 - 63.$$

Ку уравненире паллĀмар член иккёмёш степеньлё, анчах ун-тан пысĀкрах степеньлё паллĀмар член урĀх ҫук. ҪавĀн пек уравнение *иккёмёш степеньлё е квадратлĀ уравнени* теҫҫё.

Уравнение лартса пĀхсан, ку уравненин коренёсем 9 тата — 1 пулнине пёлетпёр, анчах вёсенчен пёри кĀна задача отвечё пулма пултаратъ.

Халё квадратлĀ уравненисене шутламалли пётёмёшле правило тĀвĀпĀр.

120. КвадратлĀ уравненин нормальнĀй сĀнё. КвадратлĀ уравненире (ҫавнашкалах пысĀкрах степеньлё уравненисенче те), тёрлё улшĀнусем туса кёскен ҫырнĀ хыҫҫĀн, пур членсене пёр енне—сулахай енне куҫараҫҫё, вара сылтĀм енче нуль кĀна пулатъ. Ҫапла, кун умёнхи задачĀна шутлама тунĀ уравненин членёсене пёр енне куҫарса, вĀл ҫакĀн пек пулатъ:

$$56x - 7x^2 + 63 = 0.$$

Уравнение x саспаллин пёчёкленекен степень йёркипе ҫырса, ҫапла пулатъ:

$$-7x^2 + 56x + 63 = 0.$$

— 7, + 56, + 63 числосене сак квадратлӑ уравненин коэффициентсем теҫҫе; вӑсенчен + 63 числосна паллӑ (е ирӑк) член теҫҫе; — 7 тата + 56 числосене пӑрремӗшне иккӗмӗш коэффициентсем теҫҫе (квадратлӑ уравнение эфир яланах x -ӑн пӑчӑкленекен степень йӑркипе ҫыраҫҫе тетпӑр). Ку числосем положительнай та, отрицательнай та, нуль те пулма пултарасҫе (пӑрремӗш коэффициентчӑ кӑна нуль пулма пултараймасть, апла пулсан, уравнени квадратлӑ пулман пулӑччӑ). Виҫе коэффициентран пӑри те нуль пулмасан, уравнение тулли квадратлӑ уравнени теҫҫе. Кун пек уравненин нормальный сӑнӑ ҫакӑн пек пулать:

$$ax^2 + bx + c = 0.$$

Пӑрремӗш a коэффициентне эфир яланах положительнай тума пултаратпӑр, ӑна тума ытти членӑсен умӑнчи паллӑсене хирӑҫле паллӑсемпе улӑштарса ҫырмалла кӑна (урӑхла каласан, уравненин икӑ пӑйне те — 1 ҫине хутламалла). Ҫавӑнпа ҫӑлте асӑнӑн уравнение ҫапла ҫырма пулать:

$$7x^2 - 56x - 63 = 0.$$

121. Туллимар квадратлӑ уравненисене шутласси. Квадратлӑ уравненире пӑрремӗш степеньлӑ x -ӑн членӑ е паллӑ членӑ ҫук пулсан, урӑхла каласан, е иккӗмӗш b коэффициентчӑ, е паллӑ c членӑ нуль пулсан, ӑна туллимар квадратлӑ уравнени теҫҫе; $b = 0$ пулсан, уравнени $ax^2 + c = 0$ пулать; $c = 0$ пулсан, $ax^2 + bx = 0$ пулать (хӑш чухне пӑр вӑхӑтрах $b = 0$, $c = 0$ пулма пултарать; вара уравнени $ax^2 = 0$ пулать). Пур туллимар квадратлӑ уравненисене те мӑйле шутламаллине пӑхса тухӑпӑр.

1. $ax^2 + c = 0$ сӑнлӑ туллимар квадратлӑ уравнени. Ҫакӑн пек виҫе тӑслӑх илер:

а) $3x^2 - 27 = 0$. Паллӑ членне сылтӑма куҫарсан, $3x^2 = 27$ пулать; ҫапла вара, $x^2 = 9$. Ҫавӑнпа x 9-ӑн квадратлӑ коренӑпе тан, урӑхла каласан, + 3 е — 3 пулать. Коренӑн арифметикалла пӑлтерӑшне $\sqrt{\quad}$ паллӑпа ҫырма йышӑнӑпӑр; вара эфир ҫапла ҫырма пултаратпӑр: $x = \pm \sqrt{9} = \pm 3$. Ҫапла ӗнтӑ панӑ уравнение 2 тӑрлӑ шутлама пулать. Вӑсенчен пӑрне x_1 , теприне x_2 паллӑ тусан, эфир ку решенисене ҫапла ҫырма пултаратпӑр:

$$x_1 = +\sqrt{9} = +3, \quad x_2 = -\sqrt{9} = -3.$$

б) $2x^2 - 0,15 = 0$. Паллӑ членне сылтӑма куҫарсан ҫапла пулать:

$$2x^2 = 0,15 \text{ тата } x^2 = 0,075.$$

Апла пулсан:

$$x = \pm \sqrt{0,075}.$$

$\sqrt{0,075}$ корене, калӑпӑр, $\frac{1}{100}$ таран тӑрӑслӑхпе ҫывхартса тупатпӑр (§ 117):

$$\sqrt{0,0750} = 0,27$$

$$\begin{array}{r} 47 \overline{) 35 \cdot 0} \\ 7 \overline{) 32 \cdot 9} \\ \underline{21} \end{array}$$

Ҷапла ёнтё, $x_1 = 0,27 \dots$, $x_2 = -0,27 \dots$

в) $2x^2 + 50 = 0$. 50-не сылтама куҗарсан, Ҷапла пулать:

$$2x^2 = -50; \quad x^2 = -\frac{50}{2} = -25; \quad x = \pm \sqrt{-25}.$$

Отрицательный числоран квадратля кореньне тупма Ҷук пирки, ку уравненин чан-чан (вещественный) ответё пулмасть.

Ҷапла ёнтё, $ax^2 + c = 0$ сәнля туллимар квадратля уравнение Ҷапла шутлаҗҗё:

$$ax^2 = -c; \quad x^2 = -\frac{c}{a}; \quad x = \pm \sqrt{-\frac{c}{a}}.$$

Радикал айёнци — $\frac{c}{a}$ выражени положительный число пулсан (въл a -па c членсен паллисем тёрлё чухне пулать), вара унтан квадратля кореньне (Ҷывхартса е шӑп тёрёс) тупма пулать, ун чухне x пёлтерёшё иккё пулать: вёсен абсолютля пысӑкӑшёсем пёрех пулаҗҗё, анчах пёри положительный, тепри отрицательный пулать. Радикал айёнци — $\frac{c}{a}$ выражени отрицательный число пулсан (въл a -па c членсен паллисем пёрпек чухне пулать), вара уравненин чан коренёсем пулаҗҗё.

2. $ax^2 + bx = 0$ сәнля туллимар квадратля уравнени. Уйрам тёслёхшён $2x^2 - 7x = 0$ уравнение илер. Сулахай пайёнце общи хутлаканнине x -а скобка тулашне кӑларар:

$$x(2x - 7) = 0.$$

Халё уравненин сулахай енё произведени пулчё, сылтӑм енё нуль. Анчах хутлаканнисенчен хӑшё те пулин нуль пулсан кӑна, произведени нуль пулма пултарать; Ҷавӑнпа е пёрремёш хутлаканни x нульпе тан пулсан, е иккёмёш хутлаканни $2x - 7$ нульпе тан пулсан кӑна, пирён уравнени тёрёс пулать (Ҷапла ёнтё $x = \frac{7}{2}$ чухне). Апла пулсан, пирён уравнение икё тёрлё шутлама пулать:

$$x_1 = 0, \quad x_2 = \frac{7}{2} = 3\frac{1}{2}.$$

Ҷапла ёнтё, $ax^2 + bx = 0$ сәнля туллимар квадратля уравнение Ҷапла шутлаҗҗё:

$$ax^2 + bx = 0; \quad x(ax + b) = 0; \\ x_1 = 0; \quad ax_2 + b = 0; \quad x_2 = -\frac{b}{a}.$$

3. $ax^2 = 0$ сәнля туллимар квадратля уравнени. Паллах, ку уравненин пёр корень $x = 0$ анчах пулма пултарать.

Упраженисем.

211. $3x^2 - 147 = 0$; $\frac{1}{3}x^2 - 3 = 0$; $x^2 + 25 = 0$.

212. $\frac{3(x^2 - 11)}{5} - \frac{2(x^2 - 60)}{7} = 36$; $\frac{4}{x - 3} - \frac{4}{x + 3} = \frac{1}{3}$.

213. $2x^2 - 7x = 0$; $\frac{3}{7}x^2 + x = 0$; $0,2x^2 - \frac{3}{4}x = 0$.

214. $x^2 = x$; $x^2 - 16x = 0$; $7x^2 = 0$; $0,7x^2 = 0$.

215. $(x - 2)(x - 5) = 0$; $x(x + 4) = 0$; $3(y - 2)(y + 3) = 0$.

122. Тулли квадратлă уравненисене шутламалли тĕслĕхсем
Малтан 119 §-ри задачăна шутлама тунă уравнение илер:

$$7x^2 - 56x - 63 = 0.$$

Кашни членне 7 çине пайласа, паллă членне сылтăма куçарар:

$$x^2 - 8x = 9.$$

Халĕ çакан пек ыйту лартăпăр: сылтăмри $x^2 - 8x$ двучлен
çумне виççĕмĕш член хушса, тулли квадрат пулса тăра-
кан трехчлен тума пулмĕ-ши? Ку ыйту çине эфир çапла çырсан
çамăллăнах ответ пама пултаратпăр:

$$x^2 - 2x \cdot 4.$$

Халĕ ĕнтĕ паллă, ку двучлен çумне виççĕмĕш член 4^2 хушса
çырсан, çапла тупатпăр:

$$x^2 - 2x \cdot 4 + 4^2,$$

вăл $x - 4$ разноçан квадратчĕ пулат. Уравненин сулахай пайне
 4^2 (е 16) хушрăмăр пулсан, сылтăма та çав числонах хушма
тивет, вара çапла пулат:

$$x^2 - 8x + 16 = 9 + 16, \text{ е } (x - 4)^2 = 25.$$

Çапла ĕнтĕ $x - 4$ разность квадратчĕ 25 пулчĕ пулсан, хай
разноçĕ 25-ĕн квадратлă коренĕпе (5 числопа е -5 числопа) тан
тупмалла:

$$x - 4 = +\sqrt{25} = +5 \text{ е } x - 4 = -\sqrt{25} = -5.$$

Сулахайри -4 членне сылтăма куçарсан, икĕ тĕрлĕ шутланать

$$x_1 = 4 + 5 = 9; \quad x_2 = 4 - 5 = -1.$$

Панă уравненишĕн икĕ тĕрлĕ шутлани те юрăхлă (ăна тĕрĕс-
лесе пĕлме пулат) анчах уравнени тунă задача условийĕшĕн
отрицательнай отечĕ -1 юрăхлă мар, мĕншĕн тесен задачăра
хăвăртлăх хăш еннеллине мар, унăн абсолютлă пысăкăшне кăна
тупмалла.

Иккĕмĕш тĕслĕхшĕн $3x^2 + 15x - 7 = 0$ уравнени илер.

Пур членне те 3 çине пайласа, паллă членне сылтăма куçарар:

$$x^2 + 5x = \frac{7}{3}.$$

Сулахай енне $x^2 + 5x$ двучлен çумне виççĕмĕш член $\left(\frac{5}{2}\right)^2$ хуш-
сан, сумман квадратчĕ пулат. Ку члена уравненин икĕ пайĕ
çумне те хушсан, çапла пулат:

$$x^2 + 5x + \left(\frac{5}{2}\right)^2 = \left(\frac{5}{2}\right)^2 + \frac{7}{3},$$

$$\left(x + \frac{5}{2}\right)^2 = \frac{25}{4} + \frac{7}{3} = \frac{75 + 28}{12} = \frac{103}{12}.$$

Кунта ĕнтĕ: $x + \frac{5}{2} = \pm \sqrt{\frac{103}{12}}$; çапла вара:

$$x_1 = -\frac{5}{2} + \sqrt{\frac{103}{12}}; \quad x_2 = -\frac{5}{2} - \sqrt{\frac{103}{12}}.$$

$\frac{103}{12}$ числом $\frac{1}{10}$ таран төрөслөхпө сывахартна кореньне тупар:

$$\sqrt{\frac{103}{12}} = \sqrt{8,58} \dots = 2,9 \dots$$

Ҷапла вара:

$$x_1 = -2,5 + 2,9 \dots = 0,4 \dots, \quad x_2 = -2,5 - 2,9 \dots = -5,4 \dots$$

123. Приведеннай квадратла уравнени коренёсен формули. Квадратла уравненин пёрремёш коэффициентё +1 пулсан, вёл уравнение при веденнай уравнени теҶҶё. Уравненин пёрремёш коэффициентё 1 пулмасан та ана кёскетме, кун умёнхи төслөхри пек, уравненин кашни членне пёрремёш коэффициентё Ҷине пайлама пулать. Приведеннай уравненин пётёмёлё сәнё Ҷакан пек пулать:

$$x^2 + px + q = 0.$$

Уйрәм төслөхсене шутланә чухнехи пекех, Ҷак саспаллилёлё уравнение шутлар. Ирёлкёлё членне сылтәм енне куҶарар:

$$x^2 + px = -q.$$

$px = 2x \cdot \frac{p}{2}$ Ҷырма пулать пулсан, сулахай пайёнче тулли квадрат пултәр тесе, уравненин икёл енне те $(\frac{p}{2})^2$ хушар:

$$x^2 + px + (\frac{p}{2})^2 = -q + (\frac{p}{2})^2.$$

Халёл уравнение Ҷапла Ҷырма юрать:

$$(x + \frac{p}{2})^2 = (\frac{p}{2})^2 - q.$$

Кунтан Ҷапла тупатпәр:

$$x + \frac{p}{2} = \pm \sqrt{(\frac{p}{2})^2 - q} \text{ тата } x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{(\frac{p}{2})^2 - q}.$$

Ку формулаңа Ҷапла калама пулать:

Приведеннай квадратла уравненин коренёл—хире-хирёл паллапа илнёл иккёлмёл коэффициент Ҷуррипе, плюс-минус квадратла корень айёлнчи Ҷав коэффициент Ҷуррин квадратёлнчен палла член каларнай разноҶёпе тан пулать.

Ку формулаңа саспаллипе Ҷырма та, сәмахпа калама та пёлес пулать.

Төслөхсем:

1. $x^2 - x - 6 = 0$. Ку уравнение саспаллилёлё уравнени: $x^2 + px + q = 0$ евёрлёл тавас тесе, Ҷапла сырпәр:

$$x^2 + (-1)x + (-6) = 0.$$

Халёл ку төслөхре $p = -1$, $q = -6$ пулать; Ҷаванпа:

$$x = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 6} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4}} = \frac{1}{2} \pm \frac{5}{2};$$

$$x_1 = \frac{1}{2} + \frac{5}{2} = 3; \quad x_2 = \frac{1}{2} - \frac{5}{2} = -2.$$

Төрөслени: $3^2 - 3 - 6 = 0$; $(-2)^2 - (-2) - 6 = 0$.

2. $x^2 - 18x + 81 = 0$; кунта, $p = -18$, $q = 81$; җаванпа:

$$x = 9 \pm \sqrt{81 - 81} = 9 \pm 0 = 9.$$

Уравненин пёр корень җеҗ пулать.

3. $x^2 - 2x + 5 = 0$; $x = 1 \pm \sqrt{1 - 5} = 1 \pm \sqrt{-4}$. Коренёсем мнимый пулаҗҗеҗ.

Упражненисем.

216. $x^2 + 10x + 5 = 2x^2 - 6x + 53$.

217. $x^2 + 6x = 27$.

218. $x^2 - 5\frac{3}{4}x = 18$.

219. $12x - \frac{6}{x} = 21$.

220. $\frac{x}{7} + \frac{21}{x+5} = 6\frac{5}{7}$.

221. $x + 2 = \frac{9}{x+2}$.

222. $\frac{x-5}{4} - \frac{4}{5-x} = \frac{3x-1}{4}$.

223. $x + \frac{1}{x-3} = 5$.

224. $\frac{2x}{x-d} = \frac{x-d}{d}$.

225. t мёнле пёлтерёшлө чухне $2t - 5$ выраженипе $t - 4$ выражени произведенийё $t + 8$ суммйапа тан пулать.

226. $abx^2 - (a^2 + b^2)x + ab = 0$.

124. Квадратлй уравнени коренёсен пётёмёшле формули. $ax^2 + bx + c = 0$ уравненин пур членёсене те a җине пайласан, приведенный уравнени пулать:

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0.$$

Ку уравнение кёскетнө приведенный формулйапа шутласан, җапла пулать:

$$x = -\frac{b}{2a} \pm \sqrt{\left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{c}{a}}.$$

Ку выражение җакан пек җамаллатса җырма пулать:

$$\begin{aligned} x &= -\frac{b}{2a} \pm \sqrt{\frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}} = -\frac{b}{2a} \pm \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}} = \\ &= -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}. \end{aligned}$$

Ку формулйапа лайх астума кирлө; җамаха йна җапла калама пулать:

Тулли квадратлй уравненин коренё җакан пек вакпа тан: унан числитель хирёҗле паллйапа илнө иккёмёш коэффициентё, плюс-минус квадратлй корень айёнче җав коэффициентан квадратёнчен пёрремёш коэффициентпа паллйа члена таватй хут илнө произведение каларна разноҗе пулмалла, знаменательё вара икө хут илнө пёрремёш коэффициентё пулать.

Ку формулйапа пётёмёшле формула теме юрать, мёншён тесен унна приведенный уравнение те ($a = 1$ пулсан) туллимар квадратлй уравненисене те ($b = 0$ е $c = 0$ пулсан) шутлама пулать.

125. Коэффициент b мәшәрлә число чухне, пётёмёшле формулаңа сәмәллатни. Коэффициент b мәшәрлә число пулсан, пётёмёшле формулаңа сәмәллатма пулать. Сәмахран, $b = 2k$ пултәр, вара:

$$x = \frac{-2k \pm \sqrt{4k^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-2k \pm \sqrt{4(k^2 - ac)}}{2a} = \frac{-2k \pm 2\sqrt{k^2 - ac}}{2a} = \frac{-k \pm \sqrt{k^2 - ac}}{a}.$$

Ку формулаңа пётёмёшле формулаңи пек 4-па 2 хутлакан цифрәсем сүкки сөс уйрәм.

126. Квадратла уравни коренёсен шучё. Квадратла уравненисен коренёсем хаш чухне иккё, хаш чухне пёрре пулние тата хашпёр чух пёр корень те пулманнине (коренёсем мнимай чухне) эфир куртәмәр ёнтё. Анчах сәпла пулсан та, квадратла уравнин яланах икё корень пулать теме килёшнё. Кун чухне вара сәв коренёсем хаш чухне пёртан, хаш чухне мнимай пуласине шута илнё. Сәпла килёшни акә мёnten килет: мнимай коренёсем кёрекен формулаңсен свойствисем чән коренёсен свойствисемпе пёрех, мнимай числосемпе действисем тунә чухне чән числосем валли тунә правиләсемпе кәна усә курмалла тата $(\sqrt{-a})^2 = -a$ пулние асра тытмалла. Сәкнашкалах, уравнин пёр корень сөс пулсан, аңа та икё пёртан коренёлё уравнини теме йышәннә.

Упражненисем.

227. $2x^2 - 3x - 5 = 0$. 228. $(2x - 3)^2 = 8x$.

229. $5x^2 - 8x + 0,24 = 0$. 230. $65x^2 + 118x - 55 = 0$.

231. $(x - 3)(x - 4) = 12$. 232. $\frac{x}{x + 60} = \frac{7}{3x - 5}$. 233. $x + \frac{1}{x} = a + \frac{1}{a}$.

234. Юнашар тәракан виҗё мәшәрлә число квадратёсен сумми 776 пулмалла. Сәв числосене тупәр.

235. Прямоугольникан лаптәкё 48 кв. см, периметрё 28 см. Енёсене пёлёр.

236. Түркётслё треугольникан енёсем виҗё юнашар тәракан тулли числосем пулассё. Унән енёсене тупәр.

237. Многоугольникан енёсен шучё n пулсан, унән пур диагоналёсен шучё $\frac{1}{2}n(n - 3)$ пулать. Диагональсен шучё 54 пултәр тесен, многоугольникан енёсем миҗе пулмалла.

238. Аэроплан 5 $\frac{1}{2}$ сехетре тўрё сұлпа сילה май 450 км вёрсё, часах сילה хирёс каялла, сәв ыраңах ситнё. Аэроплан ним силсёр чух сехетре 165 км каять пулсан, сәв силён сехетри хәвәртләхне пёлёр.

239. Темиҗе тутәршән 60 тен. тўленё. Сәв суммаңах 3 тутәр ытларах илнё пулсан, кашни тутәрё 1 тенкё йўнёрех тәнй пулеччё. Миҗе тутәр илнё?

240. Пёрремёш класри ачасене кашнине пёртан валеҗсе 240 листа хут сатлатнә. Иккёмёш класри ачасене те кашнине пёртан валеҗсе 240 листа пётнё, вара иккёмёш класри кашни ача пёрремёш класри ачаран 2 листа ытларах илнё. Иккёмёш класра пёрремёш класринчен 10 ача сахалтарах пулсан, пёрремёш класра кашни ача миҗе листа илнё?

УПРАЖНЕНИИ СЕН ОТВЕЧЕ СЕМ.

1. $4a; a^2$. 2. $6m^2; m^3$. 3. $x(x-d)$. 4. $10x+y$. 5. $100a+10b+c$.
 6. $\frac{ma+nb}{a+b}$ 7. $x^2+y^2; (x+y)^2; x^2y^2; (xy)^2; (a+b)(a-b); \frac{m+n}{m-n}$ e
 $(m+n):(m-n)$. 8. 84; 44; 552; 336; $9\frac{1}{3}; 5\frac{3}{5}$. 9. $3(x+y)(x-y)$. 10. $3a+2b$;
 $13+12=25$. 11. $5+ab-4a; a+2x$. 12. $n; 5a^2b^2x^3$. 13. $6xyz; 2ax$.
 14. $5x+15; 7x+7y+7z$. 15. $\frac{a}{2}+2b-c; 5a^2b$. 16. $8x-2y; 4ax$. 17. $\frac{a}{b}; 3x$.
 18. $+10; -10; +3$. 19. $-3; +8; -2$. 20. $0; -3; +1$. 21. $-1; -2; +2$.
 22. $+2$. 23. 0 . 24. $b-a; -5$ (убытка). 25. $m-n; -10$ (пара́м). 26. $14; 10$;
 $18; 2$. 27. $a+b; m+n; 5x$. 28. 12 . 29. $-1\frac{3}{4}$. 30. $+5$. 31. $10+(-2)+$
 $+(-3)+7$. 32. $10-(-8)$. 33. $+6; -14; +80$. 34. $-23\frac{3}{8}$; 0,054. 35. $+1$;
 $-1; +1; -1$. 36. 27. 37. -27 . 38. $0; 0; 0; 0$. 39. $3\frac{1}{16}$. 40. $+5; -5$;
 $-5; +5$. 41. $-a; -5; x^2$. 42. $0; 0; 0; 0$. 46. $10a^3x^3; -10a^2bx^2$;
 $-\frac{3}{8}a^2bx^2; -20m^2x^2y^2$. 47. $a+a; ax+ax+ax; a^2b+a^2b+a^2b+a^2b+a^2b$;
 $(a+1)+(a+1)+(a+1)+(a+1)$. 48. $90; \frac{13}{15}; 2\frac{25}{48}; -28; -936$. 49. $0; 31$;
 -4 . 50. $+1$ тара -1 . 51. $a^3x^2+4\frac{1}{2}a^2x^3$. 52. $2x-16,3xy$. 53. $a+3\frac{1}{2}mxy^2$.
 54. $a-3\frac{1}{2}mxy^2$. 55. $4a^3-3a^2b-13ab^2$. 56. $x^5-7a^2x^3$ 57. $2z$.
 58. $4x^3+x^2+3x+1$ 59. $8a^3-11a^2b+14ab^2-3b^3$. 60. p^2+q^2+15 .
 61. $4x^2+3y^2-y-1$. 62. $\frac{1}{4}x^2-x+\frac{4}{5}$. 63. $4a^2+4b^2-c^2$. 64. $x^2+y; 2m$ "
 $-2n$. 65. $b-2c$. 66. $4x^2$. 67. $a-(b+c-d); a-b+(-c+d);$
 $a-(b+c)+d$. 68. $15a^3b^7c; \frac{5}{8}a^2x^6$. 69. $0,81a^3b^2x^3; a^6b^8c^3$. 70. $\frac{9}{49}m^2x^4y^6$.
 $8a^9b^3x^6$; 71. $0,01x^2my^6; \frac{1}{8}m^6n^3y^9$. 72. $6a^3b-4ab^4+2abc$. 73. $25a^3b-20a^4b^2+$
 $+15a^5b^3-35a^6b^4$. 74. $am+bm-cm-an-bn+cn; 6a^2-3ab+2ab^2-b^3$.
 75. $2a^2-\frac{1}{2}b^2; x^3-y^3$. 76. x^3+y^3 . 77. $6x^2+5xy-6y^2; y^4-1$. 78. x^6+
 $+1008x+720$. 79. $x^9-x^5-x^4+2x^3-x^2-x+1$. 80. x^6-a^6 . 81. a^2+2a+1
 $1+4a+4a^2; x^2+x+\frac{1}{4}$ 82. $9a^4+6a^2+1; 0,01m^2x^2+mx^3+25x^4$.
 83. $25a^2-20a+4; 9x^2-12ax+4a^2; 9a^4-3a^2+\frac{1}{4}$. 84. $101^2=(100+1)^2=$
 $=100^2+2\cdot 100\cdot 1+1^2=10201; 997^2=(1000-3)^2=\dots=994009$ т. ыт. те.
 85. $4m^2-12mn+9n^2; 9a^4x^2-24a^3xy+16a^2y^2; 0,04x^6-0,15x^3+\frac{9}{64}$.
 86. $\frac{1}{4}x^4-3\frac{1}{2}x^2+\frac{49}{4}x^2; 0,0625p^2-0,1pq+0,04q^2$. 87. $a^2-1; 4a^2-25$. 88. $4x^2-9; 1-a^4$.
 89. $(x^2+1)(x^2-1)=x^4-1; (4x^2+y^2)(4x^2-y^2)=16x^4-y^4$. 90. $[(m+n)-p][(m+n)+p]=$
 $=(m+n)^2-p^2; a^2-(b+c)^2=a^2-b^2-2bc-c^2$. 91. $a^2+3a^2+3a+1=$
 $a^3-3a^2+3a-1; 8x^2+36x^2+54x+27; 125+225x+135x^2+27x^3$
 92. $\frac{1}{8}m^3-\frac{3}{2}m^2+6m-8; \frac{27}{64}p^3+\frac{9}{16}p^2q+\frac{1}{4}pq^2+\frac{1}{27}q^3; 125-225x+135x^2-$

- $-27x^3$. 93. $2a^2xy$; $-\frac{3}{5}x^2$. 94. $-\frac{6}{5}a^3$; $3am-1b^2$. 95. $\frac{16}{3}a+8b-16a^2b^4$. 96. $9x^2-6ax+a^2$.
 97. $1-2y+y^2-y^3$. 98. $x-4$; $y+1$. 99. $3x^2-2$. 100. $3ax^3$. 101. $x-a$.
 102. $2(a+x)$; $a(x+y)$; $2y(2y-3x)$. 103. $2a(2x-y)$; $3xy(2x+3y)$.
 104. $3ab(4a-3ab+2b^2)$; $xy(y-7+4x)$. 105. $(m+n)(m-n)$; $(a+1)(a-1)$;
 $(1+a)(1-a)$; 106. $(x+2)(x-2)$; $(m+3)(m-3)$; $(2x+y)(2x-y)$.
 107. $\left(\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}y^3\right)\left(\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{3}y^3\right)$; $(0,1a^3+3)(0,1a^3-3)$; $3a(a^2+4b^4)(a+2b^2)(a-2b^2)$.
 108. $(x-y+a)(x-y-a)$; $[3(a+2b)+1][3(a+2b)-1]$; $(a+b+c)(a-b-c)$.
 109. $(x+y+x-y)(x+y-x+y)=2x \cdot 2y=4xy$; $4(x-y)(3x+y)$. 110. $(x-y)^2$; $(m+n)^2$.
 111. $(a+b)^2$; $(a-2b)^2$. 112. $(x+4)^2$; $(x+1)^2$. 113. $5a(a-2b)^2$. 114. $(a+b)^2-c^2=$
 $=(a+b+c)(a+b-c)$; $a^2-(b^2+2bc+c^2)=a^2-(b+c)^2=(a+b+c)(a-b-c)$.
 115. $(a+b)x+(a+b)y=(a+b)(x+y)$; $a(c-d)+b(d-c)=(a+c-d)-$
 $-b(c-d)=(c-d)(a-b)$. 116. $a(a+b)-(a+b)=(a+b)(a-1)$; $xz+$
 $+xy-3y-3z=x(y+z)-3(y+z)=(y+z)(x-3)$. 117. $4mn-2nx+xy-$
 $-2my=2n(2m-x)+y(x-2m)=2n(2m-x)-y(2m-x)=(2m-x)(2n-y)$;
 $(2a-3)(2a-3)(2a+3)$. 118. $\frac{5x}{7y}$; $\frac{3ab}{10m}$; $\frac{8a^2}{11b}$; $\frac{25m}{59n}$. 119. $\frac{9ab}{10x^2}$; $\frac{14a^3}{15b}$;
 $\frac{12x-1}{4a-4b}$. 120. $\frac{17(a+b)}{34}=\frac{a+b}{2}$; $\frac{2(9a-7)}{6-a}$. 121. $\frac{ax^2+bx+c}{ax^2+x}$; $\frac{x^2+ax-b}{x^2-x}$.
 122. $\frac{x-1}{x}$; $\frac{3a^2}{b-a}$; $\frac{a-1}{b-2}$. 123. $\frac{a^2+b^2-2ab}{a-b}$; $\frac{m^2-1}{m-1}$. 124. $-\frac{3x}{6}$; $-\frac{5x^2}{3}$;
 $-\frac{a-1}{b}$; $-\frac{a}{x-2}$; $-\frac{m^2-n^2}{m-n}$. 125. $\frac{1}{x}$; $\frac{2}{3m}$; $\frac{2a}{3b}$; $\frac{3xy}{8}$. 126. $\frac{3b}{2x}$; $\frac{ac}{4b}$;
 $\frac{16axy^3}{15}$. 127. $\frac{b}{a+b}$; $\frac{3y}{x-y}$; $\frac{a+2}{a-2}$. 128. $\frac{a+1}{a-1}$; $\frac{1}{x+3}$; $\frac{a}{a-1}$. 129. $\frac{x-1}{2x(+1)}$;
 $\frac{a+x}{3b-cx}$; $\frac{5a}{a-x}$. 130. $(a+b)(a-b)$; $\frac{1}{y^2-1}$. 131. $\frac{18}{6a}$; $\frac{4a}{6a}$; $\frac{4x^2}{12xy}$; $\frac{3y^2}{12xy}$;
 $\frac{x^2}{4x}$; $\frac{16}{4x}$. 132. $\frac{4bc}{2abc}$; $\frac{6ac}{2abc}$; $\frac{ab}{2abc}$; $\frac{105b^2x^2}{60a^2b^2x}$; $\frac{40a^2x^4}{60a^2b^2x}$; $\frac{48a^2b^4}{60a^2b^2x}$. 133. $\frac{12a^2bcmx^2y}{9a^3b^2c}$; $\frac{2a^2bx}{8a^3b^2}$; $\frac{y}{8a^3b^2}$. 134. $\frac{15x^3}{40abx^3}$; $\frac{120abx^4}{40abx^2}$; $\frac{8a^2b}{40abx^3}$. 135. $\frac{3(x+y)^2}{6(x^2+y^2)}$;
 $\frac{2(x-y)^2}{6(x^2-y^2)}$; $\frac{m-1}{m^2-1}$; $\frac{2}{m^2-1}$; $\frac{3(m-1)}{m^2-1}$. 136. $\frac{2}{(x-1)^2}$; $\frac{3a(x-1)}{(x-1)^2}$; $\frac{2x-1}{(x-1)(x-1)}$;
 $\frac{(x-1)(2x-1)}{2ab(a+b)}$; $\frac{1}{b(a^2-b^2)}$. 137. $\frac{6bc+3ac+2ab}{6abc}$; $\frac{6+5x}{3x^2}$; $\frac{2x-1}{2a-2x-5}$.
 138. $\frac{x^2-5x+2}{x^2}$. 140. $\frac{1+x}{2}$; $\frac{5x-6}{3}$; $\frac{5-2x}{3}$. 141. $\frac{1}{1-4x^2}$.
 142. $\frac{2a^2b-ab-2b^2-a^2}{a(a+b)(a-b)}$. 143. $\frac{m^2}{(m+n)(n-1)}$. 144. $-\frac{6b}{7x^3}$; $\frac{1}{5(1+a)x}$.
 145. $\frac{12p^2q^2x^2y^2}{n^4a^3}$; $2a(x-1)$. 146. $\frac{a(a+2b)}{b^2}$; $\frac{9b^2c^2x^2}{16a^2z^2}$. 147. $\frac{3a^3}{5mp}$;
 $15a^2x^2y$. 148. $\frac{1}{5(a-b)}$; $\frac{x+y}{x-y}$. 149. 3-мёш, 4-мёш, 6-мёш пертанляхсем — уравне-
 нисем, ыттисем — тождествасем. 150. 17; 5; 5. 151. 27; 9; 12. 152. 3; 2; $\frac{13}{20}$.
 153. 2,7; 50. 154. 9; -3; -4. 155. 1; $5\frac{3}{7}$. 156. $2\frac{6}{11}$. 157. $7\frac{1}{13}$. 158. 2.
 159. $-17\frac{25}{27}$. 160. 1348 тата 1200. 161. 20, 30, 50. 162. $2\frac{1}{2}$. 163. 12,8 кг
 тата 19,2кг. 164. 15 км тата 18 км. 165. 0. 166. $\frac{c}{2(a-b)}$. 167. $\frac{4-4a}{b-3}$.

168. $h < \frac{2q}{b_1 + b_2}$ 169. $x = 2, y = 1; x = 1, y = -2; x = -3, y = -3$.
170. $x = -\frac{1}{2}, y = 1; x = 5, y = 1; x = 7, y = 2$ 171. $x = \frac{35}{13}, y = -\frac{23}{13}$;
172. $x = \frac{c}{a + bm}, y = \frac{mc}{a + bm}; x = \frac{a + bm}{mn - 1}, y = \frac{an + b}{mn - 1}$ 173. $a = 3, b = -5$.
174. 1 г. 10п., 40 пус. 175. 40 тата 25. 176. 200; 11 км. 177. $1\frac{2}{3} м, 13\frac{1}{3} м$ тата
- $9\frac{2}{3} м, 9\frac{1}{3} м$. 178. $x = 2, y = 3, z = 5$. 179. $x = 3\frac{1}{2}, y = 2\frac{1}{4}, z = 4$.
180. $x = 4, y = 0, z = 5$. 181. $x = 51, y = 76, z = 1$. 182. $x = 8, y = 10, z = 5$.
183. $x = 36, y = 6$. 184. $x = 2, y = 4, z = 1, u = 5$. 185. $x = 6, y = 12, z = 8$.
186. 2-мёш уравнение 3-мёше хушсан, пулать: $2x = 32, x = 16$. Пёрремёш уравнени-
рен 2-мёшне кяларсан, пулать: $2z = 11, z = 5\frac{1}{2}$. Юлашкинчен, 1-чен 3-мёшне кя-
ларсан, пулать: $2y = 15\frac{1}{2}, y = 7\frac{3}{4}$. 187. $1\frac{7}{8}$ тен.; $\frac{1}{2}$ тен.; 5 тен. 188. 133; 150; 76.
189. $\pm 10; \pm 0,1; \pm \frac{1}{2}; \pm \frac{3}{4}; \pm a; \pm x$. 190. 5; 27; $a; 1 + x$. 191. $+3; -3;$
 $+\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}, -0,1$. 192. $\pm 2; \pm \frac{1}{2}; \pm 3$; мнимйй числосем. 193. $\pm 6; \pm 0,25;$
 $\pm 2ab; \pm 3axy^2$. 194. $-3ab; \pm \frac{1}{2}ax; \sqrt[5]{a} \sqrt[5]{b} \sqrt[5]{c}$. 195. $\pm a^2; \pm 2^2;$
 $\pm x^3; \pm (a + b)^2$. 196. $2^2; -a^2; x^3; (m + n)^2$. 197. $\frac{2}{5}; -\frac{3}{10}; \frac{a^2}{b}; \sqrt[3]{\frac{x}{y}}; \pm \sqrt{\frac{x}{y}}$.
198. $\pm 5a^2bc^2; \pm 0,6x^2y^2 \pm \frac{1}{2}(b + c)^2x^2$. 199. 17; 65; 247 763; 200. 368; 978;
7563. 201. 8276; 20 548 202. 534 762. 203. Тулли число квадратён юлаш-
ки цифри сак пирвайхи 10 число (0, 1, 2, 3, ..., 9) квадратёсен юлашки циф-
ринчен пёри пулма кирлэ. Анчах сак квадратсенчен пёрин те юлашки цифри
2 те мар, 3 те мар, 7 те мар, 8 та мар. 204. 3; 3,6; 3,606. 205. 10,05; 0,89.
206. 0,09; 4,37. 207. 19; 18,9; 18,89 208. 0,77; 0,65; 0,79; 0,65; 0,17. 209. $\frac{1}{5}\sqrt{15} =$
 $= \frac{387}{500} \left(\frac{1}{5000} \text{ таран} \right); \frac{1}{7}\sqrt{21} = \frac{458}{700} \left(\frac{1}{7000} \text{ таран} \right); \frac{1}{11}\sqrt{77} = \frac{877}{1000} \left(\frac{1}{1100} \right.$
таран); $\frac{1}{12}\sqrt{60} = \frac{774}{1200} \left(\frac{1}{1200} \text{ таран} \right); \frac{1}{250}\sqrt{1750} = \frac{4183}{25000} \left(\frac{1}{25000} \text{ таран} \right);$
210. 0,5; 2,4; 1,52; 0,05. 211. $\pm 7; \pm 3; \pm \sqrt{-25}$. 212. $\pm 9; \pm 9$.
213. 0 тата $3\frac{1}{2}$; 0 тата $-2\frac{1}{3}$; 0 тата 3,75. 214. 0 тата 1; 0 тата 16; 0; 0.
215. 2 тата 5; 0 тата -4 ; 2 тата -3 . 216. 12 тата 4. 217. 3 тата -9 . 218. 8 тата
 $-2\frac{1}{4}$. 219. 2 тата $-\frac{1}{4}$. 220. 44 тата -2 . 221. 1 тата -5 . 222. 6 тата -3 .
223. 4. 224. $d(2 \pm \sqrt{3})$. 225. $t_1 = 6; t_2 = 1$. 226. $\frac{a}{b}$ тата $\frac{b}{a}$. 227. $2\frac{1}{2}$ тата -1 .
228. $4\frac{1}{2}$ тата $\frac{1}{2}$. 229. $\approx 1,5694; \approx 0,0306$. 230. $\frac{5}{13}; -\frac{11}{5}$ 231. 7 тата 0. 232. 14 тата
 -10 . 233. $a; \frac{1}{a}$ 234. 14, 16, 18 тата $-18; -16, -14$. 235. 6 тата 8. 236. 3, 4, 5.
237. 12. 238. сехетре 15 км. 239. 12. 240. 40 ача вёренекек класри кашни ача
6-шар листа илнэ.

ТУПМАЛЛИ.

Стр.

Стр.

ПЁРРЕМЁШ СЫПЪК.

МАЛТАНХИ АНЛАНУСЕМ.

I. Алгебрӑри палласен йёрки.

1. Саспаллисемпе усӑ кураcси	3
2. Алгебрӑлла выражени	4
3. Алгебрӑра пӑхса тухакан дей- ствисем	5
4. Алгебрӑра йышӑнӑ палласем —	
5. Действисен йёрки	6

II. Малтанхи арифметикалла тӑватӑ действин свойствисем.

6. Хушасси	8
7. Кӑларасси	9
8. Хутласси	—
9. Пайласси	10
10. Действисен свойствисемпе усӑ кураcси	12

ИККЁМЁШ СЫПЪК.

ОТНОСИТЕЛЬНӐЙ ЧИСЛОСЕМ ТАТА ВЁСЕМПЕ ДЕЙСТВИСЕМ ТӐВАССИ.

I. Икё тёрлӑ хире-хирӗсле ӑн- ланмалли пысӑкӑшем ҫинчен ӑнлантарни.

11. Задачӑсем	14
12. Икё тёрлӑ хире-хирӗсле ӑнлан- малли ытти пысӑкӑшем	15
13. Относительнӑй числосем	16
14. Числосене число тӗнелӑ ҫин- че кӑтаргасси	17

II. Относительнӑй числосене хушасси.

15. Задача	18
16. Икё число хушасси	—
17. Хушассин правилине тепӑр тёрлӑ калани	20
18. Виҫӗ е ытларах число ху- шасси	—

III. Относительнӑй числосене кӑларасси

19. Задача	20
20. Разноҫе икё хушӑнакантан пӑрне тупӑ пек тупасси	21
21. Кӑларассин правила	22
22. Икё паллӑн формули	23
23. Алгебрӑлла суммӑра разноҫь	
24. Относительнӑй числосене пы- сӑкӑшӗ тӑрӑх танлаштарни	24

IV. Относительнӑй числосене хушассипе кӑларассин тӑп свойствисем.

25

V. Относительнӑй числосене хутласси.

26. Задача	26
27. Отрицательнӑй число ҫине хутласси	28
28. Хутлассин правила	29
29. Виҫӗ е ытларах число произ- веденийӗ. Произведени палли.	30
30. Отрицательнӑй число степенӗ.	—

VI. Относительнӑй числосене пайласси.

31. Определени	31
32. Пайлассин правила	—
33. Пайланакани е пайлакани нуль пулӑ чухнехи тӗслӗхсем.	32

VII. Хутлассипе пайлассин тӑп свойствисем.

34

ВИҫӖМЁШ СЫПЪК.

ОДНОЧЛЕНСЕМПЕ МНОГОЧ- ЛЕНСЕН ТУЛЛИ ВЫРАЖЕНИ- ЙЕСЕМ.

АЛГЕБРӐЛЛА ВАКСЕМ.

I. Малтанхи ӑнланусем.

35. Одночлен тата многочлен	36
36. Коэффициент	37
37. Многочлен свойствисем	—

38. Пёрвевёрлэ членсене пёрлеш-тересси 38

II. Алгебралла хушассипе каларасси.

39. Одночленсене хушасси 39
40. Многочленсене хушасси 40
41. Одночленсене каларасси —
42. Многочленсене каларасси 41
43. Умёнче + e — палла таракан скобкасене урасси —
44. Многочленн членёсене скобка йшне илесси 42

III. Алгебралла хутласси.

45. Одночленсене хутласси 43
46. Одночленн квадратёпе кубё 44
47. Многочлена одночлен сине хутласси 45
48. Многочлена многочлен сине хутласси —
49. Йёркеленё многочлен 47
50. Йёркеленё многочленсене хутласси —
51. Произведенин асла членёпе кеёсн членёсем —
52. Произведенири членсен шучё 48
53. Двучленсене хутлассин хайпёр формулисем —
54. Сак формулаёсемпе уса курасси 49
55. Икё число суммипе разносён кубё —

IV. Алгебралла пайласси.

56. Одночленсене пайласси 50
57. Нульё катарту 51
58. Одночленсем пайланманнин паллисем —
59. Многочлена одночлен сине пайласси 52
60. Одночлена многочлен сине пайласси —
61. Многочлена многочлен сине пайласси 53
62. Йёркеленё многочленсене пайласси —
63. Многочленсем пайланманнин паллисем 55

V. Хутлаканнисем сине уйрасси.

64. Малтан асърхаттарни —
65. Тулли одночленсене хутлаканнисем сине уйрасси 56
66. Многочленсене хутлаканнисем сине уйрасси —

VI. Алгебралла ваксем.

67. Алгебралла вакпа арифметикалда вак уйрамлахё 58

68. Вакн тёп свойстви 59
69. Вак членёсене тулли число пек тавасси —
70. Вак членёсен паллисене улаштарасси 60
71. Ваксене кёскетгесси —
72. Ваксене общи знаменательлэ тавасси 61
73. Ваксене хушассипе каларасси 62
74. Ваксене хутласси 63
75. Вакн квадратёпе кубё 64
76. Ваксене пайласси —
77. Асърхаттарнисем 65

ТАВАТТАМЁШ СЫПАК.

ПЁРРЕМЁШ СТЕПЕНЬРИ УРАВНЕНИСЕМ.

I. Уравненисен пётёмшле свойствисем

78. Пёртанлаёхсемпе вёсен свойствисем 66
79. Гожество —
80. Уравнени 67
81. Пёрпёлтерёшлэ уравненисем 68
82. Уравненисен пёрремёш свойстви 69
83. Следствисем 70
84. Уравненисен иккёмёш свойстви —
85. Следствисем 71
86. Уравненин пайёсене пёр алгебралла выражени сине хутлассипе пайласси 72
87. Ют кореньсем —

II. Пёр палламар числолла уравнени.

88. Пёрремёш степеньлэ пёр палламар числолла уравненисене шутласси 73
89. Уравнени тавасси сичен 75
90. Саспаллилэ уравненисем 77

III. Пёрремёш степеньлэ уравненисен системи

Икё палламар числолла икё уравнени системи.

91. Задача 78
92. Пёрремёш степеньлэ икё палламар числолла уравненин нормальнй сине 79
93. Икё палламар числолла пёр уравненин палламарлахё 80
94. Уравненисен системи —
95. Вырэнне лартса шутламалли мел —
96. Алгебралла хушса шутламалли мел 81

97. Саспалли коэффициентлә уравни- нисен системи	Стр. 83
---	------------

Виçе палләмар числол-
лә виçе уравненин
системи.

98. Пёрремеш степеньлэ виçе палләмар числолла уравне- нин нормальнай сәнэ	84
99. Виçе палләмар числолла икэ уравненин тата пёр уравне- нин палләмарлэхэ	—
100. Виçе палләмар числолла виçе уравненин системи	85
101. Вырәнне лартса шутламалли мел	—
102. Алгебралла хушса шутламал- ли мел	86

Уравненин хәшпёр
уйрәм төслэхәсем.

103. Панә уравненисенче кашни- чех хәшпёр палләмар чис- лосем пулмассё.	87
104. Уравненири палләмар чис- лосем дробь пулса тйраçсё: $\frac{1}{x}, \frac{1}{y}, \dots$	—
105. Панә уравненисене хушса шутлама усаллә	89

пиллөкмеш сыпак.

КВАДРАТЛӘ КОРЕНЕ ТУПАССИ.

I. Кореньсен төп сойствисем.

106. Корене определени пани	91
107. Арифметикалла корень	—
108. Алгебралла корень	92
109. Произведения, степенен тата вакән кореньне тупасси.	93

II. Числосен квадратлә кореньне тупасси.

110. Малтан асърхатгарнисем	95
111. 10 000-тен пөчөкрех, 100-тен пысакрах тулли числосенчен корень тупасси	—
112. 10 000-тен пысакрах тулли числосенчен корень тупасси	98
113. Кореньти цифрасен шучё	100

III. Квадратлә кореньсене çывхартса тупасси.

114. Шәп төрөс корень тупма çуккин икэ төслэхэ	—
115. Пёрре таран төрөслэхпе çыв- хартса тупна корень	101
116. $\frac{1}{10}$ таран төрөслэхпе çыв- хартна корень	—
117. $\frac{1}{100}, \frac{1}{1000}$ т. ыт. таран төрөс- лэхпе çывхартна корень	103
118. Ахаль ваксенчен корень тупасси	105

УЛТТӘМӘШ СЫПӘК.

Квадратлә уравнени.

119. Задача	107
120. Квадратлә уравненин нор- мальнай сәнэ	—
121. Туллимар квадратлә уравне- нисене шутласси	108
122. Тулли квадратлә уравнени- не шутламалли төслэхсем	110
123. Приведенный квадратлә урав- нени коренесен формули.	111
124. Квадратлә уравнени коренё- сен пөтөмөшле формули	112
125. Коэффициент b мәшәүрлә число пулса, пөтөмөшлө форму- лана çәмәллатни	113
126. Квадратлә уравнени коренё- сен шучё	—

Упражненисен
отвечөсем 114

ЧУВАШСКАЯ
КНИЖНАЯ ПЕЧАТЬ

г. Чебоксары, Чувашская АССР

Отв. редактор *В. К. Емелькин.*

НТ 4076. Подписано к печати 4/II-41 г. Тираж 13.000 экз.
Печатных листов 7,5; Заказ № 455

Тип. № 1 Управления издательств и полиграфии при СНК Чувашской АССР
Гор. Чебоксары, Дом печати.

Цена 1 руб. 10 коп.

А. П. КИСЕЛЕВ
А Л Г Е Б Р А
Ч А С Т Ь I

На чувашском языке

ГОСИЗДАТ ЧАССР
ЧЕБОКСАРЫ ♦ 1941