А. П. КИСЕЛЕВ

ГЕОМЕТРИ

ТУЛЛИМАР ВӐТАМ ТАТА
ВӐТАМ ШКУЛ ВАЛЛИ

ПӖРРЕМӖШ ПАЙӖ

ЧӐВАШГОСИЗДАТ ◆ 1941

А. П. КИСЕЛЕВ

ГЕОМЕТРИ

ПӖРРЕМӖШ ПАЙӖ

ПЛАНИМЕТРИ

Туллимар вӑтам тата вӑтам шкулсен 6—9-мӗш
класӗсенче вӗренмелли кӗнеке

Н. А. Глаголев проф. редакцилен҆ӗ
тата хушса ҫырнӑ

*РСФСР Ҫутӗҫ Халӑх
Комиссариачӗ ҫирӗплетнӗ*

*Куҫарнине Чӑваш АССР Ҫутӗҫ
халӑх комиссариачӗ ҫирӗплетнӗ*

ПӖРРЕМӖШ ИЗДАНИ

ЧӐВАШ АССР ГОСУДАРСТВО ИЗДАТЕЛЬСТВИ
ШУПАШКАР ◆ 1941

УМСӐМАХ.

А. П. Киселевӑн элементарнӑй геометри кӗнеки вӑрӑм вӑхӑт хушши геометри вӗренмелли кӗнекесенчен чи нумай сарӑлнӑ кӗнеке пулнӑ. Унӑн тӗпре тӑракан пахалӑхӗсем ҫаксем пулса тӑраҫҫӗ: ку кӗнекене ҫӑмӑл, уҫӑ чӗлхепе вӑтам шкулсенче вӗренекенсем ӑнланмалла ҫырнӑ.

Ҫак вӗренмелли кӗнекене тӳрлетсе ҫырнӑ, ӑна вӑтам шкулсен хальхи программисемпе килӗштернӗ; кӗнекери ҫитменлӗхсене тӳрлетес тесе, унти хӑшпӗр уйрӑм ыйтусене тата сарлакарах ҫутатса парас тесе, кӗнекери нумай вырӑнсене улӑштарнӑ тата нумай тӗлте хушса ҫырнӑ. Принциплӑ ыйтусенче авторӑн текстне тӗпренех улӑштарнӑ. Ҫак пичетленсе тухакан кӗнекен пӗрремӗш пайӗнче (планиметрире) ытларах палӑрса тӑракан улшӑнусем ҫаксем пулса тӑраҫҫӗ: линисен татӑкӗсене виҫес ыйту ҫумне вӗҫӗмсӗр вуншарлӑ ваксем хушнӑ; пӗрьевӗрлӗх теорине пӗрьевӗрлӗ преобразованин пӗрлехи задачипе ҫыхӑнтарнӑ; ҫавракӑш тӑршшӗне виҫес ыйту ҫинчен тата лайӑхрах ҫырнӑ; лаптӑксене виҫес теори ҫинчен ҫырнине тӳрлетнӗ тата ӑна, ӑнланма лайӑх пултӑр тесе, кӑштах ҫӑмӑллатса ҫырнӑ; уйрӑм теоремӑсем геометрин пӗтӗм курсӗнче мӗнле вырӑн йышӑнса тӑнине кӑтартса панӑ; хӑшпӗр чылай йывӑр задачӑсене епле шутламалли ҫинчен кӑтартса пани ҫумне тата хушса кӑтартса панӑ; чертеж тума панӑ задачӑсене шутлама вӗрентекен методсене автор, приложени пек туса, кӗнеке хыҫне кӗртнӗ пулнӑ (вӗренекен, геометри вӗреннӗ чух, вӗсемпе паллашма тата усӑ курма пултартӑр тесе); халӗ вӗсене кирлӗ таран улӑштарса, хӑйсене тивӗҫлӗ вырӑнӗсене вырнаҫтарнӑ; шутлама панӑ задачӑсен пӗр пайне кӑларса пӑрахнӑ: теорипе практика тӗлӗшӗнчен сахал усӑллӑ задачӑсене кӑларса пӑрахнӑ; „отношенисемпе пропорцисем ҫинчен“ ҫырнӑ сыпӑка пӗтӗмпех кӑларса пӑрахнӑ, мӗншӗн тесен вӑл хальхи вӑхӑтра йӑлтах кивве тухнӑ.

Кунсӑр пуҫне тата кӗнекен пӗрремӗш пайӗ ҫумне ҫаксем ҫинчен хушса ҫырнӑ: 1) фигурӑсен симметрийӗ ҫинчен (тӗнӗл тата центр тӗлӗшӗнчен симметриллӗ фигурӑсем ҫинчен 37 §-ра тата 84—86 §-сенче); фигурӑсене пӗрьевӗрлӗ преобразовани тӑвасси ҫинчен, многоугольниксене перспективлӑ вырнаҫтарасси ҫинчен тата ҫавракӑшсен пӗрьевӗрлӗхӗ ҫинчен (173—178 §-сенче); 3) числоллӑ последовательноҫӗн пределӗ ҫинчен тата улшӑнакан пысӑкӑш ҫинчен (227—231 §-сенче) хушса ҫырнӑ.

Ҫак вӗренмелли кӗнекене ҫӗнетсе ҫырнӑ чух, ӑна тата тӗрӗсрех ҫырса пама, уйрӑм ыйтусене тата сарлакарах ҫутатса пама, çавӑн пекех тата геометрилле преобразовани пулса тӑракан движени, симметри, пӗрьевӗрлӗх çинчен калакан геометрин тӗп идейисене кӗнекере тата хӑшпӗр текстра мӗн вырӑн çитнӗ таран малти план çине кӑларса тӑратма тӑрӑшнӑ. Кунтан пуçне тата, вӗренекенсене вулама чӑрмавлӑ ан пултӑр тесе, кӗнекери текста çӗнетнӗ чух, пӗр стильпе çырма тӑрӑшнӑ.

Н. Глаголев.

Верея х., 20/II 1938 ç.

УМӖН КАЛАНИ.

1. **Геометрилле фигурӑсем.** Пространствӑн пур енчен те хупӑрланӑ пайне **геометрилле япала** теҫҫӗ.

Геометрилле япалан **ҫийӗ** пур, вӑл ӑна йӗри-таврари пространствӑран уйӑрса тӑрать.

Ҫийӗн пайне хӑйпе юнашар пайран **лини** уйӑрса тӑрать.

Лини пайне хӑйпе юнашар пайран **точка** уйӑрса тӑрать.

Геометрилле япала, ҫи, лини тата точка пӗр-пӗринчен уйрӑм тӑма пултараймаҫҫӗ. Анчах шухӑшпа эпир геометрилле япаларан ҫие, ҫийӗнчи линие, линирен точкӑна уйӑрса пӑхма пултаратпӑр. Ун чух вара ҫийӗн хулӑмӑшӗ, линин хулӑмӑшӗпе сарлакӑшӗ, точкӑн ни тӑршшӗ, ни сарлакӑшӗ, ни хулӑмӑшӗ пулмалла мар.

Пространствӑра вырнаҫнӑ тӗрлӗ точкӑсен, линисен, ҫисен е япаласен пӗрлешӗвне, пӗтӗмӗшпе йлсен, геометрилле **фигура** теҫҫӗ. Геометрилле фигурӑсем нимӗн улшӑнмасӑрах пространствӑра пӗр вырӑнтан тепӗр вырӑна куҫма пултараҫҫӗ. Пространствӑри геометрилле икӗ фигурӑран пӗрне куҫарса тепӗрин ҫине хурсан, вӗсем иккӗшӗ те хӑйсен пур пайӗсемпе те пӗр-пӗрин ҫине вырнаҫсан, вӗсене вара пӗртан фигурӑсем **теҫҫӗ**.

2. **Геометри.** Геометрилле фигурӑсен свойствисем ҫинчен вӗрентекен наукӑна **геометри** теҫҫӗ; грексен чӗлхинчен куҫарсан, вӑл **ҫӗрвиҫни** тени пулать. Кун пек ят ҫак наукӑна акӑ мӗншӗн панӑ: ӗлӗк геометрин чи кирлӗ ӗҫӗ ҫӗр ҫийӗнчи япаласен хушшисене тата вӗсен площадӗсене виҫесси пулнӑ.

Тӳремҫи.

3. **Тӳремҫи.** Тӗрлӗ ҫисенчен пуринчен ытла эпир тӳрӗ ҫие, е тӳремҫие пӗлсе тӑратпӑр, ун ҫинчен пире, сӑмахран, чӳречен лайӑх кӗленче ҫийӗ, е пӗвери лӑпкӑ шыв ҫийӗ т. ы. те пӗлтерсе тӑраҫҫӗ.

Тӳремҫин акӑ ҫакӑ свойствисене кӑтартса парӑпӑр:

Тӳремҫин кирек хӑш пайне те унӑн мӗнпур точкисемпе ҫакӑ е урӑх тӳремҫин тепӗр вырӑнӗ ҫине куҫарса хума юрать, хунӑ чух ӑна малтан тепӗр енне ҫавӑрма юрать.

Тӳрӗ лини.

4. **Тӳрӗ лини.** Чи простой лини—тӳрӗ лини. Тӳрӗ лини ҫинчен пурте лайӑх пӗлсе тӑраҫҫӗ. Ун ҫинчен пире хытӑ карӑнтарнӑ ҫип е пӗчӗк шӑтӑкран тухакан ҫутӑ пайӑрки пӗлтерсе тӑрать. Ку шухӑшпа тӳрӗ линин ак ҫак тӗп свойстви килӗшсе тӑрать:

Пространствăн кирек хăш икĕ точки урлă тӳрĕ лини туртма пулать, анчах пĕр лини кăна туртма пулать.

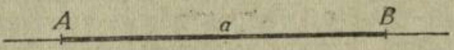
Ку свойствăран çакă тухса тăрать:

Икĕ тӳрĕ линие пĕр-пĕрин çине хурсан, пĕр тӳрĕ линин икĕ точки тепĕр тӳрĕ линин икĕ точки çине шăпах вырнаçсан, çак икĕ тӳрĕ лини вара хăйсен ытти пур точкисемпе те пĕр-пĕрин çине шăпах вырнаçаççĕ (мĕншĕн тесен унсăрăн икĕ точка урлă уйрăм тăракан икĕ тӳрĕ лини туртса хума пулĕччĕ, анчах вăл пулма пултараймасть).

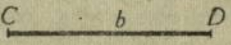
Çавăн пиркиех ĕнтĕ икĕ тӳрĕ лини пĕр точкăра кăна пĕр-пĕрин урлă каçса кайма пултараççĕ.

Тӳрĕ лини тӳремçи çинче выртма пултарать. Тӳремçин акă çак свойстви пур:

Тӳремçи çинче пĕр-пĕр икĕ точка илсен, вĕсем урлă тӳрĕ лини туртсан, вара тӳрĕ линин пур точкисем те çав тӳремçире выртаççĕ.



1 черт.



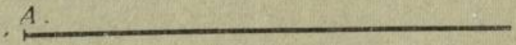
2 черт.

5. **Вĕçĕмсĕр тӳрĕ лини; пайăрка; тӳрĕ лини татăкĕ.** Шухăшпа икĕ енне те вĕçĕмсĕр тăснă тӳрĕ линие **вĕçĕмсĕр (е пӳлмен)** тӳрĕ лини теççĕ.

Тӳрĕ линие ялан икĕ пысăк саспаллисемпе паллă тăваççĕ, саспаллисене унăн пĕр-пĕр икĕ точки тĕлне лартаççĕ. Çапла вара „*AB*“ е „*BA* тӳрĕ лини“ теççĕ (1 черт.).

Икĕ енчен те пӳлнĕ тӳрĕ линин пайне **тӳрĕ линин татăкĕ** теççĕ; тӳрĕ линин татăкне яланах икĕ саспаллипе паллă тăваççĕ, саспаллисене унăн икĕ вĕçĕ тĕлне лартаççĕ (тӳрĕ линин *CD* татăкĕ, 2 черт.). Хăш чух тата тӳрĕ линие е унăн татăкне пĕр саспаллипе те (пĕчĕк саспаллипе) паллă тăваççĕ; сăмахран, „*a* тӳрĕ лини, тӳрĕ линин *b* татăкĕ“, теççĕ т. ыт. те.

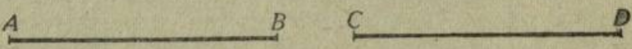
Нумай чух эпир „тӳрĕ линин татăкĕ“ тесе калас вырăнне кĕскен „татăк“ тейĕпĕр.



3 черт.

Хăш чух тӳрĕ линие пĕр енчен кăна пӳлнĕ пулать, сăмахран, *A* точка патĕнчен (3 черт.). Ун пек тӳрĕ лини çинчен: вăл точкăран тухать, теççĕ; ăна **пайăрка (е çурматӳрлини)** теççĕ.

6. **Тӳрĕ лини татăкĕсен пĕртанлăхĕпе танмарлăхĕ.** *Пĕр тӳрĕ лини татăкне тепĕр тӳрĕ лини татăкĕ çине хурсан, вĕсен вĕçĕсем пĕр-пĕрин çине шăпах вырнаçсан, вĕсем пĕртан пулаççĕ.*



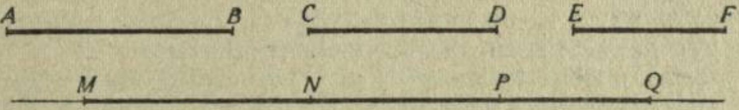
4 черт.

Сăмахран, *AB* татăка *CD* татăк ҫине (4 черт.) хурар, *A* точкăна *C* точка ҫине пĕр ҫĕре вырнаҫтарар. *AB* татăка *CD* татăк тăрăх ярар; вĕсен *B* тата *D* вĕҫĕсем пĕр-пĕрин ҫине шăпах вырнаҫсан, вара *AB* татăк *CD* татăкпа пĕртан пулать; пĕр-пĕрин ҫине вырнаҫмасан, вăл татăксем пĕртан пулмаҫҫĕ; вĕсенчен пĕри, пĕр татăкĕ тепĕр татăкĕн пайĕ пулса тăраканни, кĕске пулать.

Пĕр-пĕр тӳрĕ лини ҫине панă татăк тăршшĕ тепĕр татăк виҫсе хунă чух, **циркульпе** усă кураҫҫĕ; циркуле вĕренекен ачасем пĕлеҫҫĕ.

7. Тӳрĕ лини татăкĕсен сумми. Панă *AB*, *CD*, *EF*,... татăксен сумми тесе акă ҫапла майпа тупнă татăка калаҫҫĕ (5 черт.).

Мĕнле те пулин тӳрĕ лини ҫинче пĕр-пĕр *M* точка илер, ҫак точкăран пуҫласа тӳрĕ лини тăрăх *AB* тăршшĕ *MN* татăк виҫсе хурар, унтан ҫак еннеллех *N* точкăран *CD* тăршшĕ *NP* татăк виҫсе хурар, юлашкинчен *EF* тăршшĕ *PQ* татăк виҫсе хурар. Ун чух вара *MQ* татăк *AB*, *CD*, *EF* татăксен (хушнă татăксен) сумми пулать. Ҫапла тусан, кирек мĕн чухлĕ татăксен суммине те тупма пулать.



5 черт.

Татăксен сумминче числосен суммин пур свойствисем те пур; сăмахран, хушăнакан татăксен йĕркине улăштарнипе сумма улшăнмасть (ылмаштару законĕ); хăшпĕр хушнă татăксем вырăнне вĕсен суммине хушсан, сумма улшăнмасть (пĕрлештерӳ законĕ). Сăмахран:

$$AB+CD+EF=AB+EF+CD=EF+CD+AB=\ldots$$

тата

$$AB+CD+EF=AB+(CD+EF)=CD+(AB+EF)=\ldots$$

8. Татăксемпе действисем тăвасси. Сумма ăнланăвĕнчен татăксен разность ăнланăвĕ, татăксене отвлеченнăй число ҫине хутлассипе пайлассин ăнланăвĕсем тухса тăраҫҫĕ. Сăмахран, *AB* тата *CD* татăксен разноҫĕнчен (*AB* татăк *CD* татăкран пысăк пулсан: $AB>CD$) виҫҫĕмĕш татăк пулса тăрать, вăл татăкпа *CD* татăк сумминчен *AB* татăк пулса тăрать; *AB* татăка 3 ҫине хутланин произведенийĕ виҫĕ татăкăн сумми пулать, вĕсенчен кашни *AB* татăкпа тан пулать; *AB* татăка 3 ҫине пайланинчен пулнă частное *AB* татăкăн виҫҫĕмĕш пайĕ пулать т. ыт. те.

Панă татăксене пĕр-пĕр линиллĕ единицăпа (сăмахран, сантиметрпа) виҫнĕ пулсан тата тăршшĕсене тивĕҫлĕ числосемпе кăтартса панă пулсан, ун чух вара татăксен суммин тăршшĕне числосен суммипе кăтартса панă пулать; татăксен разноҫне числосен разноҫĕпе кăтартса панă пулать т. ыт. те.

Çавракăш çинчен ăнлантарни.

9. Çавракăш. Циркуль урисене мĕн чухлĕ те пулин сарса, унăн шĕвĕр вĕçлĕ урине тӳремçин пĕр-пĕр O точки çине лартар (6 черт.), циркуле çак точка таврa çаврăнă чух, унăн карандаш е перо лартнă ури, тӳремçие сĕртĕнсе пырса, тӳремçи çине вĕççĕр лини çырса хурать; çак линин пур точкисем те O точкăран пĕр виçеллĕ хушăра тăраççĕ. Çак линие **çавракăш** теççĕ, O точкăна ун **центрĕ** теççĕ. Çавракăшăн мĕнле те пулин точкисене центрпа пĕрлештерсе тăракан OA, OB, $OC, \ldots$ татăксене **радиуссем** теççĕ. Пĕр çавракăшăн пур радиусĕсем те пĕр-пĕринпе пĕртан пулаççĕ.

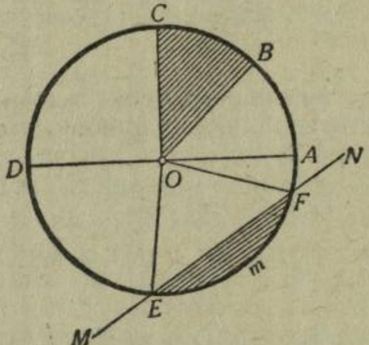
Пĕр радиуспа çаврса тунă çавракăшсем пĕртан, мĕншĕн тесен центрĕсене пĕр-пĕрин çине вырнаçтарсан, вĕсен пур точкисем те пĕр-пĕрин çине шăпах вырнаçаççĕ.

Çавракăшăн мĕнле те пулин икĕ точки урлă каçакан вĕçĕмсĕр тӳрĕ линие (MN, 6 черт.) **касса каякан лини** теççĕ.

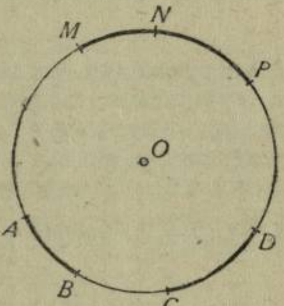
Çавракăшăн мĕнле те пулин икĕ точкине пĕрлештерекен тӳрĕ линин татăкне (EF) **хорда** теççĕ.

Центр урлă каçакан кирек мĕнле хорда та (AD) **диаметр** пулать. Диаметр икĕ радиус суммипе пĕртан, çавăнпа та пĕр çавракăшăн пур диаметрĕсем те пĕр-пĕринпе пĕртан.

Çавракăшăн пĕр-пĕр пайне (сăмахран, EmF) **пĕкĕ** теççĕ.



6 черт.



7 черт.

Пĕр-пĕр пĕккĕн вĕçĕсене пĕрлештерсе тăракан (EF) хорда çинчен вăл çак **пĕкке карăнтарса тăрать,** теççĕ.

Пĕкке хăш чух çак $\smile$ паллăпа паллă тăваççĕ; сăмахран, ăна ак çапла çырса хураççĕ: $\smile EmF$.

Çавракăшпа пӳлнĕ тӳремçин пайне **çаврашка**[1] (круг) теççĕ.

Çаврашкан икĕ радиус хушшинчи пайне (çаврашкан штрихсемпе хупланă COB пайне, 6 черт.) **сектор** теççĕ, çаврашка пĕр-пĕр касакан тӳрĕ линипе касăлать пулсан, унăн çав касăлакан пайне (çаврашкан EmF пайне) **сегмент** теççĕ.

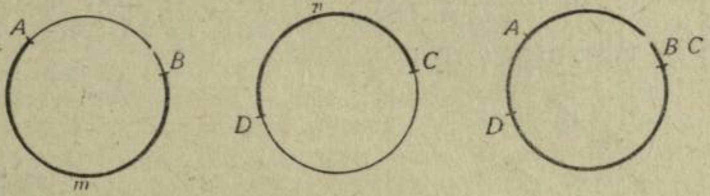
---

[1] Хăш чух „çаврашка" тенĕ сăмаха çавракăша пĕлтерсе те калаççĕ. Анчах апла калама кирлĕ мар, мĕншĕн тесен пĕр терминах тĕрлĕ ăнланусене пĕлтерсе калани йăнăштарма пултарать.

10. Пĕкĕсен пĕртанлăхĕпе танмарлăхĕ. Пĕр ҫавракăшăн (е пĕртан ҫавракăшсен) икĕ пĕккĕн вĕҫĕсем пĕр тикĕс пĕр-пĕрин ҫине вырнаҫсан, вĕсем пĕртан пулаҫҫĕ. Сăмахран, *AB* пĕкĕне *CD* пĕкĕ ҫине хурар (7 черт.). *A* точкăна *C* точка ҫине хурса пĕрле вырнаҫтарар, *AB* пĕкĕне *CD* пĕкĕ тăрăх ярар; *B* тата *D* вĕҫĕсем пĕрле пĕр-пĕрин ҫине вырнаҫсан, ҫак пĕкĕсен хушшинчи пур точкăсем те пĕр-пĕрин ҫине вырнаҫаҫҫĕ, мĕншĕн тесен вĕсем центртан пĕр виҫеллĕ хушăра тăраҫҫĕ; ҫапла вара $\smile AB = \smile CD$ пулать; *B* тата *D* пĕр-пĕрин ҫине вырнаҫмасан, пĕкĕсем пĕртан пулмаҫҫĕ; вĕсенчен пĕри, пĕр пĕкки тепĕр пĕккĕн пайĕ пулса тăраканни, пĕчĕкки пулать.

11. Пĕкĕсен сумми. Пĕр радиуслă панă пĕкĕсен сумми тесе ҫав радиуслах тепĕр пĕкке калаҫҫĕ, ҫав тепĕр пĕккĕн пайĕсем хушма панă пĕкĕсемпе пĕртан пулаҫҫĕ. Сăмахран, ҫавракăшăн пĕр-пĕр *M* точкинчен (7 черт.) пуҫласа унăн *AB* тăршшĕллĕ *MN* пайне ун ҫине виҫсе хурсан, унтан ҫак еннеллех *N* точкăран *CD* тăршшĕллĕ *NP* пайне виҫсе хурсан, вара *MP* пĕкĕ *AB* пĕкĕпе *CD* пĕккĕн сумми пулса тăрать. Ҫакăн пекех тата виҫĕ, е ытларах пĕкĕсен суммипе тан пĕкĕ те тума пулать.

Пĕр радиуслă пĕкĕсене хушнă чух вĕсен сумми пĕр ҫавракăш ҫине вырнаҫаймасан, вырнаҫайман пĕкки тепĕр пĕкĕ ҫине кĕрсе ăна мĕн чухлĕ те пулин хупласа илме пултарать. Ун пек чух вара пĕкĕсен сумми пĕр-пĕтĕм ҫавракăшран пысăкрах пĕкĕ пулса тăрать. Сăмахран, *AmB* пĕкĕне *CnD* пĕкĕпе хушсан (8 черт.), пĕр-пĕтĕм ҫавракăш та *AD* пĕкĕ пулса тăрать.



8 черт.

Пĕкĕсен суммин, тӳрĕ лини татăкĕсен суммин пекех, **ылмаштару** тата **пĕрлештерӳ** законĕсен свойствисем пур.

Пĕкĕсен сумми ăнланăвĕнчен тӳрĕ лини татăкĕсенни пекех, пĕкĕсен разноҫĕ ăнланăвĕ, пĕкĕне отвлеченнăй число ҫине хутлассипе пайлассин ăнланăвĕсем тухса тăраҫҫĕ.

12. Геометри пайĕсем. Геометри икĕ пая уйăрăлать: **планиметри** тата **стереометри.** Планиметри пĕр тӳремҫи ҫине пур пайĕсемпе те вырнаҫакан фигурăсен свойствисем ҫинчен вĕрентет, стереометри—пĕр тӳремҫи ҫине пур пайĕсемпе те вырнаҫма пултарайман фигурăсен свойствисем ҫинчен вĕрентет.

ПЛАНИМЕТРИ.

ПĔРРЕМĔШ СЫПĂК.

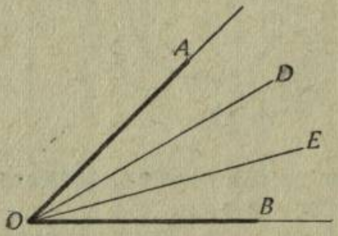
ТӲРĔ ЛИНИ.

I. КĔТЕССЕМ.

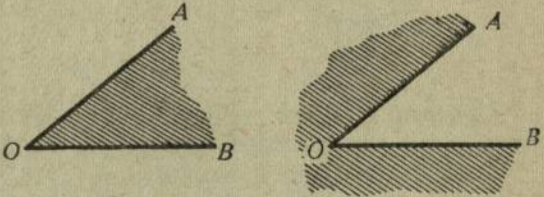
Малтанхи ăнланусем.

13. Кĕтес. Пĕр точкăран тухакан икĕ пайăркаран пулнă фигура (*OA* тата *OB*, 9 черт.) **кĕтес** пулать. Кĕтес тăвакан çурматӳрлинисене **енсем** теççĕ, енсем тухакан точка кĕтес **тăрри** пулать. Кĕтес тăрринчен тухакан енсем малалла вĕçĕмсĕр тăсăлма пултараççĕ.

Кĕтесе ялан виçĕ пысăк саспаллипе паллă тăваççĕ, варринчи саспаллине кĕтес тăрри тĕлне лартаççĕ, хĕрринчи саспаллисене— енсен пĕр-пĕр точкисем тĕлне лартаççĕ, сăмахран, акă çапла калаççĕ: „*AOB* кĕтес“ е „*BOA* кĕтес“, теççĕ (9 черт.). Анчах кĕтесе пĕр саспаллипе те паллă тума юрать, ун чух вара ку кĕтес çумĕнче урăх кĕтессем пулмалла мар; паллине кĕтес тĕлне лартмалла. Хăш чух эпир кĕтесе цифрăпа паллă тăвăпăр, цифрине кĕтес ăшне тăрри çумне лартăпăр.



9 черт.



10 черт.

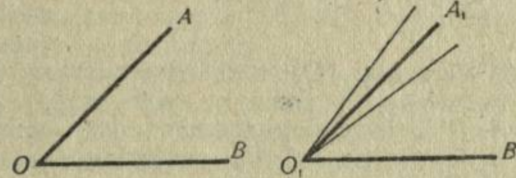
Кĕтес енĕсем кĕтес выртакан пĕтĕм тӳремçие икĕ пая уйăраççĕ. Вĕсенчен пĕрне **кĕтесĕн шалти облаçĕ** теççĕ, тепĕрне **унăн тулашĕнчи облаçĕ** теççĕ. Тӳрĕ лини татăкĕ пĕтĕмĕшпех выртакан облаçе шалти область теççĕ, вăл татăк кĕтес енĕсем çинче выртакан пĕр-пĕр икĕ точка, сăмахран, *AOB* (9 черт.) кĕтес енĕсем çинчи *A* тата *B* точкăсене, пĕрлештерсе тăрать. Анчах хăш чухне кĕтесĕн шалти облаçĕ тесе тӳремçин тепĕр пайне шутлама тивет. Ун пек чух вара, тӳремçин хăш облаçне кĕтесĕн шалти облаçĕ тесе шутламаллине хăйне уйрăм кăтартса параççĕ.

10-мĕш чертеж çинче тӳремçин хăш пайне кĕтесĕн шалти облаҫӗ тесе шутламаллине уйӑрса кӑтартса панӑ. Тӳремҫин штрихсемпе хупланӑ пайӗ яланах кӗтесӗн шалти облаҫӗ пулать.

Кӗтес тӑрринчен (9 черт.) ун варрине мӗнле те пулин OD, OE,... тӳрӗ линисем туртсан, AOD, DOE, EOB,... кӗтессем пулса тӑраҫҫӗ, вӗсем AOB кӗтесӗн пайӗсем пулаҫҫӗ.

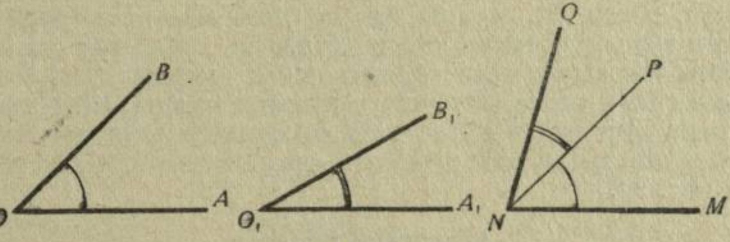
Ҫырнӑ чух „кӗтес“ ҫырас вырӑнне нумай чух $\angle$ паллӑ лартаҫҫӗ. Сӑмахран, „AOB кӗтес“ вырӑнне $\angle AOB$ ҫырма юрать.

14. Кӗтессен пӗртанлӑхӗпе танмарлӑхӗ. Икӗ кӗтесе пӗр-пӗрин ҫине хурсан, вӗсем пӗр-пӗрин ҫине шӑпах вырнаҫсан, ун чух вара вӗсем, геометрилле фигурӑсен (1 §) *пӗртанлӑхӗн пӗтӗмӗшле определенийӗ тӑрӑх, пӗртан хисепленеҫҫӗ*. Сӑмахран, AOB кӗтесе $A_1O_1B_1$ кӗтес ҫине (11 черт.) хурар, O тӑррине O_1 тӑрри ҫине вырнаҫтарар, OB енне O_1B_1 енӗ тӑрӑх ярар, икӗ кӗтессин те шалти облаҫӗсем O_1B_1 тӳрӗ линин пӗр енче пулччӑр. Ҫапла вара OA ен O_1A_1 ен ҫине вырнаҫсан, AOB кӗтес $A_1O_1B_1$ кӗтеспе пӗртан пулать; OA ен $A_1O_1B_1$ кӗтесӗн ӑшӗнчен е унӑн тулашӗнчен кайсан, кӗтессем танмар пулаҫҫӗ: вӗсенчен пӗри, пӗр кӗтесӗ тепӗр кӗтесӗн пайӗ пулса тӑраканни, пӗчӗкки пулать.



11 черт.

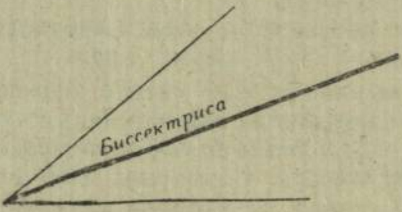
15. Кӗтессен сумми. AOB кӗтеспе $A_1O_1B_1$ кӗтесӗн (12 черт.) сумми тесе акӑ ҫапла майпа пулнӑ кӗтесе калаҫҫӗ: пӗрремӗш AOB кӗтеспе пӗртан MNP кӗтес тӑвар, ун ҫумне иккӗмӗш $A_1O_1B_1$ кӗтеспе пӗртан PNQ кӗтес туса ҫыпӑҫтарар, икӗ кӗтессин те пӗр-пӗрлехи N тӑрӑ тата пӗр-пӗрлехи NP ен пулса тӑмалла, кӗтессен шалти облаҫӗсем пӗрлехи NP енӗн икӗ аяккинелле те вырнаҫнӑ пулмалла. Ун чух вара MNQ кӗтесе AOB тата $A_1O_1B_1$ кӗтессен сумми теҫҫӗ. Ҫак кӗтесӗн шалти облаҫӗ—хушӑнакан кӗтессен шалти облаҫӗсем пӗрлешнипе пулнӑ тӳремҫи облаҫӗ пулать. Вӑл область—хушӑнакан кӗтессен пӗр-пӗрлехи (NP) енӗ выртакан область. Ҫакӑн пекех тата виҫӗ е ытларах кӗтессен суммипе тан кӗтес те тума пулать.



12 черт.

Кӗтессен суммин, тӳрӗ лини татӑкӗсен суммин пекех, **ылмаштару** тата **пӗрлештерӳ** законӗсен свойствисем пур.

Час-часах панă кĕтесе çурмаран уйăракан çурматӳрлини çинчен калама тивет; çак çурматӳрлиние **биссектриса (е пĕртан уйăракан лини)** тесе ят панă (13 черт.).

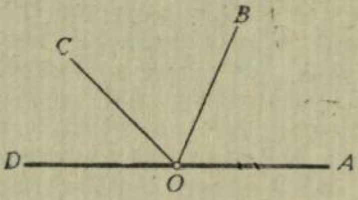


13 черт.

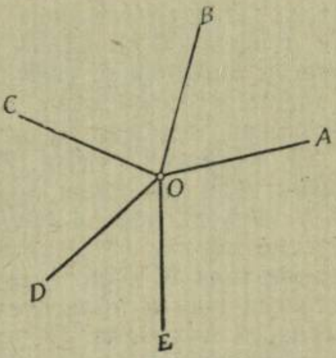
16. Кĕтес ăнлавне сарни. Кĕтессен суммине тупнă чух хăшпĕр уйрăм тĕслĕхсем тĕл пулма пултараççĕ, вĕсене уйрăм пăхса тухни усăллă пулĕ.

1. Панă кĕтессене, сăмахран, виçĕ кĕтесе: *AOB*, *BOC*, *COD* (14 черт.) хушнă хыççăн, акă çакă пулма пултарать: *COD* кĕтесĕн *OD* енĕ *AOB* кĕтесĕн *OA* енне тăснă лини çине пырса тивет. Кун пек чух вара пĕр (*O*) точкăран тухакан (*OA*, *OD*) икĕ çурматӳрлинирен пулнă фигура пулса тăрать, çак çурматӳрлинисенчен (*OA*, *OD*) пĕри теприне тăснинчен пулнă. Çакăн пек фигурăна та пур пĕрех **(сарса янă**, е **тӳрĕлетнĕ)** кĕтес теççĕ.

2. Панă кĕтессене, сăмахран, пилĕк кĕтесе: *AOB*, *BOC*, *COD*, *DOE* тата *EOA* (15 черт.) хушнă хыççăн, *EOA* кĕтесĕн *OA* енĕ *AOB* кĕтесĕн *OA* енĕ çине вырнаçма пултарать.



14 черт.



15 черт.

Пĕр-пĕрин çине вырнаçнă çурматӳрлинисенчен пулнă фигурăна та кĕтес **(тулли кĕтес)** теççĕ (çак фигурăна пĕрлехи *O* тăрă тавра выртакан тӳремçирен уйăрмасăр пăхса тухаççĕ).

3. Юлашкинчен тата çакă пулма пултарать: кĕтессен суммине тунă чух, вĕсен пĕр-пĕрлехи тăрри тавра выртакан тӳремçи çине кĕтессем тулса, тӳремçие кĕмен кĕтессене ирĕксĕрех çак пĕр-пĕрлехи тăрă тавра выртакан тӳремçи çинех иккĕмĕш, виççĕмĕш хут е ытларах хут кĕтес çине кĕтес хумалла пулать. Кĕтессен çакăн пек сумми пĕр тулли кĕтес тата ун çумне хушнă пĕр-пĕр кĕтес пулать, е икĕ тулли кĕтес тата ун çумне хушнă пĕр-пĕр кĕтес пулать т. ыт. те.

Кĕтессене виçесси.

17. Центрти кĕтес. Çавракăшăн икĕ радиусĕнчен пулнă (*AOB*, 16 черт.) кĕтесе **центрти** кĕтес теççĕ; çак кĕтес çинчен тата унăн икĕ енĕ хушшинчи пĕкĕсем çинчен: вĕсем пĕр-пĕринпе **килĕшӳллĕ**, теççĕ.

Центрти кĕтессен хăйсемпе килĕшсе тăракан пĕкĕсем тĕлĕшĕнчен акă çакăн пек икĕ свойство пур.

Пĕр çаврашкара е пĕртан çаврашкасенче:

1) ***Центрти кĕтессем пĕртан пулсан, вĕсен килĕшӳллĕ пĕккисем те пĕртан пулаççĕ.***

2) Тӳртĕн: ***пĕкĕсем пĕртан пулсан, вĕсен центрти килĕшӳллĕ кĕтесĕсем те пĕртан пулаççĕ.***

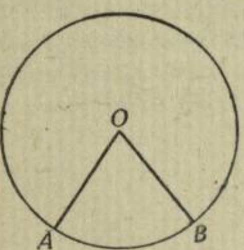
$\angle AOB = \angle COD$ (17 черт.) пултăр; *AB* тата *CD* пĕкĕсем те пĕртан пулнине кăтартса парар. *AOB* сектора *O* центр тавра стрелкăпа кăтартнă еннелле *OA* радиуса *OC* радиус çине вырнаçиччен çаврăрар. Панă кĕтессем пĕр пек пирки, *OB* радиус *OD* радиус çине вырнаçать; çапла вара *AB* пĕкĕпе *CD* пĕкĕ те пĕр-пĕрин çине вырнаçаççĕ, урăхла каласан, вĕсем пĕр-пĕринпе тан пулаççĕ.

Пĕр пек пĕкĕсене пĕр-пĕрин çине хурса, иккĕмĕш свойствăна та çакăн пекех çăмăл кăтартса пама пулать.

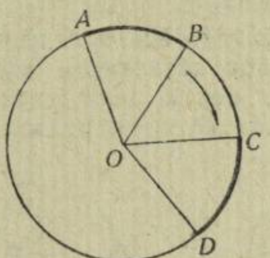
18. Пĕкĕ градусĕпе кĕтес градусĕ. Пĕр-пĕр çавракăша 360 пĕртан пая уйăрнă пултăр, уйăрнă тĕлсене точкăсем лартнă пултăр, унтан çав точкăсем патне радиуссем туртса, вĕсене центрпа пĕрлештернĕ пултăр. Вара центр йĕри-тавра центрти 360 кĕтес пулса тăрать, вĕсем пурте килĕшӳллĕ пĕр пек пĕкĕсене хирĕç выртаççĕ, çавăнпа та вĕсем пурте пĕр-пĕринпе тан пулаççĕ. Çакăн пек майпа çавракăш çинче тунă кашни пĕкке **пĕкĕ градусĕ** теççĕ, **центрта пулса** тăнă кашни кĕтесе **кĕтес градусĕ** теççĕ. Çапла ĕнтĕ пĕкĕ градусĕ çавракăшăн $^{1}/_{360}$-мĕш пайĕ пулать, теме юрать, кĕтес градусĕ пĕкĕ градусĕпе килĕшӳллĕ центрти кĕтес пулать, теме юрать.

Градус (пĕкĕпе кĕтес градусĕ) 60 пĕртан пая уйăралать, кашни пайне **минута** теççĕ; минута тата 60 пĕртан пая уйăралать, кашни пайне **секунда**[1] теççĕ.

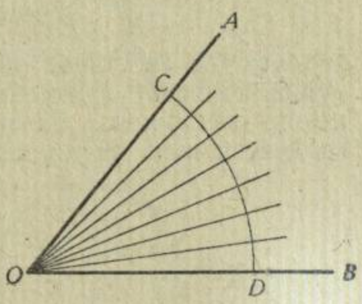
19. Центрти кĕтессемпе пĕкĕсен хушшинчи килĕшӳлĕх. *AOB* пĕр-пĕр кĕтес пултăр (18 черт.) *AOB* кĕтесĕн *O* тăррине центр туса, унăн енĕсем хушшине пĕр-пĕр радиуспа *CD* пĕкĕ туртар; ун чух вара *AOB* центрти кĕтес пулать, *CD* унăн килĕшӳллĕ пĕкки пулать.



16 черт.



17 черт.



18 черт.

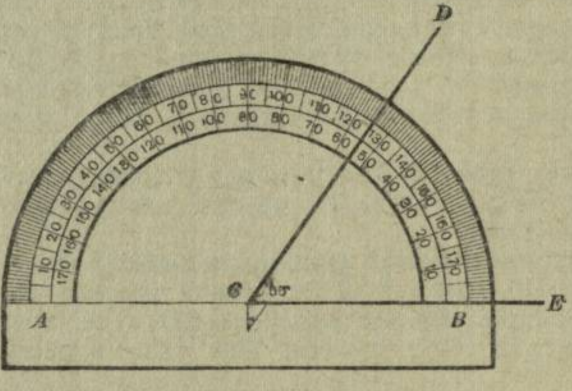
---

[1] Кĕтессемпе пĕкĕсене виçнĕ чух çĕрлĕ системăпа та çаплах усă кураççĕ: ку система тăрăх чĕрĕк çавракăшăн $^{1}/_{100}$ пайне пĕкĕ градусĕ теççĕ; градусăн $^{1}/_{100}$ пайĕ минута, минутăн $^{1}/_{100}$ пайĕ секунда пулать.

Сӑмахран, çак пӗкӗре пӗкӗ градусӗ 7 пултӑр (чертеж çинче градуссене пысӑклатса ӳкернӗ); уйӑракан точкӑсене центрпа пӗрлештерер, ун чух вара *AOB* кӗтесре кӗтес градусӗ 7 пулса тӑрать. Пӗтӗмлетсе çапла калама юрать: *кӗтесе çав кӗтеспе килӗшӳллӗ пӗкӗпе виçеççӗ*; кӑна акӑ çапла ӑнланмалла: кӗтесре кӗтес градусӗ, минучӗ тата секунчӗ миçе пулать, килӗшӳллӗ пӗкӗре те çавӑн чухлӗ пӗкӗ градусӗ, минучӗ тата секунчӗ пулать. Сӑмахран, *CD* пӗкӗре пӗкӗ градусӗ 20, минучӗ 10, секунчӗ 15 пулсан, *AOB* кӗтесре те кӗтес градусӗ 20, минучӗ 10, секунчӗ 15 пулать; ӑна кӗскен çакӑн пек çырса хураççӗ:

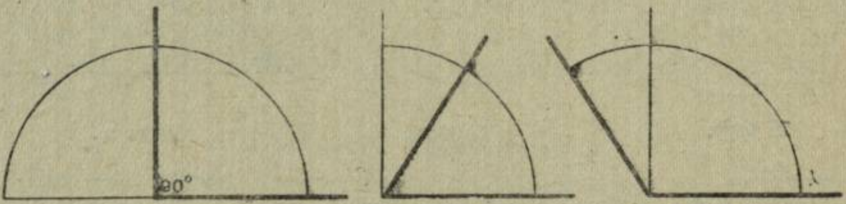
$\angle AOB = 20^\circ 10' 15''$; $^\circ$, $'$ тата $''$ паллӑсем градуса, минутӑна тата секундӑна пӗлтереççӗ.

Кӗтес градусӗн пысӑкӑшӗ çавракӑш радиусӗнчен килмест. Чӑнах та, 360 кӗтес градусӗсене 15 §-ра кӑтартса панӑ пек хушсан, çавракӑш центрӗнче тулли кӗтес пулса тӑрать. Çавракӑш радиусӗ кирек епле пулсан та, тулли кӗтес улӑшӑнмасть, ялан пӗр пек пулать. Çапла ӗнтӗ çакна калама тивет: кӗтес градусӗ тулли кӗтесӗн $^1/_{360}$ пайӗ пулса тӑрать. Ку—кӗтес виçи, çак виçе кӗтес пысӑкӑшне çавракӑш радиусӗсӗрех лайӑх кӑтартса парать. Панӑ кӗтесӗн кӗтес градусне кӑтартакан число кӗтесӗн пӗр енӗ тепӗр енӗ çумне мӗн чухлӗ тайӑлнин виçи пулса тӑрать.



19 черт.

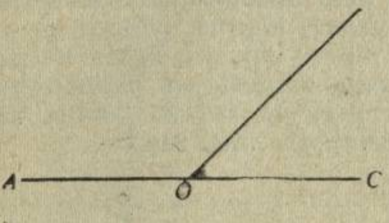
20. Транспортир. Кӗтессене виçмелли уйрӑм хатӗр пур, ӑна **транспортир** теççӗ. Çак хатӗр (19 черт.)—çурмаçаврашка, унӑн пӗккине 180° уйӑрнӑ. *DCE* кӗтесе виçес тесен, ун çине транспортир хураççӗ; çурмаçаврашкан центрне кӗтес тӑрри çине вырнаçтармалла, *CB* радиуса *CE* ен тӑрӑх ямалла. Ун чух вара *DCE* кӗтес енӗсен хушшинчи пӗкӗ градусӗсене кӑтартакан число çав кӗтес пысӑкӑшне кӑтартать. Çавӑн пекех тата транспортир пулӑшнипе градуссен панӑ числи тӑрӑх кӗтес чертежне тума пулать.



Тӳрӗ кӗтес *Шӗвӗр кӗтес* *Пуклак кӗтес*

20 черт.

21. Тӳрӗ, шӗвӗр тата пуклак кӗтессем. 90°-лӑ кӗтесе (апла пулсан, сарса хунӑ кӗтесӗн ҫуррине е тулли кӗтесӗн чӗрӗкне) **тӳрӗ кӗтес** теҫҫӗ; тӳрӗ кӗтесрен пӗчӗкрех кӗтесе **шӗвӗр кӗтес** теҫҫӗ, тӳрринчен пысӑккине, сарса хунинчен пӗчӗкреххине, **пуклак кӗтес** теҫҫӗ (20 черт.).



21 черт.

Тӳрӗ кӗтессен градус кӑтартакан числи пурин те пӗрре, ҫавӑнпа вӗсем, паллах, ***пурте пӗрпӗринпе пӗртан.***

Тӳрӗ кӗтесӗн пысӑкӑшне хӑш чух *d* саспаллипе паллӑ тӑваҫҫӗ (*d* саспалли вӑл—француз чӗлхин *droit* сӑмахӗн пуҫламӑшӗнче тӑракан саспалли, *droit* тени „тӳрӗ“ тени пулать).

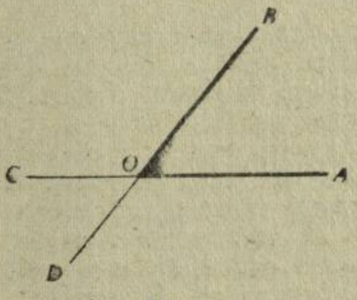
Юнашар тата вертикальлӗ кӗтессем.

22. Юнашар кӗтессем тата вӗсен свойствисем. Икӗ кӗтес (*AOB* тата *BOC*, 21 черт.) тӑвакан енсенчен пӗри **пӗрлехи** ен, тата икӗ енӗ пӗри тепӗрне тӑснипе пулнӑ пулсан, ҫакӑн пек енсем тунӑ кӗтессене **юнашар** кӗтессем теҫҫӗ.

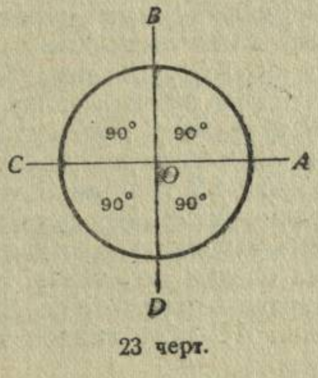
Ҫак кӗтессен сумми сарса хунӑ кӗтес пулать, ҫавӑнпа ***икӗ юнашар кӗтесӗн сумми 180° пулать*** (урӑхла каласан, вӑл суммӑра икӗ тӳрӗ кӗтес пулать).

Панӑ кашни кӗтес ҫумне юнашар икӗ кӗтес тума пулать. Сӑмахран, *AOB* кӗтесӗн (22 черт.) *AO* енне юнашар тӑссан, юнашар пӗр (*BOC*) кӗтес пулса тӑрать; *BO* енне тӑссан, юнашар тепӗр (*AOD*) кӗтес пулса тӑрать. *Икӗ кӗтес, BOC тата AOD пӗр кӗтеспех юнашар тӑрсан, вӗсем пӗр-пӗринпе пӗртан пулаҫҫӗ,* мӗншӗн тесен вӗсенчен кашни *AOB* кӗтесе 180° ҫитме тултарса тӑрать.

AOB кӗтес тӳрӗ кӗтес пулсан (23 черт.), урӑхла каласан, вӑл кӗтесре 90° пулсан, унпа юнашар тӑракан *COB* тата *AOD* кӗтессем те тӳрӗ кӗтессем пулмалла, мӗншӗн тесен вӗсенче кашнинче 180°—90°, урӑхла каласан, 90°; тӑваттӑмӗш *COD* кӗтес те тӳрӗ кӗтес пулма тивӗҫ, мӗншӗн тесен *AOB*, *BOC* тата *AOD* кӗтессен сумми 270° пулать, ҫавӑнпа вара тӑваттӑмӗш *COD* кӗтес валли те 360°-ран 90° юлать. Ҫапла ӗнтӗ: *икӗ тӳрӗ лини*



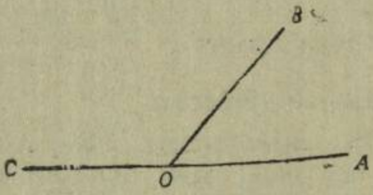
22 черт.



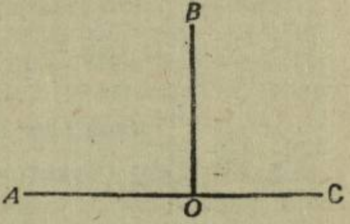
23 черт.

(*AC* тата *BD*, 23 черт.) *пĕр-пĕрне касса каçнă чух пулакан тăватă кĕтесрен пĕр кĕтесси тӳрĕ кĕтес пулсан, ытти виçĕ кĕтесси те тӳрĕ кĕтессем пулма тивĕç.*

23. Перпендикуляр тата тайлăк лини. Юнашар икĕ кĕтес пĕр-пĕринпе пĕртан пулмасан (24 черт.), вĕсен пĕрлехи (*OB*) енĕ ытти икĕ енĕ выртакан (*AC*) тӳрĕ лини тĕлĕшĕнчен **тайлăк лини** пулать; икĕ юнашар кĕтес пĕр-пĕринпе пĕртан пулсан, ун чух вара вĕсенчен кашни кĕтесĕ тӳрĕ кĕтес пулать, вĕсен пĕрлехи енĕ ытти икĕ енĕ выртакан тӳрĕ лини тĕлĕшĕнчен **перпендикуляр** пулать. Пĕрлехи *O* тăрра малтанхинче **тайлăк линин тĕпĕ** теççĕ, иккĕмĕшĕнче ăна **перпендикулярăн тĕпĕ** теççĕ.



24 черт.



25 черт.

Пĕр-пĕрне касса каçнă чух тӳрĕ кĕтес тăвакан икĕ тӳрĕ линие (*AC* тата *BD*, 23 черт.) **пĕр-пĕринпе перпендикулярлă** линисем теççĕ. *AC* тӳрĕ лини *BD* тӳрĕ линипе перпендикулярлă тăнине акă çапла çырса хураççĕ: $AC \perp BD$.

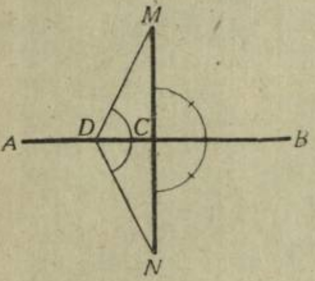
Асăрхаттарни: 1) *AC* тӳрĕ лини (25 черт.) çинче выртакан *O* точкăран çак тӳрĕ лини патне перпендикуляр туртмалла пулсан, *AC* тӳрĕ лини патне перпендикуляр „тăратмалла", теççĕ; тӳрĕ лини тулашĕнче выртакан *B* точкăран çак лини патне перпендикуляр туртмалла пулсан, тӳрĕ лини çине перпендикуляр (аялалла-и, е çӳлелле-и, е аяккинелле-и, пур-пĕрех) „антармалла", теççĕ.

2) Паллах, панă тӳрĕ лини çинче выртакан кирек хăш точкăран та çак тӳрĕ лини патне перпендикуляр тăратма пулать, анчах пĕр перпендикуляр кăна туртма пулать.

24. Акă çакă тĕрĕссине кăтартса парар: ***тӳрĕ лини тулашĕнче выртакан кирек хăш точкăран та çак тӳрĕ лини çине перпендикуляр антарма пулать, анчах пĕр перпендикуляр кăна антарма пулать.***

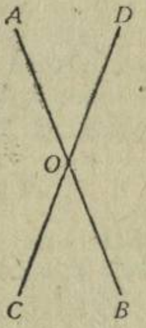
Пĕр-пĕр *AB* тӳрĕ лини (26 черт.) тата ун тулашĕнче пĕр-пĕр *M* точка панă пултăр; çакна кăтартса памалла: 1) çак *M* точкăран *AB* тӳрĕ лини çине перпендикуляр антарма пулать, 2) çав *M* точкăран пĕр перпендикуляр анчах антарма пулать.

Чертежа *AB* тӳрĕ лини тăрăх хутлар, унăн çӳлти пайĕ аялти пайĕ çине ӳктĕр, ăна хуплатăр. Ун чух вара *M* точка пĕр-пĕр *N* вырăна йышăнать. Çак вырăна паллă тăвар та, хутланине ярса, чертежа ĕлĕкхи пек тăвар, унтан *M* точкăна *N* точкăпа тӳрĕ лини туртса пĕрлештерер. Халь ĕнтĕ çакна ăнланса илер: *MN* тӳрĕ лини *AB* тӳрĕ линипе перпендикулярлă, *M* точкăран тухакан ытти кирек хӑш тӳрӗ лини те AB тӳрӗ линипе перпендикулярлӑ пулмасть. Ҫакна кӑтартса пама чертежа тепӗр хут хутлар. Ун чух вара M точка каллех N точкӑпа пӗр ҫӗре вырнаҫаҫҫӗ; C точкӑпа D точка хӑйсен вырӑнӗсенчех пулаҫҫӗ; ҫапла ӗнтӗ, MC тӳрӗ лини NC тӳрӗ лини ҫине, MD тӳрӗ лини ND тӳрӗ лини ҫине вырнаҫаҫҫӗ. Ҫавӑнпа та $\angle MCB = \angle BCN$ тата $\angle MDC = \angle CDN$ пулаҫҫӗ. MCB кӗтеспе BCN кӗтес — юнашар кӗтессем тата вӗсем пӗр-пӗринпе пӗртан кӗтессем; ҫавӑнпа вӗсенчен кашни — тӳрӗ кӗтес пулать; апла пулсан, $MN \perp AB$. MDN лини тӳрӗ лини мар пулсан (мӗншӗн тесен M точкӑпа N точкӑна пӗрлештерекен тӗрлӗрен икӗ тӳрӗ лини пулма пултараймасть), икӗ пӗртан MDC тата CDN кӗтессен сумми $2d$ пулма пултараймасть; ҫавӑнпа та MDC кӗтес — тӳрӗ кӗтес мар; апла пулсан, MD тӳрӗ лини AB тӳрӗ линие перпендикулярлӑ мар. Ҫапла ӗнтӗ, M точкӑран AB тӳрӗ лини ҫине тепӗр перпендикуляр антарма юрамасть.



26 черт.

27 черт.

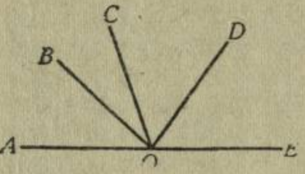


28 черт.

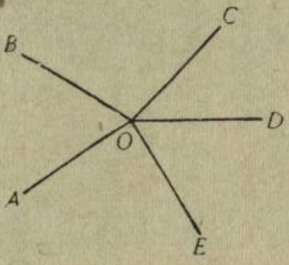
25. Чертеж тумалли треугольник. Панӑ тӳрӗ лини патне перпендикуляр туртма чертеж тумалли **треугольник** пит аван, ҫав треугольникӗн пӗр кӗтесси тӳрӗ кӗтес пулать. AB тӳрӗ лини (27 черт.) патне, ун ҫинче выртакан C точка тӗлне, е тӳрӗ лини тулашӗнче выртакан D точка урлӑ перпендикуляр туртас тесен, AB тӳрӗ лини ҫумне, ун тӑрӑх линейка хураҫҫӗ, линейка ҫумне треугольник хураҫҫӗ; унтан вара, пӗр алӑпа линейкӑна тытса, тепӗр алӑпа треугольнике линейка тӑрӑх шутарса пыраҫҫӗ; тӳрӗ кӗтесӗн тепӗр енӗ C е D точкӑсем тӗлне ҫитсен, вӗсем урлӑ вара CE тӳрӗ лини туртаҫҫӗ.

26. Вертикальлӗ кӗтессем тата вӗсен свойстви. Пӗр кӗтес енӗсем тепӗр кӗтес енӗсене тӑснипе пулнӑ пулсан, ҫавӑн пек енсем тунӑ икӗ кӗтесе **вертикальлӗ** (хире-хирӗҫ) кӗтессем теҫҫӗ. Сӑмахран, икӗ тӳрӗ лини (AB тата CD, 28 черт.) пӗр-пӗрне касса иртнӗ чух, икӗ мӑшӑр вертикальлӗ кӗтес пулса тӑрать: AOD тата COB, AOC тата DOB (тата тӑватӑ мӑшӑр юнашар кӗтес).

Вертикальлӗ икӗ кӗтес пӗр-пӗринпе пӗртан (сӑмахран, $\angle AOD = \angle BOC$), мӗншӗн тесен вӗсенчен кашни кӗтесӗ пӗр кӗтеспех ($\angle DOB$ е $\angle AOC$) юнашар кӗтес пулса тӑрать, ун пек кӗтессем, малта каланӑ тӑрӑх (22 §), пӗр-пӗринпе пӗртан пулаççӗ.



29 черт.



30 черт.

27. Пӗрлехи тӑрӑллӑ кӗтессем çинчен асӑрхаттарни. Пӗрлехи тӑрӑллӑ кӗтессем çинчен акӑ çакӑн пек ансат тӗрӗслӗхсене астуса тӑни усӑллӑ:

1) *Пӗрлехи тӑрӑллӑ темиçе кӗтесӗн* (*AOB*, *BOC*, *COD*, *DOE*, 29 черт.) *сумми сарса янӑ кӗтес пулать пулсан, вӑл сумма 2d пулать, урӑхла каласан,* 180° *пулать.*

2) *Пӗрлехи тӑрӑллӑ темиçе кӗтесӗн* (*AOB*, *BOC*, *COD*, *DOE*, *EOA*, 30 черт.) *сумми тулли кӗтес пулать пулсан, вӑл сумма 4d пулать, урӑхла каласан,* 360° *пулать.*

3) *Икӗ кӗтесӗн* (*AOB* тата *BOC*, 24 черт.) *пӗрлехи тӑрри* (*O*) *тата пӗрлехи енӗ* (*OB*) *пулсан тата вӗсен сумми 2d* (урӑхла каласан, 180°) *пулсан, çак кӗтессен тата икӗ енӗ пӗри тепӗрне тӑснипе пулнӑ* (урӑхла каласан, çакӑн пек кӗтессем юнашар кӗтессем пулаççӗ.)

УПРАЖНЕНИСЕМ.

1. Кӗтесӗн пысӑкӑшӗ 38°20′; çак кӗтеспе юнашар кӗтесӗн пысӑкӑшне тупмалла.

2 Икӗ кӗтесӗн *ABC* тата *CBD* пӗрлехи *B* тӑрӑ тата пӗрлехи *BC* ен пур. Çак кӗтессене пӗр-пӗрин çумне хунӑ, вӗсем пӗр-пӗрне хупламаççӗ; *ABC* кӗтес = 100°20′, *CBD* кӗтес = 79°40′. *AB* тата *BD* енсем иккӗшӗ пӗрле тӳрӗ лини пулаççӗ-и е çук-и (пӗр енӗ тепӗр енне тӑснипе пулнӑ-и)?

3. Пӗр-пӗр кӗтесӗн чертежне тӑвӑр та, транспортирпа тата линейкӑпа усӑ курса, вӑл кӗтесӗн биссектрисине туртӑр.

Çаксем тӗрӗссине кӑтартӑр:

4. Юнашар икӗ кӗтесӗн биссектрисисем пӗр-пӗрне перпендикулярлӑ.

5. Вертикальлӗ икӗ кӗтесӗн биссектрисисенчен пӗри теприне тӑснипе пулнӑ.

6. *AB* тӳрӗ лини (28 черт.) çинчи *O* точка çумне *AB* тӳрӗ линин икӗ енне икӗ пӗртан *AOD* тата *BOC* кӗтессем тусан, вӗсен *OD* тата *OC* енӗсем пӗр тӳрӗ лини пулса тӑраççӗ.

7. *O* точкӑран (28 черт.) *OA*, *OD*, *OB*, *OC* çурматӳрлинисем туртсан, вӗсене туртнипе çакӑн пек кӗтессем пулса тӑрсан: $\angle AOC = \angle DOB$ тата $\angle AOD = \angle COB$, вара *OB* ен *OA* ене тӑснипе пулнӑ, *OD* ен *OC* ене тӑснипе пулнӑ.

Кӑтартса пани. 27 §-ри 2 тата 3 пунктсемпе усӑ курмалла.

II. МАТЕМАТИКӐЛЛА ПРЕДЛОЖЕНИСЕМ.

28. Теоремӑсем, аксиомӑсем, определенисем. Малта каланисенчен çаксем тухса тӑраççӗ: геометрин хӑшпӗр тӗрӗслӗхӗсем пӑхнипех лайӑх палӑрса тӑраççӗ (сӑмахран, 3-мӗш тата 4-мӗш §-ри тӳремçи тата тӳрӗ лини свойствисем), ытти тӗрӗслӗхӗсем каласа ӑнлантарни урлӑ (ӑс ертсе пынипе, калаçса) тупӑнаççӗ (сӑмахран, 22 §-ри юнашар кӗтессен свойствисемпе 26 §-ри вертикальлӗ кӗтессен свойствисем). Геометрире çакӑн пек каласа ӑнлантарнисем геометрилле фигурӑсен свойствисене палӑртмалли тӗп мел пулса тӑрать. Ҫавӑнпа ӗнтӗ геометрире усӑ куракан каласа ӑнлантарнисемпе малтанах паллашни усӑллӑ пулать, мӗншӗн тесен вӗсем малалла ҫырнине ӑнланса илме кирлӗ пулаҫҫӗ. Геометрин пур тӗрӗслӗхӗсене те предложенисем пек туса панӑ. ,

Вӑл предложенисем ҫакӑн йышшисем пулаҫҫӗ.

Определенисем. Пӗр-пӗр ятсӑмахӑн е сӑмах ҫаврӑнӑшӗн тӗп шухӑшне ӑнлантарса паракан предложенисене определенисем теҫҫӗ. Сӑмахран, центрти кӗтесӗн, тӳрӗ кӗтесӗн, перпендикулярӑн т. ыт. определенийӗсене эпир малтан темиҫе те ӗнтӗ тӗл пултӑмӑр.

Аксиомӑсем. Доказательствӑсӑрӑх йышӑннӑ тӗрӗслӗхсене аксиомӑсем теҫҫӗ. Сӑмахран, малта (4 §) эпир аксиома пулса тӑракан акӑ ҫакӑн пек предложенисем тӗл пултӑмӑр: пространствӑн кирек хӑш икӗ точки урлӑ тӳрӗ лини туртма пулать, анчах пӗр лини кӑна туртма пулать; тӳрӗ линин икӗ точки панӑ тӳремҫире выртаҫҫӗ пулсан, унӑн ытти точкисем те ҫав тӳремҫирех выртаҫҫӗ.

Тӗрлӗ йышши пысӑкӑшсемпе ҫыхӑнса тӑракан аксиомӑсенчен тата акӑ ҫаксене кӑтартса парар:

икӗ пысӑкӑшран кашни пӗр виҫҫӗмӗш пысӑкӑшпа пӗртан пулсан, ҫав пысӑкӑшсем пӗр-пӗринпе те пӗртан пулаҫҫӗ;

пӗртан пысӑкӑшсем ҫумне пӗр пекшер хушсан е пӗртан пысӑкӑшсенчен пӗр пекшер кӑларсан, пӗртанлӑх пӗтмест;

танмар пысӑкӑшсем ҫумне пӗр пекшер хушсан е танмар пысакӑшсенчен пӗр пекшер кӑларсан, танмарлӑх улӑшӑнмасть, урӑхла каласан, ытларах пысӑкӑш ытларах хисепех юлать.

Теорема. Тӗрӗслӗхӗ пӗр-пӗр каласа ӑнлантарни (доказательство) хыҫҫӑн анчах палӑракан предложенисене теоремӑсем теҫҫӗ.

Ак ҫакӑ предложенисем тӗслӗх пулма пултараҫҫӗ:

пӗр ҫаврашкара е пӗртан ҫаврашкасенче центрти кӗтессем пӗртан пулсан, вӗсемпе килӗшӳллӗ пӗкӗсем те пӗртан пулаҫҫӗ;

икӗ тӳрӗ лини пӗрне-пӗри касса иртнӗ чух пулнӑ тӑватӑ кӗтесрен пӗри тӳрӗ кӗтес пулсан, ытти виҫӗ кӗтесӗ те тӳрӗ кӗтессем пулаҫҫӗ т. ыт. те.

Следствисем. Аксиомӑран е теоремӑран тӳрех тухакан вывод пулса тӑракан предложенисене следствисем теҫҫӗ. Сӑмахран, „икӗ точка урлӑ пӗр тӳрӗ лини анчах туртма пулать"; ку аксиомӑран ак ҫак следстви тухса тӑрать: „икӗ тӳрӗ линисем пӗр точкӑра анчах пӗр-пӗрин урлӑ каҫма пултараҫҫӗ".

29. Теорема составӗ. Кирек мӗнле теоремӑра та икӗ пай пур: услови тата заключени. **Услови** мӗн панине кӑтартать, **заключени** мӗн тӗрӗссине палӑртмаллине кӑтартать. Сӑмахран, „Центрти кӗтессем пӗртан пулсан, вӗсен килӗшӳллӗ пӗккисем те пӗртан пулаҫҫӗ" теоремӑн пӗрремӗш пайӗ — „центрти кӗтессем пӗртан пулсан" тени — услови пулать, унӑн иккӗмӗш пайӗ — „вӗсен килӗшӳллӗ пӗккисем те пӗртан пулаҫҫӗ" тени — заключени пулать; урӑхла каласан, „центрти кӗтессем пӗртан" тени пире паллӑ, ӑна пире панӑ; ҫак услови пур чух, „килӗшӳллӗ пӗкӗсем те ҫаплах пӗртан" тени тӗрӗссине кӑтартса памалла.

Хăш чух теоремăн условийĕпе заключенийĕнче темиçе уйрăм услови тата темиçе уйрăм заключени пулма пултарать; сăмахран: „число 2 çине тата 3 çине пайланать пулсан, вăл вара 6 çине те пайланать“ текен теоремăн условийĕ икĕ пайлă: пĕр пайĕ — „число 2 çине пайланать пулсан“, тепĕр пайĕ — „число 3 çине пайланать пулсан“.

Тата çакна асăрхаттарни усăллă: кирек хăш теоремăна та кĕскетмесĕр, тулли, калама пулать; ун чух вара услови „пулсан“ сăмахпа е „сан“, „сен“ сыпăклă сăмахпа пĕтет; сăмахран, „вертикальлĕ кĕтессем пĕртан“ теекен теоремăна тулли çапла калама пулать: „икĕ кĕтес вертикальлĕ кĕтессем *пулсан*, вĕсем вара пĕртан пулаççĕ“.

30. Тӳртĕн теорема. Тӳртĕн теоремăра панă тӳрĕ теоремăн условийĕ вырăнне унăн заключенине (е заключенин пĕр пайне) лартнă, заключенийĕ вырăнне панă тӳрĕ теоремăн условине (е условин пĕр пайне) лартнă. Сăмахран, акă çакă теоремăсем пĕрне-пĕри тӳртĕн тăраççĕ:

Центрти кĕтессем пĕртан пулсан, вĕсен килĕшӳллĕ пĕккисем те пĕртан пулаççĕ.

Пĕкĕсем пĕртан пулсан, вĕсен центрти килĕшӳллĕ кĕтесĕсем те пĕртан пулаççĕ.

Çак теоремăсенчен пĕрне **тӳрĕ** теорема тесен, тепĕрне **тӳртĕн** теорема темелле пулать.

Çак примерти икĕ теореми те, тӳрри те, тӳртĕнни те, тĕрĕс пулса тăраççĕ. Анчах вăлялан апла пулмасть. Сăмахран, „икĕ кĕтес вертикальлĕ кĕтессем пулсан, вĕсем вара пĕртан пулаççĕ“ текен теорема — тĕрĕс теорема, анчах „икĕ кĕтес пĕртан пулсан, вĕсем вара вертикальлĕ кĕтессем пулаççĕ“ текен тӳртĕн предложени — тĕрĕс теорема мар.

Чăнах та пĕр-пĕр кĕтесре биссектриса туртнă пултăр (13 черт.). Панă кĕтесе биссектриса икĕ пĕчĕкрех кĕтесе уйăрать. Çак кĕтессем пĕр-пĕринпе пĕртан, анчах вĕсем пур-пĕрех вертикальлĕ кĕтессем пулма пултараймаççĕ.

31. Хирĕçле теорема. Пĕр теоремăн условийĕпе заключенийĕ тепĕр теоремăн условийĕпе заключенине йышăнмаççĕ пулсан, ун пек теоремăна хирĕçле теорема теççĕ. Сăмахран, „цифрăсен сумми 9 çине пайлансан, панă число 9 çине пайланать“ текен теоремăна хирĕçле теорема çакă пулать: „цифрăсен сумми 9 çине пайланмасан, панă число 9 çине пайланмасть“.

Кунта та çакна асăрхаттармалла: тӳрĕ теорема тĕрĕсси хирĕçле теорема та тĕрĕс тенине пĕлтермест-ха; сăмахран, „кашни хушăнакан число пĕр-пĕр число çине пайланмасан, вĕсен сумми те çав число çине пайланмасть“, текен хирĕçле теорема тĕрĕс мар, анчах унăн тӳрĕ теореми тĕрĕс.

32. Тӳрĕ, тӳртĕн тата хирĕçле теоремăсен хушшинчи çыхăну. Çак çыхăнăва ăнланма лайăх пултăр тесе, теоремăна кĕскетсе çапла çырар (*A* саспалли теоремăн условине пĕлтертĕр, *B* саспалли — унăн заключенине пĕлтертĕр):

1) **Тӳрĕ теорема:** *A* пур пулсан, *B* те пур.
2) **Тӳртĕн теорема:** *B* пур пулсан, *A* та пур.

3) Тӳрӗ теоремӑна хирӗҫле теорема: *A* сук пулсан, *B* те ҫук.

4) Тӳртӗн теоремӑна хирӗҫле теорема: *B* ҫук пулсан, *A* та ҫук.

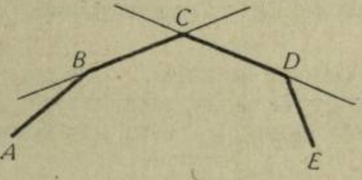
Ку предложенисене пӑхса тухсан, ҫакна ҫӑмӑл курма пулать: пӗрремӗшӗпе тӑваттӑмӗшӗ епле ҫыхӑнса тӑраҫҫӗ, иккӗмӗшӗпе виҫҫӗмӗшӗ те ҫаплах ҫыхӑнса тӑраҫҫӗ; тӳрех ҫапла каламалла: пӗрремӗшӗпе тӑваттӑмӗшӗ, ҫавӑн пекех иккӗмӗшӗпе виҫҫӗмӗшӗ те пӗр-пӗрне куҫаҫҫӗ. Чӑнах та, „*A* пур пулсан, *B* те пур“ текен предложенирен тӳрех ҫакӑ тухса тӑрать: „*B* ҫук пулсан, *A* та ҫук пулать“, (мӗншӗн тесен *A* пулнӑ пулсан, пӗрремӗш предложени тӑрӑх, *B* те пулнӑ пулӗччӗ); „*B* ҫук пулсан, *A* та ҫук“ текен предложенирен тӳртӗн ҫакӑн пек вывод тӑватпӑр: „*A* пур пулсан, *B* те пур“ (мӗншӗн тесен *B* ҫук пулнӑ пулсан, *A* та пулман пулӗччӗ). Иккӗмӗш предложенирен виҫҫӗмӗш предложени тухса тӑнине тата йӑлтах тепӗр май та пулнине шӑп ҫаплах ӑнланса илме пулать.

Ҫапла ӗнтӗ, ҫак тӑватӑ теорема тӗрӗссине ӑнланса илес тесен, кашни теорема тӗрӗссине кӑтартса пама кирлӗ мар, икӗ теорема тӗрӗссине: тӳрӗ тата тӳртӗн теоремӑсем, е тӳрӗ тата хирӗҫле теоремӑсем тӗрӗссине кӑтартса парсан та ҫитет.

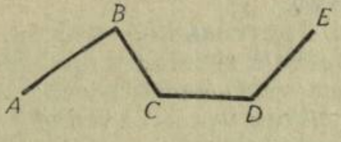
III. ТРЕУГОЛЬНИКСЕМ.

Многоугольниксем тата треугольниксем ҫинчен ӑнлантарни.

33. Хуҫӑк лини. Тӳрӗ линисен татӑкӗсене тӳрӗ мар лини тӑрӑх йӗркерен хурса кайсан, пӗрремӗш татӑкӗн вӗҫӗ иккӗмӗш татӑкӗн пуҫламӑшӗ, иккӗмӗш татӑкӗн вӗҫӗ виҫҫӗмӗш татӑкӗн пуҫламӑшӗ пулать пулсан, тата ытти татӑкӗсем те ҫаплах выртаҫҫӗ пулсан, ун пек линие **хуҫӑк лини** теҫҫӗ (31 тата 32 черт.). Ҫак татӑксене **хуҫӑк линин енӗсем** теҫҫӗ, кашни икӗ татӑк хушшинчи кӗтесӗсем унӑн **тӑррисем** пулаҫҫӗ. Хуҫӑк линие саспаллисемпе ҫырса паллӑ тӑваҫҫӗ, саспаллисене унӑн тӑррисен тата вӗҫӗсен тӗлне лартаҫҫӗ; сӑмахран, *ABCDE* хуҫӑк лини теҫҫӗ.



31 черт.



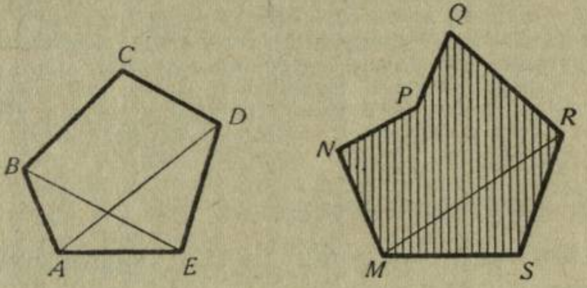
32 черт.

Икӗ вӗҫне вӗҫӗмсӗр тӑснӑ **кашни** татӑкӑн йӑлтах пӗр енне вырнаҫтарнӑ хуҫӑк линие **мӑкӑр лини** теҫҫӗ. Сӑмахран, ҫавӑн пек линие эпир 31 чертеж ҫинче курма пултаратпӑр, 32 чертеж ҫинчи хуҫӑк лини—мӑкӑр лини мар (ӑна *BC* тӳрӗ линин пӗр енне вырнаҫтарман).

Вӗҫӗсем пӗр точка ҫине вырнаҫнӑ хуҫӑк линие **питӗрӗннӗ** лини теҫҫӗ (сӑмахран, 33 черт. ҫинчи *ABCDEA* лини питӗрӗннӗ лини пулать).

34. Многоугольник. Питӗрӗннӗ хуҫӑк линирен тата вӑл ҫавӑрса илнӗ тӳремҫи пайӗнчен пулнӑ фигурӑна **многоугольник** (нумайкӗтеслӗх) теҫҫӗ (33 черт.). Хуҫӑк лини енӗсем многоугольник **енӗсем** пулаҫҫӗ, унӑн кашни икӗ енӗ хушшинчи кӗтесӗсем **многоугольник кӗтесӗсем** пулаҫҫӗ, кӗтесӗсен тӑррисем многоугольникӗн **тӑррисем** пулаҫҫӗ.

Многоугольникĕн тăрри çумĕнче выртакан шалти облаçĕ многоугольник кĕтесĕн шалти облаçĕ пулать. Сăмахран, *MNPQRS* (33 черт.) многоугольникĕн *P* тăрăллă кĕтесĕ икĕ тÿрĕ кĕтесрен пысăкрах кĕтес (унăн шалти облаçне штрихланă) пулса тăрать. Многоугольнике йĕри-тавра çавăрса илекен **хуçкаланчăк** лини многоугольникĕн **контурĕ** пулать, унăн пур енĕсен те сумми пулса тăракан тÿрĕ лини татăкне **периметр** теççĕ.



33 черт.

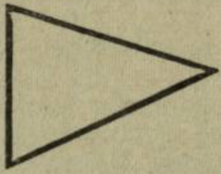
Мăкăр хуçкаланчăк лини çавăрса илнĕ многоугольнике **мăкăр** многоугольник теççĕ; сăмахран, 33-мĕш чертеж çинчи *ABCDE* çавăн пек многоугольник (*MNPQRS* многоугольнике мăкăр теме юрамасть); эпир пуринчен ытла мăкăр многоугольниксене пăхса тухăпăр.

Многоугольникĕн пĕр енĕ çумĕнче тăман икĕ кĕтесĕн тăррисене пĕрлештерекен кирек хăш тÿрĕ линие те (сăмахран, *AD*, *BE*, *MR*,..., 33 черт.) многоугольникĕн **диагоналĕ** теççĕ.

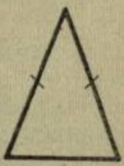
Многоугольникĕн енĕсем **виççĕрен** кая пулмаççĕ. Енĕсен хисепне кура, многоугольнике треугольник, четырехугольник, пятиугольник теççĕ т. ыт. те.

Кĕскен çырса хунă чух, „треугольник" сăмах вырăнне △ паллă лартаççĕ.

35. Треугольник ячĕсем. Треугольниксем, хăйсен енĕсен тăршшĕне е кĕтесĕсен пысăкăшне кура, тĕрлисем пулаççĕ. Енĕсен тăршшĕ тĕлĕшĕнчен вĕсем: тĕрлĕ енлисем, тануралисем тата тан енлисем пулаççĕ: **тĕрлĕ енлĕ треугольниксен** (34 черт.) пур енĕсен те тăршшĕ тĕрлĕ пулать, **тануралисен** (35 черт.) икĕ енĕ пĕртан, **тан енлисен** (36 черт.) виçĕ енĕ те пĕртан пулаççĕ. Кĕтесĕсен пысăкăшне кура, треугольниксем: **шĕвĕркĕтеслисем** (34 черт.), **тÿркĕтеслисем** (37 черт.) тата **пуклаккĕтеслисем** (38 черт.) пулаççĕ. **Шĕвĕркĕтеслĕ** треугольникĕн пур кĕтесĕсем те шĕвĕр, **тÿркĕтеслисен** пĕр кĕтесĕ тÿрĕ кĕтес, **пуклаккĕтеслисен** пĕр кĕтесĕ пуклак пулать.



34 черт.



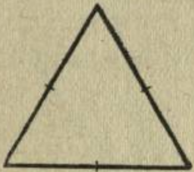
35 черт.

Тÿркĕтеслĕ треугольникĕн тÿрĕ кĕтесне тăвакан енĕсене **катетсем** теççĕ, тÿрĕ кĕтесне хирĕç выртакан енĕ **гипотенуза** ятлă.

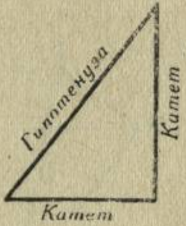
36. Треугольникри тĕп линисем. Треугольникĕн пĕр енĕ унăн **тĕпĕ** пулать, ăна хирĕç выртакан кĕтесĕн тăрри треугольникĕн **тăрри** пулать, треугольник тăрринчен унăн тĕпĕ çине е çак тĕпĕн тăсăмĕ çине антарнă перпендикуляра треугольникĕн **çÿллĕшĕ**

теççĕ. Сăмахран, $\triangle ABC$ (39 тата 39а черт.) AC енĕ унăн тĕпĕ пулсан, B вара унăн тăрри, BD—çӳллĕшĕ пулать.

Тануралла треугольникĕн танмар енне унăн тĕпĕ тесе шутлаççĕ; вара тан енĕсем тунă кĕтесĕн тăрри тануралла треугольникĕн тăрри пулать.

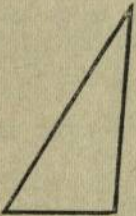


36 черт.

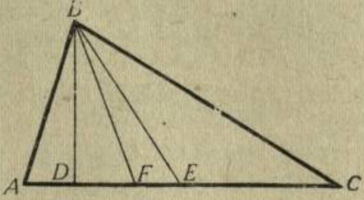


37 черт.

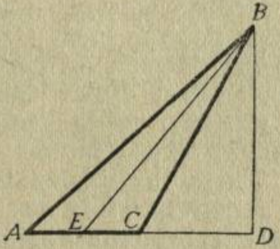
Пĕр-пĕр треугольникĕн кĕтесне тата унăн çав кĕтесне хирĕç выртакан енĕнваррине пĕрлештерекен BE татăка (39 тата 39а черт.) **медиана** теççĕ. Треугольникĕн пĕр-пĕр кĕтесне çурмаран уйăракан тӳрĕ линин BF татăкне (39 черт.) треугольник кĕтесне **пĕртан уйăраканни,** е унăн **биссектриси** теççĕ (тĕрлĕ енлĕ треугольниксенче биссектриса ни медиана, ни çӳллĕшĕ çине вырнаçмасть). Треугольникĕн кашни кĕтес тăрринчен çав кĕтесе хирĕç выртакан енĕ е унăн тăсăмĕ çине перпендикуляр антарма пулать; çапла вара кашни треугольникĕн виçĕ çӳллĕш пулса тăрать.



38 черт.



39 черт.



39а черт.

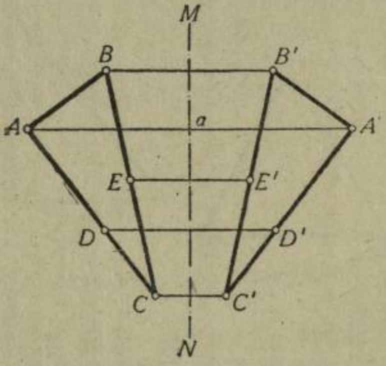
Треугольникĕн кашни кĕтесĕ тăррине çав кĕтесе хирĕç выртакан енĕн варрине тӳрĕ лини татăкĕ туртса пĕрлештерме пулать; çапла вара кашни треугольникĕн виçĕ медиана пулса тăрать.

Кашни треугольникĕн виçĕ биссектриса пурри те çавăн пекех уççăн палăрса тăрать.

Геометрилле фигурăсен тĕнĕл тĕлĕшĕнчи симметрийĕ.

37. Треугольниксен, многоугольниксен тата геометрилле ытти фигурăсен свойствисене вĕреннĕ чух, икĕ пĕртан фигура, е икĕ пĕртан татăк, е икĕ точка пĕр-пĕр тӳрĕ лини тĕлĕшĕнчен тӳремçи çинче хăйсене уйрăм вырнаçса выртни час-часах тĕл пулать. Мĕнле те пулин икĕ точка A тата A' (40 черт.) MN тӳрĕ линин тĕрлĕ енче выртсан, вĕсем çак лини çумĕнчен туртнă перпендикуляр çинче унăн тĕпĕнчен пĕртан инçĕшре $(Aa = A'a)$ выртсан, çак точкăсене MN тӳрĕ лини тĕлĕшĕнчен **симметриллĕ** точкăсем теççĕ.

Пĕр фигурăн (е фигура пĕр пайĕн) кашни точки $A, B, C, D, E, \ldots$ (40 черт.) тепĕр фигурăн (е фигура тепĕр пайĕн) симметриллĕ точкисемпе $A', B', C', D', E', \ldots$ килĕшӳллĕ тăраççĕ пулсан, çавăн пек икӗ фигурӑна (е пӗр фигурӑн икӗ пайне) *MN* тӳрӗ лини тӗлӗшӗнчен симметриллӗ фигурӑсем теҫҫӗ, тепӗр май та ҫаплах.



40 черт.

Ун пек чух *MN* тӳрӗ линие **симметрин тӗнӗлӗ** теҫҫӗ. Кунта „тӗнӗл сӑмахпа уса курнӑ, мӗншӗн тесен *MN* тӳрӗ линин пӗр енче выртакан тӳремҫи пайне (сӑмахран сулахайри пайне) *MN* тӳрӗ линин тепӗр енче выртакан тӳремҫи пайӗ ҫине (сылтӑмри пайӗ ҫине) вырнаҫиччен *MN* тӳрӗ лини тавра, тӗнӗл тавра ҫавӑрнӑ пек, ҫавӑрсан, симметриллӗ фигурӑсем вара пӗр-пӗрин ҫине вырнаҫаҫҫӗ, мӗншӗн тесен *A* точка *A′* точка ҫине вырнаҫать, *B* точка *B′* точка ҫине т. ыт. те.

Тепӗр май калар: пӗр-пӗр тӳрӗ линин пӗр енче выртакан фигурӑна ҫав тӳрӗ лини тавра ҫавӑрнипе унӑн тепӗр енче выртакан фигура ҫине вырнаҫтарсан, вӑл фигурӑсем вара ҫаврӑнакан тӗнӗл тӗлӗшӗнчен симметриллӗ фигурӑсем пулаҫҫӗ. Халь каланинчен ҫакӑ тухса тӑрать:

пӗр-пӗр тӗнӗл тӗлӗшӗнчен симметриллӗ кирек те хӑш икӗ фигура пӗр-пӗринпе пӗртан.

Тӗнӗл тӗлӗшӗнчи симметрие тӗнӗллӗ симметри теҫҫӗ.

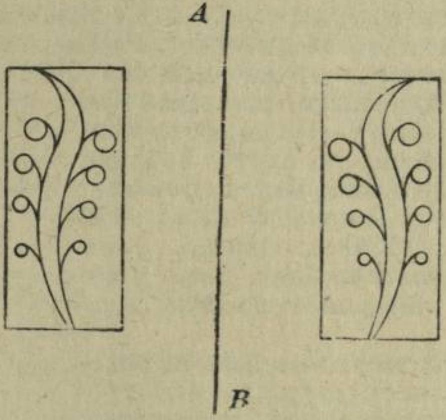
Асӑрхаттарни. Симметриллӗ фигурӑсене симметри тӗнӗлӗ тавра ҫавӑрнипе пӗр-пӗрин ҫине вырнаҫтарма май пулать пулин те, ҫапах та вӗсен, пӗрлештерсе каласан, тӳремҫи ҫинче выртни пӗр пек мар. Кӑна акӑ ҫапла ӑнланмалла:

симметриллӗ икӗ фигурӑна пӗр-пӗрин ҫине вырнаҫтарас тесен, вӗсенчен пӗрне тепӗр май ҫавӑрмалла пулать, апла эппин, ӑна пӗр вӑхӑта тӳремҫирен кӑларма тивет. Фигурӑна тӳремҫирен кӑлармасан, ӑна, ҫак тӳремҫире темле куҫарсан та, тӗнӗл тӗлӗшӗнчен хӑйне симметриллӗ фигура ҫине вырнаҫтарма май ҫук.

41 чертеж ҫинче икӗ тӗрӗ ӳкерчӗкӗ пур, вӗсем *AB* тӳрӗ лини тӗлӗшӗнчен пӗр-пӗринпе симметриллӗ. Сылтӑмра выртакан ӳкерчӗке *AB* тӳрӗ лини тавра ҫавӑрсан, вӑл сулахайри ӳкерчӗк ҫине вырнаҫма пултарать.

Ун чух вара сылтӑмри ӳкерчӗке тепӗр май ҫавӑрмалла пулать. Анчах ӑна тӳремҫирен кӑлармасӑр, тӳремҫи тӑрӑх темле шутарса куҫарсан та, сулахайри ӳкерчӗк ҫине вырнаҫтарма май килмест. Тӗнӗллӗ симметри пурӑнӑҫра час-час тӗл пулать. Пӳлӗме илемлетмелли пусмасем тата хутсем ҫинчи ӳкерчӗксем, архитектурӑн ҫуртсем ҫинчи лаптак ӳкерчӗксем пулса тӑракан эрешсем тата ҫуртсен фасачӗсем пӗр-пӗр тӗнӗл тӑршшӗнчен симметриллӗ формӑллӑ пулаҫҫӗ. Симметриллӗ формӑсем ҫутҫанталӑкра та ҫаплах час-час тӗл пулаҫҫӗ. Сӑмахран, йывӑҫсен ҫулҫисем, курӑк чечекӗсем хӑйсен вӑтам туни тӗлӗшӗнчен симметриллӗ формӑллӑ пулаҫҫӗ. 42 чертеж ҫине ӳкернӗ вӗрене ҫулҫи те ҫавӑн пек.

Лĕпĕш çуначĕсем тата çуначĕсене илемлетекен чечексем те унăн пĕвĕ тĕнĕлĕ тĕлĕшĕнчен симметриллĕ формăллă пулса тăраççĕ (43 черт.).



41 черт.

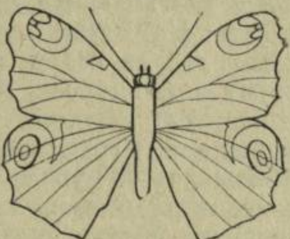
Танураллă треугольникĕн хăшпĕр свойствисем.

38. Теоремăсем. 1) ***Танураллă треугольник тăрринчи кĕтесĕн биссектриси пĕр вăхăтрах треугольник медиани те, çӳллĕшĕ те пулать.***

2) ***Танураллă треугольникĕн тĕпĕ çумĕнчи кĕтесĕсем пĕртан.***

△ *ABC* (44 черт.) танураллă △ пултăр тата *BD* тӳрĕ лини унăн тăрринчи *B* кĕтесе çурмаран уйăрнă пултăр. Çак тĕрĕссине кăтартмалла: çак *BD* биссектриса треугольникĕн медиани те, çӳллĕшĕ те пулать.

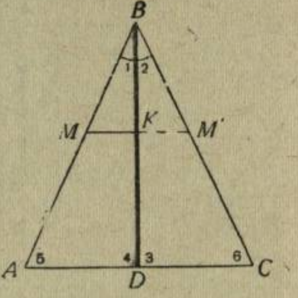
42 черт



43 черт.

ABD треугольнике *BDC* треугольник çине вырнаçтăр тесе, эпир ăна тĕнĕл тавра çавăрнă пек *BD* енĕ тавра çавăрар. Ун чух вара 1-мĕш кĕтеспе 2-мĕш кĕтес пĕртан пирки, *AB* ен *BC* ен çине ӳкет; çак енсем пĕртаннине кура, *A* точка *C* точка çине вырнаçать. Çавăнпа вара *DA* татăк *DC* татăк çине вырнаçать, 4-мĕш кĕтес 3-мĕш кĕтес çине, 5-мĕш кĕтес 6-мĕш кĕтес çине вырнаçаççĕ, апла пулсан, $DA = DC, \angle 4 = \angle 3$ тата $\angle 5 = \angle 6$. *DA* татăк *DC* татăкпа пĕртан пулсан, *DC* медиана пулать; 3-мĕш кĕтес 4-мĕш кĕтеспе пĕртан пулсан, вăл кĕтессем тӳрĕ кĕтессем пулаççĕ; çапла вара *BD* треугольникĕн çӳллĕшĕ пулать; юлашкинчен тата, треугольникĕн тĕпĕ çумĕнчи 5-мĕш кĕтеспе 6-мĕш кĕтес те пĕртан пулаççĕ.

39. Следстви. Танураллӑ ABC треугольникре (44 черт.) пӗр BD тӳрӗ лининех тӑватӑ свойство пур: вӑл — треугольник тӑрринчи кӗтесӗн биссектриси, треугольник тӗпӗ ҫине антарнӑ медиана тата унӑн ҫӳллӗшӗ пулать, юлашкинчен тата, ҫав тӳрӗ лини треугольник тӗпӗ варринчен тӑратнӑ перпендикуляр пулать. Ҫак тӑватӑ свойствӑран кашни свойстви BD тӳрӗ линин треугольникри вырӑнне питӗ ҫителӗклӗ кӑтартса тӑрать пулсан, ун чух вара вӗсенчен пӗри пурри ыттисем те пурте пуррине палӑртать. Сӑмахран, *танураллӑ треугольникӗн тӗпӗ ҫине антарнӑ ҫӳллӗшӗ унӑн тӑрринчи кӗтесӗн биссектриси, унӑн тӗпӗ патне туртнӑ медиани тата унӑн тӗпӗ варринчен тӑратнӑ перпендикулярӗ пулать.*



44 черт.

40. Танураллӑ треугольникӗн симметрийӗ. BD биссектриса танураллӑ ABC треугольникрен (44 черт.) икӗ треугольник (сулахайри тата сылтӑмри) тӑвать; биссектриса тавра ҫаврӑнсан, вӗсене пӗр-пӗрин ҫине вырнаҫтарма пулать. Апла пулсан вара, эпир, танураллӑ треугольникӗн ҫурри ҫинче кирек мӗнле точка илсен те, треугольникӗн тепӗр ҫурри ҫинче BD тӗнӗл тӗлӗшӗнчен симметриллӗ точка тупма пултаратпӑр. Сӑмахран, треугольникӗн AB енӗ ҫинче (44 черт.) M точка илер. Ҫав точкӑран BD ҫине MK перпендикуляр антарар та, унтан вӑл перпендикуляра треугольникӗн BC енӗ патне ҫитиччен тӑсар. Ун чух вара ҫак ен ҫинче M' точка пулса тӑрать; вӑл BD тӗнӗл тӗлӗшӗнчен M точкӑпа симметриллӗ точка пулать. Чӑнах та, ABD треугольнике BD тавра ҫаврӑнсан, вӑл $\triangle BCD$ ҫине вырнаҫать; KM татӑк (тӳрӗ кӗтес пӗртаннине кура, KM' татӑк тӑрӑх каять, BA ен BC ен ҫине ӳкет (B тӑрринчи кӗтессем пӗртаннине кура); апла пулсан, MK татӑкпа BA татӑк ҫинче выртакан M точка KM' татӑкпа BC татӑк ҫинче выртакан M' точка ҫине вырнаҫать. Кунтан ҫакӑ курӑнса тӑрать: $KM = KM'$. Ҫапла ӗнтӗ, M точкӑпа M' точка DB биссектрисӑн тӗрлӗ енче, вӑл биссектрисӑпа перпендикулярлӑ татӑк ҫинче тата ҫак перпендикулярӑн тӗпӗнчен пӗртан инҫӗшре выртаҫҫӗ; апла пулсан, вӑл точкӑсем BD тӗнӗл тӗлӗшӗнчен пӗр-пӗринпе симметриллӗ пулаҫҫӗ. Ҫапла ӗнтӗ, *танураллӑ треугольникре унӑн тӑрринчи кӗтесӗн биссектриси унӑн симметри тӗнӗлӗ пулать.*

Треугольниксен пӗртанлӑх паллисем.

41. Малтанхи ӑнланусем. Геометрилле икӗ фигура, сӑмахран, икӗ треугольник, пӗри тепӗрин ҫине вырнаҫма пултарать пулсан, вӗсене **пӗртан** фигурӑсем теҫҫӗ. Пӗр-пӗрин ҫине вырнаҫакан треугольниксенче, паллах, унӑн пур килӗшӳллӗ элеменчӗсем те пӗр-пӗринпе пӗртан пулаҫҫӗ, урӑхла каласан, вӗсен енӗсем, кӗтесӗсем, ҫӳллӗшӗсем, медианисем тата биссектрисисем пӗр-пӗринпе пӗртан пулаҫҫӗ. Анчах икӗ треугольник пӗртаннине кӑтартса парас тесен, вӗсен пур элеменчӗсен те пӗртаннине кӑтартса пани кирлӗ мар, вӗсенчен хӑшпӗр элеменчӗсен пӗртанлӑхне кӑтартса парсан та ҫитет.

42. Треугольниксен пӗртанлӑхӗн виҫӗ палли.

Теоремӑсем. 1) ***Пӗр треугольникӗн икӗ енӗ тата вӗсен хушшинчи кӗтесӗ тепӗр треугольникӗн икӗ килӗшӳллӗ енӗпе тата вӗсен хушшинчи килӗшӳллӗ кӗтесӗпе пӗртан пулсан, ҫакӑн пек треугольниксем пӗртан пулаҫҫӗ.***

2) ***Треугольникӗн пӗр енӗ тата ҫав енӗн вӗҫӗсенчи икӗ кӗтесӗ тепӗр треугольникӗн килӗшӳллӗ енӗпе тата ҫав енӗн вӗҫӗсенчи килӗшӳллӗ кӗтесӗсемпе пӗртан пулсан, ҫакӑн пек треугольниксем пӗртан пулаҫҫӗ.***

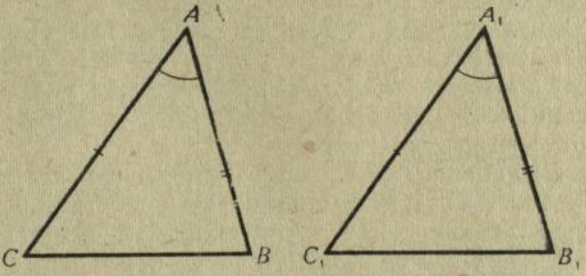
3) ***Пӗр треугольникӗн виҫӗ енӗ тепӗр треугольникӗн килӗшӳллӗ виҫӗ енӗпе пӗртан пулсан, ҫакӑн пек треугольниксем пӗртан пулаҫҫӗ.***

1) ABC тата $A_1B_1C_1$ икӗ треугольник (45 черт.) пулччӑр, вӗсен:

$$AC = A_1C_1,\ AB = A_1B_1,\ \angle A = \angle A_1.$$

Ҫак треугольниксем пӗртаннине кӑтартса памалла.

ABC треугольника $A_1B_1C_1$ треугольник ҫине хурар, A точка



45 черт.

A_1 точка ҫине вырнаҫтарар, AC ене A_1C_1 ен тӑрӑх ярар[1]. Ун чух вара, ҫак енсем пӗртан пирки, C точка C_1 точка ҫине вырнаҫать; A кӗтес A_1 кӗтеспе пӗртан пирки, AB ен A_1B_1 ен тӑрӑх каять; ҫак енсем пӗртан пирки, B точка B_1 точка ҫине вырнаҫать; ҫавӑнпа CB ен C_1B_1 енпе вырнаҫать (мӗншӗн тесен икӗ точкӑна пӗр тӳрӗ линипе кӑна пӗрлештерме пулать), треугольниксем вара пӗр-пӗрин ҫине вырнаҫаҫҫӗ; апла пулсан, вӗсем пӗртан пулаҫҫӗ.

2) ABC тата $A_1B_1C_1$ (46 черт.) икӗ треугольник пулччӑр, вӗсен:

$$\angle C = \angle C_1 \text{ тата } \angle B = \angle B_1,\ CB = C_1B_1.$$

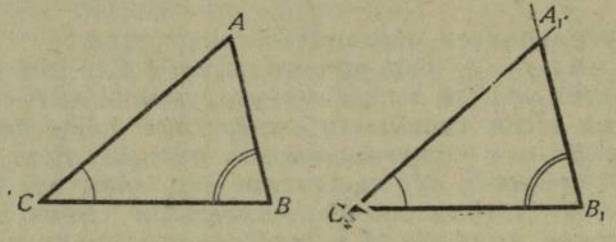
Ҫак треугольниксем пӗртаннине кӑтартса памалла.

ABC треугольника $A_1B_1C_1$ треугольник ҫине хурар, C точкӑна C_1 точка ҫине вырнаҫтарар, CB ене C_1B_1 ен тӑрӑх ярар. Ун чух вара, ҫак енсем пӗртан пирки, B точка B_1 точка ҫине вырнаҫать; B кӗтес B_1 кӗтеспе, C кӗтес C_1 кӗтеспе пӗртан пирки, BA ен B_1A_1 ен тӑрӑх тата CA ен C_1A_1 ен тӑрӑх каять.

---

[1] Ҫак параграфра каланисене тӑвас тесен, пӗр-пӗрин ҫине хумалли треугольниксенчен пӗрне хӑш чух тепӗр май ҫаварма тивет.

Икĕ тӳрĕ лини пĕр-пĕрне пĕр точкăра анчах касса иртеççĕ, çавăнпа A точка A_1 точка çине вырнаçать. Çапла вара треугольниксем пĕр-пĕрин çине вырнаçаççĕ; апла пулсан, треугольниксем пĕртан пулаççĕ.



46 черт.

3) ABC тата $A_1B_1C_1$ (47 черт.) икĕ треугольник пулччăр, вĕсен:

$$AB = A_1B_1,\ BC = B_1C_1 \text{ тата } CA = C_1A_1.$$

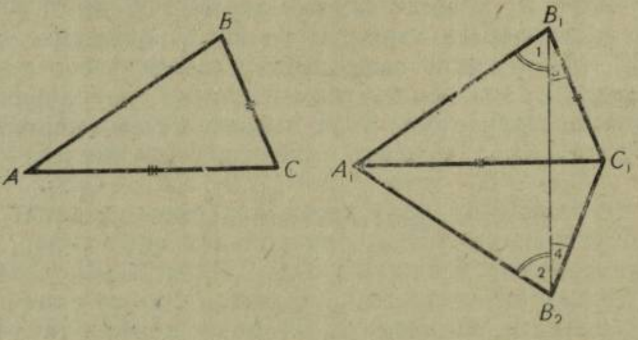
Çак треугольниксем пĕртаннине кăтартса памалла.

Ку пĕртанлăхăн паллисене треугольниксене пĕр-пĕрин çине хунипе кăтартса пама май килмест, мĕншĕн тесен треугольниксен кĕтесĕсен пысăкăшне пĕлмесĕр, вĕсен икĕ пĕртан енĕ пĕр-пĕрин çине вырнаçать пулин те, ытти енĕсем пĕр-пĕрин çине вырнаçассине кăтартса пама пултараймастпăр эпир.

Треугольниксене пĕр-пĕрин çине хурас вырăнне вĕсене пĕр-пĕрин **çумне хунипе** усă курар.

ABC треугольнике $A_1B_1C_1$ треугольник çумне хурар, вĕсен пĕртан AC тата A_1C_1 енĕсем пĕр-пĕрин çине вырнаçаççĕ. Ун чух вара ABC треугольник $A_1B_1C_1$ треугольникĕн вырăнне йышăнать.

B_1 точкăпа B_2 точкăна тӳрĕ линипе пĕрлештерсен, икĕ тануралла треугольник пулса тăрать: $A_1B_1B_2$ тата $B_1C_1B_2$, çак икĕ треугольникĕн пĕр тĕп B_1B_2 пулать. Тануралла треугольникĕн тĕпĕ çумĕнчи кĕтесĕсем пĕртан (38 §); апла пулсан, $\angle 1 = \angle 2$ тата $\angle 3 = \angle 4$ пулать, çавăнпа $\angle A_1B_1C_1 = \angle A_1B_2C_1 = B$ пулаççĕ.



47 черт.

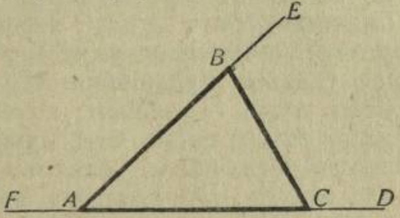
Çапла вара пана треугольниксем пĕртан пулмалла, мĕншĕн тесен пĕр треугольникĕн икĕ енĕ тата вĕсем хушшинчи кĕтесĕ тепӗр треугольникӗн икӗ килӗшӳллӗ енӗпе тата вӗсен хушшинчи килӗшӳллӗ кӗтесӗпе пӗртан[1].

Асӑрхаттарни. *Пӗртан треугольниксен пӗртан енӗсене хирӗҫ пӗртан кӗтессем выртаҫҫӗ, тепӗр майлӑ каласан, пӗртан кӗтессене хирӗҫ пӗртан енсем выртаҫҫӗ.*

Треугольниксен пӗртанлӑхӗ ҫинчен пӗлтерекен теоремӑсем тата пӗртан треугольниксене кунта кӑтартнӑ паллӑсем тӑрӑх уйӑрса илме пӗлни геометрилле задачӑсене нумайӑшне шутланӑ чух питӗ пысӑк ҫӑмӑллӑх параҫҫӗ тата вӗсем нумай теоремӑсен тӗрӗслӗхне кӑтартса пама кирлӗ пулаҫҫӗ. Треугольниксен пӗртанлӑхӗ ҫинчен пӗлтерекен теоремӑсем геометрилле хутлӑ фигурӑсен свойствисене палӑртмалли чи кирлӗ хатӗрсем пулса тӑраҫҫӗ. Вӑл чӑнах ҫаплине вӗренекенсем геометрие малалла вӗреннӗ чух курӗҫ.

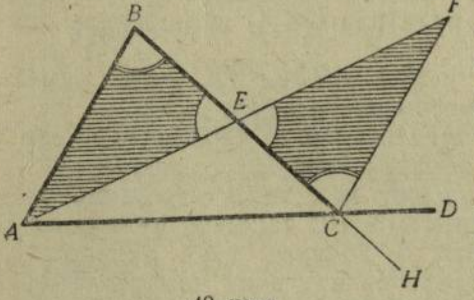
Треугольникӗн тулашӗнчи кӗтесӗ тата унӑн свойстви.

43. Определени. Треугольникӗн (е многоугольникӗн) пӗр-пӗр кӗтесӗпе юнашар тӑракан кӗтесе ҫак треугольникӗн (е многоугольникӗн) **тулашӗнчи кӗтесӗ** теҫҫӗ. Сӑмахран, *BCD*, *CBE*, *BAF* кӗтессем (48 черт.) ҫавӑн пек кӗтессем пулаҫҫӗ. Треугольникӗн (е многоугольникӗн) тулашӗнчи кӗтесӗсенчен пуҫне тата хӑйне уйрӑм кӗтесӗсем пур, вӗсене **шалти кӗтессем** теҫҫӗ. Треугольникӗн (е многоугольникӗн) кашни кӗтесӗ ҫумӗнче (ҫав кӗтесӗн пӗр енне е тепӗр енне тӑссан) тулашӗнчи кӗтессем икшер тума пулать. Вӑл кӗтессем вертикальлӗ кӗтессем пулаҫҫӗ, ҫавӑнпа вӗсем пӗр-пӗринпе тан пулаҫҫӗ.



48 черт.

44. Теорема. ***Треугольникӗн тулашӗнчи кӗтесӗ хӑйпе юнашар тӑман шалти кӗтесрен кашнинчен пысӑкрах.***



49 черт.

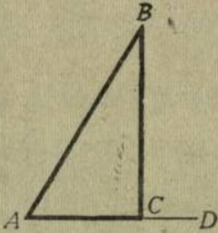
Сӑмахран, *ABC* треугольникӗн (49 черт.) тулашӗнчи *BCD* кӗтес хӑйпе юнашар тӑман шалти *A* тата *B* кӗтессенчен кашнинчен пысӑкрах пулнине кӑтартар. Треугольникӗн *BC* енӗн варринчен *AE* медиана туртар; унтан, ӑна тӑсса ярса, *AE* тӑршшӗ *EF* татӑк виҫсе илер. *F* точка *BCD* кӗтесӗн варринче выртать пулмалла. *F* точкӑна *C* точкӑпа тӳрӗ лини туртса пӗрлештерер. *ABE* тата *EFC* треугольниксем (штрихленисем) пӗртан, мӗншӗн тесен *E* точкӑра вӗсен икӗ

---

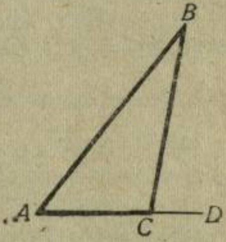
[1] B_1B_2 тӳрӗ лини кирек хӑҫан та $A_1B_1C_1B_2$ фигурӑн варринчен ирттӗр тесен, треугольниксене пӗр-пӗрин ҫумне хунӑ чух, вӗсен пӗрлехи енӗ—A_1C_1 ытти енӗсенчен чи вӑрӑмми пулмалла.

килĕшӳллĕ пĕртан енĕсен хушшинче пĕрер пĕртан кĕтессем пур. Треугольниксем пĕртан пулнинчен ҫакă тухса тăрать: вĕсен *AE* тата *EF* пĕртан енĕсене хирĕҫ выртакан *B* тата *ECF* кĕтесĕсем пĕртан пулаҫҫĕ. Анчах *ECF* кĕтес тулашĕнчи *BCD* кĕтесĕн пĕр пайĕ пулса тăрать, ҫавăнпа та вăл тулашĕнчи кĕтесрен пĕчĕкрех; апла пулсан вара, *B* кĕтес те *BCD* кĕтесрен пĕчĕкрех пулать.

Треугольникĕн *BC* енне *C* точка хыҫнелле тăссан, унăн тулашĕнчи кĕтесĕ *ACH* пулса тăрать; ку кĕтес *BCD* кĕтеспе пĕртан пулать. Треугольникĕн *B* тăрринчен *AC* енĕ патне медиана туртсан тата ăна ҫавăн тăршшех *AC* тепĕр енне тăссан, *A* кĕтес *ACH* кĕтесрен, урăхла каласан, *BCD* кĕтесрен, пĕчĕкрех пулнине шăп ҫаплах кăтартса парăпăр.



50 черт.



51 черт.

45. Следстви. *Треугольникĕн пĕр кĕтесĕ тӳрĕ е пуклак пулсан, унăн ытти икĕ кĕтесĕ шĕвĕр кĕтессем пулаҫҫĕ.*

Чăнах та, *ABC* треугольникĕн (50 тата 51 чертеж) пĕр-пĕр *C* кĕтесĕ тӳрĕ е пуклак кĕтес пултăр; ун чух вара унпа юнашар тăракан тулашĕнчи *BCD* кĕтес тӳрĕ е шĕвĕр кĕтес пулма тивĕҫ; ҫапла ĕнтĕ кунта кăтартса панипе *A* тата *B* кĕтессем ҫак тулашĕнчи кĕтесрен пĕчĕкрех кĕтессем пулса тăраҫҫĕ, апла пулсан, вăл кĕтессем иккĕшĕ те шĕвĕр кĕтессем пулмалла.

Треугольникĕн енĕсемпе кĕтесĕсен хушшинчи ҫыхăну.

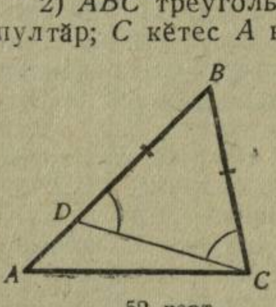
46. Теоремăсем. ***Кирек хăш треугольникре те:***

1) пĕртан енсене хирĕҫ пĕртан кĕтессем выртаҫҫĕ;

2) пысăкрах ене хирĕҫ пысăкрах кĕтес выртать.

1) Треугольникĕн икĕ енĕ пĕр-пĕринпе пĕртан пулсан, ун пек треугольник танураллă треугольник пулать; ун чух вара унăн пĕртан енĕсене хирĕҫ выртакан кĕтесĕсем танураллă треугольникĕн тĕпĕ ҫумĕнчи кĕтесĕсем пулнăран (38 §) пĕр-пĕринпе пĕртан пулма тивĕҫ.

2) *ABC* треугольникре (52 черт.) *AB* ен *BC* енрен пысăк пултăр; *C* кĕтес *A* кĕтесрен пысăккине кăтартса памалла.



52 черт.

Треугольникĕн *B* тăрринчен пуҫласа унăн пысăкрах енĕ *BA* ҫинчен *BD* татăк виҫсе илер, вăл татăк треугольникĕн пĕчĕкрех енĕ *BC* тăршшĕ пулмалла; *D* точкăпа *C* точкăна тӳрĕ линипе пĕрлештерер. Ун чух вара танураллă треугольник *DBC* пулса тăрать, унăн тĕпĕ вĕҫĕсенчи кĕтесĕсем пĕртан, урăхла каласан, $\angle BDC = \angle BCD$. Анчах *BDC* кĕтес $\triangle ADC$ тĕлĕшĕнчен унăн тулашĕнчи кĕтесĕ пулать, ҫавăнпа *BDC* кĕтес *A* кĕтесрен пысăкрах, эппин *BCD* кĕтес те *A* кĕтесрен пысăкрах пулать, апла пулсан вара

BCA кĕтес, паллах, *A* кĕтесрен пысăкрах пулать. Çапла ĕнтĕ теорема тĕрĕссине кăтартса патăмăр.

47. Тӳртĕн теоремăсем. ***Кирек хăш треугольникре те:***

1) унăн пĕртан кĕтесĕсене хирĕç пĕртан енĕсем выртаççĕ;

2) пысăкрах кĕтесне хирĕç пысăкрах енĕ выртать.

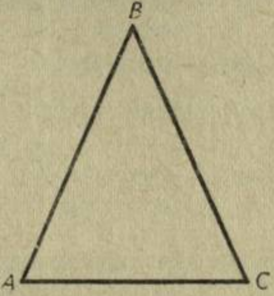
1) *ABC* треугольникĕн *A* кĕтесĕпе *C* кĕтесĕ пĕртан пулччăр (53 черт.), çак тĕрĕссине кăтартса памалла: $AB = BC$.

Тепĕр майлă пултăр, урăхла каласан, *AB* ен *BC* енпе пĕртан мар пултăр. Ун чух вара çак енсенчен пĕри тепринчен пысăкрах пулмалла; çапла вара тӳрĕ теорема тăрăх, *A* тата *C* кĕтессенчен пĕри тепринчен пысăкрах пулмалла. Анчах ку панă условие хирĕç пулать: услови тăрăх $\angle A = \angle C$. Апла пулсан, *AB* енпе *BC* ен пĕртан мар теме юрамасть; $AB = BC$ тенине йышăнмаллах пулать.

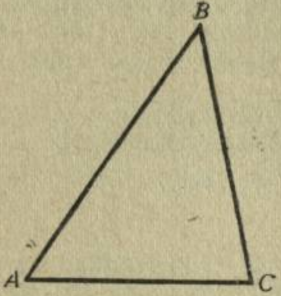
2) *ABC* треугольникĕн (54 черт.) *C* кĕтесĕ *A* кĕтесрен пысăкрах пултăр. Çакна кăтартса памалла: $AB > BC$.

Тепĕр майлă пултăр, урăхла каласан, треугольникĕн *AB* енĕ *BC* енĕнчен пысăк мар пултăр. Ун чух вара икĕ тĕрлĕ пулма пултăрать: е $AB = BC$, е $AB < BC$.

Пĕрремĕшĕнче, тӳрĕ теорема тăрăх, *C* кĕтес *A* кĕтеспе пĕртан пулĕччĕ; иккĕмĕшĕнче *C* кĕтес *A* кĕтесрен пĕчĕкрех пулĕччĕ; çаксем иккĕшĕ те условие хирĕç пулаççĕ; апла пулсан, çаксене пĕрне те йышăнма юрамасть. Йышăнмалли пĕрре кăна юлать, вăл çакă пулать: $AB > BC$.



53 черт.



4 черт.

Следствисем.

1) *Тан енлĕ треугольникĕн пур кĕтесĕсем те пĕртан.*

2) *Танкĕтеслĕ треугольникĕн пур енĕсем те пĕртан.*

48. **Хирĕçле доказательство.** Тӳртĕн теоремăсем тĕрĕссине кăтартма халь анчах усă курнă меле **хирĕçле доказательство** теççĕ, е **юрăхсăрлăха кӳни** (reductio ad absurdum) теççĕ. Хирĕçле доказательство тесе ăна акă мĕншĕн калаççĕ: каласа ăнлантарнин пуçламăшĕнче теоремăн заключенине (тĕрĕссине кăтартса памаллине) хирĕç шухăшлă туса йышăнаççĕ. **Юрăхсăрлăха кӳни** тесе ăна акă çакăншăн калаççĕ: теоремăн заключенине хирĕç шухăшлă туса йышăнаççĕ те, çав шухăша тытса пырса, каласа ăнлантарни урлă юрăхсăр вывод (абсурд) патне çитсе тăраççĕ. Çакăн пек юрăхсăр вывод туни, каласа ăнлантарни пуçламăшĕнче йышăннине пăрахтарса, теоремăн заключенине (унăн тĕрĕссине кăтартса памаллине) йышăнтарать пире.

Çак мелпе теоремăсем тĕрĕссине кăтартса пама питĕ час-час усă кураççĕ.

49. Тӳртӗн теоремӑсем ҫинчен асӑрхаттарни. Геометрие вӗренме пуҫлакансем час-час пӗр пит паллӑ йӑнӑш тӑваҫҫӗ. Вӑл йӑнӑш ҫакӑ пулать: тӳрӗ теорема тӗрӗссине кӑтартса панӑ пулсан, тӳртӗн теорема тӗрӗсси хӑех паллӑ, тесе хисеплени. Кунтан тӳртӗн теоремӑсен доказательстви кирлӗ мар тени тухса тӑрать. Ҫакӑн пек заключенин йӑнӑшне нумай примерсемпе кӑтартса пама пулать. Уйрӑмӑн ҫакӑн пек примерсене 30 §-ра кӑтартнӑ. Ҫапла ӗнтӗ, тӳртӗн теоремӑсем тӗрӗс пулсан, вӗсем тӗрӗссине кирек хӑҫан та хӑйне уйрӑм кӑтартса параҫҫӗ.

Тӳрӗ линин татӑкӗпе хуҫӑк линин танлаштаруллӑ тӑршшӗ.

50. Теорема. ***Треугольникӗн кашни енӗ ытти икӗ енӗн сумминчен пӗчӗкрех пулать.***

Треугольникӗн чи пысӑк енӗнчен пӗчӗкрех енне илсен, вӑл, паллах, ытти икӗ енӗн сумминчен пӗчӗкрех пулать. Апла пулсан, пирӗн ак ҫакӑ тӗрӗссине кӑтартса памалла: треугольникӗн чи пысӑк енӗ те ытти икӗ енӗн сумминчен пӗчӗкрех пулать.

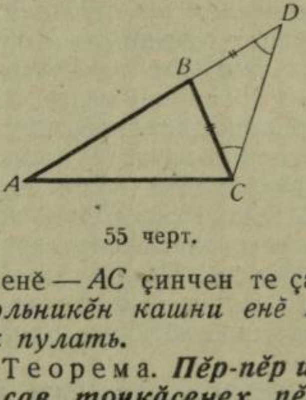
ABC треугольникӗн (55 черт.) чи пысӑк енӗ AC пултӑр. Унӑн AB енне тӑсар та ҫав тӑсӑм ҫине BC тӑршшӗ BD виҫсе хурар, унтан DC татӑк туртар. $\triangle BDC$ тануралла пулнӑран $\angle D = \angle DCB$; ҫавӑнпа D кӗтес DCA кӗтесрен пӗчӗкрех, апла пулсан, ADC треугольникӗн AC енӗ AD енӗнчен пӗчӗкрех пулать (47 §), урӑхла каласан, $AC < AB + BD$. BD вырӑнне BC лартсан, ҫакӑ пулать:

$$AC < AB + BC.$$

Следстви. Ҫак танмарлӑхӑн кашни пайӗнчен AB-шер е BC-шер кӑларар.

$$AC - AB < BC;$$
$$AC - BC < AB.$$

Ку танмарлӑха сылтӑмран сулахаялла вуласан, ҫакна куратпӑр: треугольникӗн BC тата AB енӗсенчен кашни енӗ ытти икӗ енӗн разноҫӗнчен пысӑкрах; паллах, треугольникӗн виҫҫӗмӗш, чи пысӑк енӗ — AC ҫинчен те ҫакна каламалла пулать; апла пулсан, *треугольникӗн кашни енӗ ытти икӗ енӗн разноҫӗсенчен пысӑкрах пулать.*



55 черт.

56 черт.

51. Теорема. ***Пӗр-пӗр икӗ точкӑна пӗрлештерекен тӳрӗ лини ҫав точкӑсенех пӗрлештерекен кирек хӑш хуҫӑк линирен те пӗчӗкрех.***

Икĕ сыпăклă хуçăк лини çинчен калакан теорема тĕрĕссине çак параграф умĕнчи параграфра кăтартса панă. Икĕ енлĕрен ытларах енлĕ хуçăк линие пăхса тухар.

AE тӳрĕ линин (56 черт.) татăкĕ пултăр, вăл татăк A точкăпа E точкăна пĕрлештерсе тăтăр, çав точкăсенех пĕрлештерекен хуçăк лини $ABCDE$ пултăр. Çак тĕрĕссине кăтартмалла: AE татăк $AB+BC+CD+DE$ татăксен сумминчен пĕчĕккĕрех.

A точкăна C тата D точкăпа пĕрлештерсен, ку теорема умĕнчи теорема тăрăх çакна тупатпăр:

$$AE < AD + DE;$$
$$AD < AC + CD;$$
$$AC < AB + BC.$$

Çак танмарлăхсене пĕр-пĕринпе хушар, хушсан кайран танмарлăхсен икĕ пайĕнчен те AD тата AC татăкшар кăларар. Ун чух вара çакă пулса тăрать:

$$AE < AB + BC + CD + DE.$$

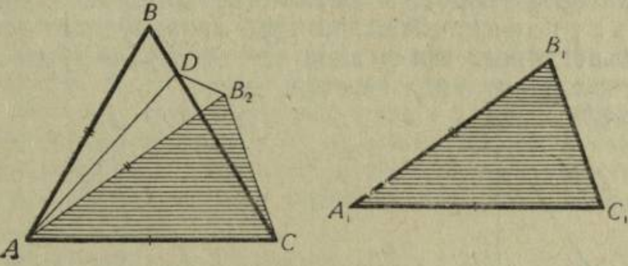
52. Икĕ килĕшӳллĕн тан енлĕ треугольниксем.

Теоремăсем. ***Пĕр треугольникĕн икĕ енĕ тепĕр треугольникĕн икĕ килĕшӳллĕ енĕпе пĕртан пулсан:***

1) ***вĕсен хушшинчи пысăкрах кĕтесне хирĕç пысăкрах енĕ выртать.***

2) Тӳртĕн: ***ытти енсенчен пысăкрах енне хирĕç пысăкрах кĕтесĕ выртать.***

1) ABC тата $A_1B_1C_1$ треугольниксенче (57 черт.) çаксене панă: $AC=A_1C_1$, $AB=A_1B_1$ тата $\angle A > \angle A_1$. Çак тĕрĕссине кăтартмалла: $BC > B_1C_1$. $A_1B_1C_1$ треугольнике $\triangle ABC$ çине хурар, A_1C_1



57 черт.

енне AC енĕ çине вырнаçтарар. A_1 кĕтес BAC кĕтесрен пĕчĕкрех, çавăнпа A_1B_1 ен BAC кĕтес варринчен каять; $A_1B_1C_1$ треугольник AB_2C треугольникĕн вырăнне йышăннă пултăр (B_2 тăрă ABC треугольникĕн тулашне, е унăн ăшне, е BC ен çине ӳкме пултарать; çаксем валли пурин валли те пĕр доказательствах юрăхлă пулать). BAB_2 кĕтесĕн AD биссектриссине туртар тата D точкăна B_2 точкăпа пĕрлештерер, ун чух вара икĕ треугольник пулса тăрать: ABD тата DAB_2; çак треугольниксем пĕр-пĕринпе пĕртан, мĕншĕн тесен AD вĕсен пĕрлехи енĕ пулать, услови тăрăх $AB = AB_2$ тата чертежне пĕртан тунипе $\angle BAD = \angle DAB_2$. Треугольниксем пĕртаннинчен çакă тухса тăрать: $BD = DB_2$. Халĕ ĕнтĕ DBB_2 треугольникрен çакăн пек вывод тăватпăр: $B_2C < B_2D + DC$ (50 §), е (B_2D вырăнне BD лартсан): $B_2C < BD + DC$ пулать, апла пулсан вара $B_1C_1 < BC$.

2) Çак ABC тата $A_1B_1C_1$ треугольниксенчех çаксене панă пултăр: $AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$ тата $BC > B_1C_1$ пулччăр. Çак тĕрĕссине кăтартмалла: $\angle A > \angle A_1$.

Тепĕр майлă пултăр, урăхла каласан, A кĕтес A_1 кĕтесрен пысăк мар пултăр; ун чух вара икĕ тĕрлĕ пулма пултарать: е $\angle BAC = \angle A_1$, е $\angle BAC < \angle A_1$ пулаççĕ. Пĕрремĕшĕнче треугольниксем пĕрпĕринпе пĕртан пулнă пулĕччĕç; апла вара, BC ен B_1C_1 енпе пĕртан пулĕччĕ; услови тăрăх BC ен B_1C_1 енпе пĕртан пулма пултараймасть; иккĕмĕшĕнчен BC ен (1-мĕш теорема тăрăх) B_1C_1 енрен пĕчĕкрех пулĕччĕ, ку та çаплах условире каланине хирĕç пулать. Çапла вара çаксене пĕрне те йышăнма юрамасть, йышăнмалли пĕр май кăна юлать, вăл çакă пулать: $\angle A > \angle A_1$.

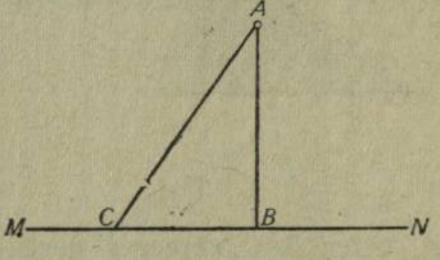
Перпендикулярăн тата тайлăк линисен танлаштаруллă тăршшĕ.

53. Теорема. ***Пĕр-пĕр точкăран тӳрĕ лини çине антарнă перпендикуляр çав точкăранах çав лини çине[1] туртнă кирек хăш тайлăк линирен те пĕчĕкрех.***

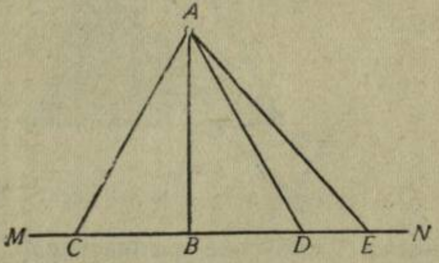
A точкăран MN тӳрĕ лини çине антарнă AB татăк (58 черт.) перпендикуляр пултăр, çав A точкăранах MN тӳрĕ лини çине туртнă AC татăк пĕр-пĕр тайлăк лини пултăр; çак тĕрĕссине кăтартмалла: $AB < AC$.

ABC треугольникĕн B кĕтесĕ — тӳрĕ кĕтес, C кĕтесĕ — шĕвĕр кĕтес (45 §); апла пулсан, $\angle C < \angle B$, çавăнпа та $AB < AC$ пулать, çапла ĕнтĕ теорема тĕрĕссине кăтартса патăмăр.

Асăрхаттарни. „Точкăпа тӳрĕ лини хушши" тени чи кĕске хушша пĕлтерет, вăл хушша çав точкăран тӳрĕ лини çине антарнă перпендикулярпа виçеççĕ.



58 черт.



59 черт.

54. Теорема. ***Тӳрĕ лини тулашĕнче выртакан пĕр точкăранах çак тӳрĕ лини патне перпендикуляр тата темиçе тайлăк линисем туртсан:***

---

[1] 53, 54 тата 55 параграфсенче „панă точкăпа перпендикуляр тĕпĕ хушшинчи перпендикуляр татăкĕ" тата „панă точкăпа тайлăк лини тĕпĕ хушшинчи тайлăк лини татăкĕ" тесе калас вырăнне кĕскен „перпендикуляр" тата „тайлăк лини" тенĕ.

1) ***икĕ тайлăк лини тĕпĕсемпе перпендикуляр тĕпĕ хушшисем пĕртан пулсан, ун пек тайлăк линисем пĕртан пулаççĕ;***

2) ***икĕ тайлăк лини тĕпĕсемпе перпендикуляр хушшисем пĕртан мар пулсан, хăш тайлăк лини тĕпĕпе перпендикуляр тĕпĕ хушши пысăкрах, çав тайлăк лини ытти тайлăк линисенчен пысăкрах пулать.***

1) AC тата AD (59 черт.) A точкăран MN тӳрĕ лини патне туртнă икĕ тайлăк лини пулччăр, çав тайлăк линисен C тата D тĕпĕсемпе AB перпендикуляр тĕпĕ хушшисем пĕртан пулччăр, урăхла каласан, $CB = BD$ пултăр; çак тĕрĕссине кăтартмалла: $AC = AD$.

ABC тата ABD треугольниксен пĕрлехи енĕ AB пур, унтан пуçне услови тăрăх $BC = BD$ тата $\angle ABC = \angle ABD$ (мĕншĕн тесен вĕсем—тӳрĕ кĕтессем); апла пулсан, ку треугольниксем — пĕртан треугольниксем, çавăнпа та $AC = AD$ пулать.

2) AC тата AE (59 черт.) A точкăран MN тӳрĕ лини патне туртнă икĕ тайлăк лини пулччăр, çав тайлăк линисен тĕпĕсемпе перпендикуляр тĕпĕ хушшисем пĕртан мар пулччăр; сăмахран, $BE > BC$ пултăр. Çак тĕрĕссине кăтартмалла: $AE > AC$.

MN тӳрĕ лини тăрăх перпендикулярăн тĕпĕнчен пуçласа BC тăршшĕ BD татăк виççе илер те AD туртар. Маларах кăтартса панă тăрăх $AD = AC$. AE татăка AD татăкпа танлаштарса пăхар. ABE кĕтес ABD треугольник тĕлĕшĕнчен унăн тулашĕнчи кĕтесĕ пулса тăрать, çавăнпа та вăл тӳрĕ кĕтесрен пысăкрах кĕтес пулать; апла эппин ADE кĕтес пуклак кĕтес пулать, çавăнпа та AED кĕтес шĕвĕр кĕтес пулма тивĕç (45 §); çапла ĕнтĕ $\angle ADE > \angle AED$ пулать; апла пулсан тата $AE > AD$, çавăнпа та $AE > AC$ пулать.

55. Тӳртĕн теоремăсем. ***Тӳрĕ лини тулашĕнче выртакан пĕр точкăранах çак тӳрĕ лини çине перпендикуляр тата тайлăк линисем туртнă пулсан:***

1) ***икĕ тайлăк лини пĕртан пулсан, вĕсен тĕпĕсемпе перпендикуляр тĕпĕ хушшисем пĕртан пулаççĕ;***

2) ***икĕ тайлăк лини пĕртан мар пулсан, вăрăмраххин тĕпĕпе перпендикуляр тĕпĕ хушши кĕскереххин тĕпĕпе перпендикуляр тĕпĕ хушшинчен пысăкрах пулать.***

Çак теоремăсем тĕрĕссине вĕренекенсен (хирĕçле мелпе) хăйсен кăтартса памалла.

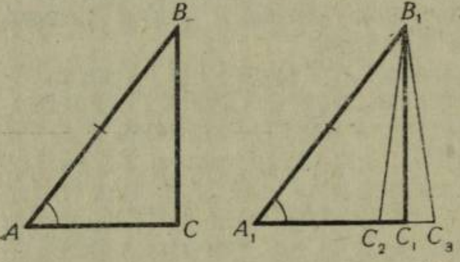
Тӳркĕтеслĕ треугольниксен пĕртанлăх паллисем.

56. Треугольникĕн уйрăм доказательство ыйтман икĕ палли. Тӳркĕтеслĕ треугольниксен катечĕсем хушшинчи кĕтесĕсем кирек хăçан та тӳрĕ кĕтессем пулаççĕ. Апла пулсан:

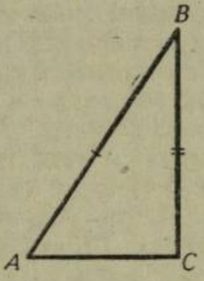
1) ***пĕр тӳркĕтеслĕ треугольникĕн катечĕсем тепĕр тӳркĕтеслĕ треугольникĕн килĕшӳллĕ катечĕсемпе пĕртан пулсан, ун пек треугольниксем пĕр-пĕринпе пĕртан пулаççĕ***;

2) ***пĕр тӳркĕтеслĕ треугольникĕн катечĕ тата ун çумĕнчи шĕвĕр кĕтесĕ тепĕр тӳркĕтеслĕ треугольникĕн килĕшӳллĕ катечĕпе тата ун çумĕнчи килĕшӳллĕ шĕвĕр кĕтесĕпе пĕртан пулсан, ун пек тӳркĕтеслĕ треугольниксем пĕр-пĕринпе пĕртан пулаççĕ.***

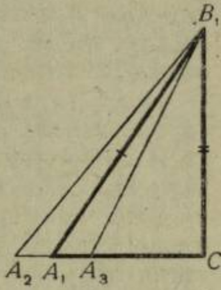
Треугольникĕн çак икĕ палли хăйне уйрăм доказательство ыйтмасçĕ, мĕншĕн тесен вĕсем пĕтĕмĕшле паллăсен уйрăм пайĕсем пулаççĕ. Тата икĕ паллă тĕрĕслĕхне кăтартар, вăл паллăсем тӳркĕтеслĕ треугольниксен анчах пулаççĕ.



60 черт.



61 черт.



62 черт.

57. Тӳркĕтеслĕ треугольникĕн уйрăм доказательство ыйтакан икĕ палли.

Теоремăсем. 1) ***Пĕр тӳркĕтеслĕ треугольникĕн гипотенузи тата унăн шĕвĕр кĕтесĕ тепĕр тӳркĕтеслĕ треугольникĕн килĕшӳллĕ гипотенузипе тата унăн килĕшӳллĕ шĕвĕр кĕтесĕпе пĕртан пулсан, ун пек тӳркĕтеслĕ треугольниксем пĕр-пĕринпе пĕртан пулаççĕ.***

2) ***Пĕр тӳркĕтеслĕ треугольникĕн гипотенузи тата унăн катечĕ тепĕр тӳркĕтеслĕ треугольникĕн килĕшӳллĕ гипотенузипе тата унăн килĕшӳллĕ катечĕпе пĕртан пулсан, ун пек тӳркĕтеслĕ треугольниксем пĕр-пĕринпе пĕртан пулаççĕ.***

1) ABC тата $A_1B_1C_1$ (60 черт.) тӳркĕтеслĕ треугольниксем пулччăр, вĕсен $AB=A_1B_1$ тата $\angle A=\angle A_1$ пулччăр; çак треугольниксем пĕртаннине кăтартмалла.

ABC треугольнике $A_1B_1C_1$ треугольник çине хурар, вĕсен пĕртан гипотенузисене пĕр-пĕрин çине вырнаçтарар. Ун чух вара A кĕтес A_1 кĕтеспе пĕртан пирки, AC катет A_1C_1 катет тăрăх каять. C точка C_1 точка çине вырнаçма тивĕç, мĕншĕн тесен, çак точкăсем пĕр-пĕрин çине вырнаçмасан, BC катет B_1C_2 е B_1C_3 выранне йышăнĕччĕ; вăл апла пулма пултараймасть, мĕншĕн тесен пĕр B_1 точкăран A_1C_1 тӳрĕ лини çине икĕ перпендикуляр (B_1C_1 тата B_1C_2 е B_1C_1 тата B_1C_3) антарма юрамасть.

2) Тӳркĕтеслĕ треугольниксенче (61 тата 62 черт.) çаксене панă пултăр: $AB=A_1B_1$ тата $BC=B_1C_1$ пулччăр; çак треугольниксем пĕртаннине кăтартмалла.

ABC треугольнике $A_1B_1C_1$ треугольник çине хурар, вĕсен пĕртан BC тата B_1C_1 катечĕсене пĕр-пĕрин çине вырнаçтарар. Ун чух вара, тӳрĕ кĕтессем пĕртан пирки, CA катет C_1A_1 катет тăрăх каять. AB гипотенуза A_1B_1 гипотенуза çине вырнаçма тивĕç, мĕншĕн тесен унсăрăн AB гипотенуза A_2B_1 тата A_3B_1 выранне йышăнĕччĕ; ун чух вара перпендикуляр тĕпĕнчен пĕр инçĕшре тăман икĕ пĕртан тайлăк лини (A_1B_1 тата A_2B_1 е A_1B_1 тата A_3B_1) пулĕччĕ; вăл апла пулма пултараймасть (54 §).

Тӳрӗ лини татӑкӗ варри урлӑ туртнӑ перпендикуляр свойстви тата кӗтес биссектрисин свойстви.

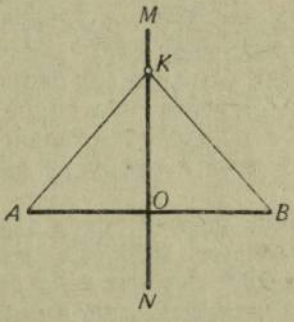
58. Тӳрӗ лини татӑкӗ варри урлӑ туртнӑ перпендикуляр свойствипе кӗтес биссектрисин свойстви пӗр-пӗринпе ытла та пӗр евӗрлӗ. Вӗсен пӗрьевӗрлӗхне курма лайӑх пултӑр тесе, вӑл свойствӑсем ҫинчен параллельлӗ ҫырса хурар.

1) ***Пӗр-пӗр точка*** (*K*, 63 черт.) ***тӳрӗ лини татӑкӗ*** (*AB*) ***варри урлӑ иртекен перпендикуляр*** (*MN*) ***ҫинче выртать пулсан, вӑл точка ҫак татӑк вӗҫӗсенчен пӗртан инҫӗшре тӑрать*** (урӑхла каласан, $KA = KB$).

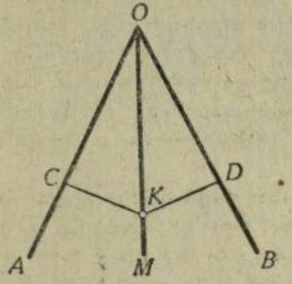
$MN \perp AB$ тата $AO = OB$, ҫавӑнпа *AK* тата *KB* татӑксем *AB* тӗлӗшӗнчен тайлӑк линисем пулаҫҫӗ, вӗсен тӗпӗсем перпендикуляр тӗпӗнчен пӗртан инҫӗшре тӑраҫҫӗ; апла пулсан, $KA = KB$ пулать.

1) ***Пӗр-пӗр точка*** (*K*, 64 черт.) (*AOB*) ***кӗтесӗн*** (*OM*) ***биссектриси ҫинче выртать пулсан, вӑл ҫак кӗтессен енӗсенчен пӗртан инҫӗшре тӑрать*** (урӑхла каласан *KD* перпендикулярпа *KC* перпендикуляр пӗртан пулаҫҫӗ).

OM биссектриса кӗтесе ҫурмаран уйӑрать, *OCK* тата *ODK* тӳркӗтеслӗ треугольниксен пӗрлехи гипотенузи тата *O* тӑрӑллӑ пӗртан шӗвӗр кӗтесӗсем пур, ҫавӑнпа ҫак треугольниксем пӗр-пӗринпе пӗртан пулаҫҫӗ; апла пулсан вара $KC = KD$ пулать.



63 черт.



64 черт.

2) Тӳртӗн теорема. ***Пӗр-пӗр точка*** (*K*, 63 черт.) ***тӳрӗ линин AB татӑкӗ вӗҫӗсенчен пӗртан инҫӗшре тӑрать пулсан*** (урӑхла каласан, $KA = KB$ пулсан), ***вӑл вара тӳрӗ линин AB татӑкӗ варри урлӑ иртекен перпендикуляр ҫинче выртать.***

K точка урлӑ *AB* тӳрӗ лини патне перпендикуляр анта-

2) Тӳртӗн теорема. ***Пӗр-пӗр точка*** (*K*, 64 черт.) ***кӗтес енӗсенчен пӗртан инҫӗшре тӑрать пулсан*** (урӑхла каласан *KC* перпендикуляр *KD* перпендикулярпа пӗртан пулсан), ***вӑл вара ҫак кӗтесӗн биссектриси ҫинче выртать.***

O тата *K* точкӑсем урлӑ *OM* тӳрӗ лини туртар. Ун чух рар: $MN \perp AB$, ун чух вара икӗ тӳркӗтеслӗ треугольник (KAO тата KBO) пулса тӑрать; вӗсем пӗртан треугольниксем пулаççӗ; мӗншӗн тесен вӗсен пӗрлехи KO катет тата пӗртан гипотенузӑсем пур; çавӑнпа $AO = OB$ пулать. Апла пулсан, K точка урлӑ AB татӑк патне перпендикулярлӑ иртекен MN тӳрӗ лини AB татӑка çурмаран уйӑрать.

вара икӗ тӳркӗтеслӗ треугольник (OCK тата ODK) пулса тӑрать; вӗсем пӗртан треугольниксем пулаççӗ, мӗншӗн тесен вӗсен пӗрлехи гипотенуза тата пӗртан катетсем CK тата DK пур; çавӑнпа çак треугольниксен O тӑрӑллӑ кӗтесӗсем те пӗртан пулаççӗ. Апла пулсан, K точка урлӑ туртнӑ OM тӳрӗ лини AOB кӗтесӗн биссектриси пулса тӑрать.

59. Следстви. Çак икӗ теоремӑран (тӳрринчен тата тӳртӗннинчен) тата çакӑн пек хирӗçле теоремӑсем кӑларса тӑратма пулать:

Пӗр-пӗр точка тӳрӗ лини татӑкӗ варри урлӑ иртекен перпендикуляр çинче выртмасть пулсан, вӑл точка çак татӑк вӗçӗсенчен танмар инçӗшре выртать.

Пӗр-пӗр точка кӗтес биссектриси çинче выртмасть пулсан, вӑл çак кӗтесӗн енӗсенчен танмар инçӗшре выртать.

Çак теоремӑсем тӗрӗссине вӗренекенсен (хирӗçле мелпе) хӑйсен кӑтартса памалла.

60. Геометрилле вырӑн. Точкӑсен пӗр-пӗр свойствӑллӑ геометрилле вырӑнӗ тесе линие (е пространствӑри çие) е, пӗтӗмӗшле каласан, точкӑсен ушкӑнне калаççӗ, вӑл ушкӑнта çак свойствӑллӑ точкӑсем пурте пур, вӑл свойствӑсӑр точкӑсем унта пӗрре те çук.

Сӑмахран, панӑ C точкӑран панӑ r инçӗшӗнче тӑракан точкӑсен геометрилле вырӑнӗ C центрлӑ тата r радиуслӑ çавракӑш пулать.

Малти параграфсенчи теоремӑсенчен çаксем тухса тӑраççӗ:

Панӑ икӗ точкӑран пӗртан инçӗшӗнче тӑракан точкӑсен геометрилле вырӑнӗ çак икӗ точкӑсене пӗрлештерекен тӳре лини татӑкӗ варри урлӑ иртекен перпендикуляр пулать.

Кӗтесӗн икӗ енӗнчен те пӗртан инçӗшре тӑракан точкӑсен геометрилле вырӑнӗ çав кӗтесӗн биссектрисси пулать.

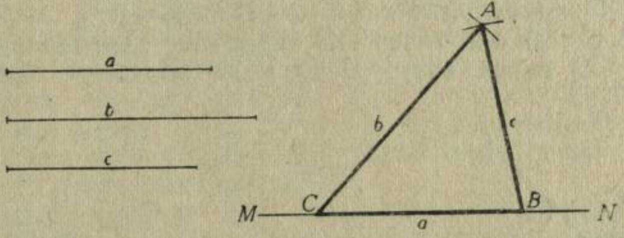
IV. ЧЕРТЕЖ ТУМАЛЛИ ТӖП ЗАДАЧӐСЕМ.

61. Малтан асӑрхаттарни. Тӗрӗслӗхӗсене кӑтартса панӑ малти сыпӑксенчи теоремӑсем чертежла хӑшпӗр задачӑсене тума пулӑшаççӗ. Çакна калар: элементарнӑй геометри линейкӑпа тата циркульпе тума май килекен чертежсем çинчен анчах вӗрентет. Вӑхӑт сахалрах иртермелле пултӑр тесе, чертеж тумалли треугольникпе тата хӑшпӗр ытти хатӗрсемпе те усӑ кураççӗ пулин те, чертеж тумалли задачӑсене вӗсемсӗр те шутлама пулать.

62. 1-мӗш задача. *Треугольникӗн виҫӗ енӗ пулмалла a, b тата c татӑксенчен* (65 черт.) *треугольник тумалла.*

Пӗр-пӗр MN тӳрӗ лини ҫинчен CB татӑк виҫсе илер, вӑл татӑк треугольник тума панӑ енсенчен пӗрин тӑршшӗ, сӑмахран, a тӑршшӗ пулмалла. Унтан C тата B точкӑсене центр туса, икӗ пӗчӗк пӗкӗ туртар, пӗр пӗккине b тӑршшӗ радиуспа, тепӗрне c тӑршшӗ радиуспа туртмалла; ҫак пӗкӗсем пӗр-пӗрне A точкӑра касса иртеҫҫӗ, ҫав A точкӑна C тата B точкӑсемпе пӗрлештерер. $\triangle ABC$ эпир тупмалли треугольник пулса тӑрать.

Асӑрхаттарни. Тӳрӗ линин виҫӗ татӑкӗ треугольникӗн енӗсем пулма пултарччӑр тесен, вӗсенчен чи пысӑкки ытти икӗ енӗн сумминчен пӗчӗкрех пулмалла (50 §).

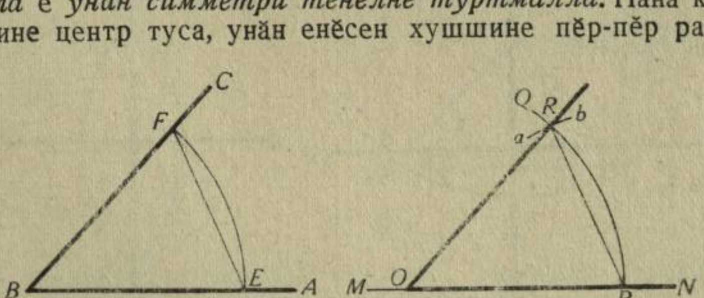


65 черт.

63. 2-мӗш задача. *Панӑ ABC кӗтес пысӑкӑш тепӗр кӗтес тумалла, унӑн енӗсенчен пӗри панӑ тӳрӗ лини пулмалла, тӑрри унӑн панӑ O точкӑра пулмалла* (O точка MN тӳрӗ лини ҫинче выртать, 66 черт.).

Панӑ кӗтесӗн B тӑррине центр туса, унӑн икӗ енӗ хушшине пӗр-пӗр радиуспа EF пӗкӗ туртар; унтан циркуль урисен хушшине улӑштармасӑрах, унӑн ҫивчӗ вӗҫне O точка ҫине лартса, PQ пӗкӗ туртар. Малалла P точкӑна центр туса, EF тӑршшӗ радиуспа ab пӗкӗ туртӑр. Юлашкинчен, O точка тата R точка (икӗ пӗкӗ пӗр-пӗрне касса иртнӗ тӗлти точка) урлӑ тӳрӗ лини туртар. ROP кӗтес ABC кӗтеспе пӗртан пулать, мӗншӗн тесен ROP треугольник FBE треугольникпе пӗртан: вӗсен килӗшӳллӗ енӗсем пӗр-пӗринпе пӗртан.

64. 3-мӗш задача. *Панӑ ABC кӗтесе ҫурмаран уйӑрмалла* (67 черт.), тепӗр майлӑ каласан, *панӑ кӗтесӗн биссектрисине тумалла* е *унӑн симметри тӗнӗлне туртмалла.* Панӑ кӗтесӗн B тӑррине центр туса, унӑн енӗсен хушшине пӗр-пӗр радиуспа



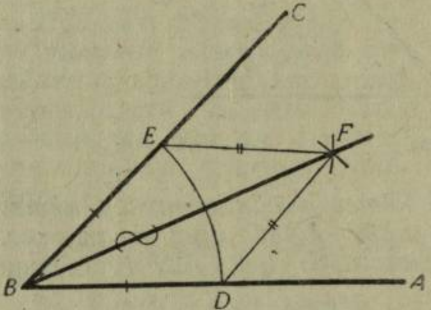
66 черт.

DE пĕкĕ туртар. Унтан, циркуль урисене DE пĕкĕ çурринчен ытларах сарса (1-мĕш задачăн асăрхаттарнине пăхăр), D тата E точкăсене центр туса, пĕчĕк пĕкĕсем туртар; çав пĕкĕсем пĕрне-пĕри пĕр-пĕр F точкăра касса иртеççĕ. Унтан BF тӳрĕ лини туртар, вăл вара ABC кĕтесĕн биссектриси пулса тăрать.

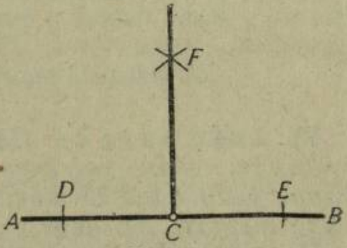
Çак тĕрĕссине кăтартма F точкăна D тата E точкăсемпе пĕрлештерер; ун чух вара икĕ треугольник ($\triangle BEF$ тата $\triangle BDF$) пулса тăрать; вĕсем пĕр-пĕринпе пĕртан, мĕншĕн тесен вĕсен BF пĕрлехи енĕ пулать, чертежне пĕртан тунипе $BD = BE$ тата $DF = EF$ пулаççĕ. Треугольниксем пĕртан пулнинчен çакă тухса тăрать: $\angle ABF = \angle CBF$.

65. 4-мĕш задача. *AB тӳрĕ линин C точкинчен çак тӳрĕ лини çине перпендикуляр тăратмалла* (68 черт.).

Панă C точкăн икĕ енчен AB тăрăх (пĕр-пĕр) пĕртан татăксем CD тата CE виççе илер. E тата D точкăсене центр туса, циркулĕн сарнă урисене улăштармасăр (анчах циркулĕн урисене CD тăршшĕнчен пысăкрах сармалла), икĕ пĕчĕк пĕкĕсем туртар; çак пĕкĕсем пĕр-пĕр F точкăра пĕрне-пĕри касса иртеççĕ. C тата F точкăсем урлă тӳрĕ лини туртар, вăл вара эпир шыракан перпендикуляр пулать.

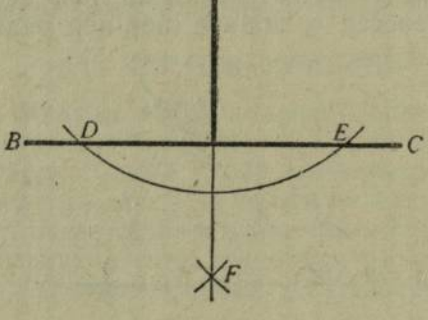


67 черт.

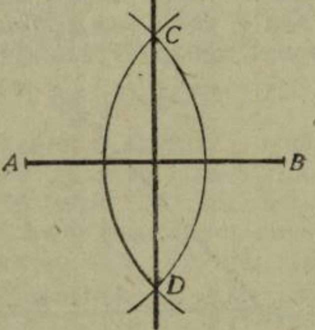


68 черт.

Чăнах та, чертеж тунинчен çакă курăнса тăрать: F точка D тата E точкăсенчен пĕртан инçĕшре тăрать; çавăнпа вăл тӳрĕ



69 черт.



70 черт.

линин *DE* татӑкӗ варри урлӑ иртекен перпендикуляр ҫинче выртма тивӗҫ (58 §); ҫак татӑкӑн варри — *C* точка; *C* тата *F* точкӑсем урлӑ пӗр тӳрӗ лини анчах туртма пулать; апла пулсан, $FC \perp DE$ пулать.

66. 5-мӗш задача. *Панӑ A точкӑран панӑ BC тӳрӗ лини ҫине перпендикуляр антармалла* (69 черт.).

A точкӑна центр туса, циркуль урисене мӗн чухлӗ те пулин сарса (анчах циркуль урисен хушши *A* точкӑпа *BC* тӳрӗ лини хушшинчен пысӑкрах пулмалла), пӗкӗ туртар; вӑл пӗкӗ *BC* тӳрӗ линие пӗр-пӗр *D* тата *E* точкӑсенче касса иртет. Ҫак точкӑсене центр туса, циркуль урисене мӗн чухлӗ те пулин сарса (анчах циркуль урисем хушши *DE* татӑк ҫурринчен пысӑкрах пулмалла), ҫак хушша улӑштармасӑрах икӗ пӗчӗк пӗкӗ туртар; вӗсем пӗрне-пӗри пӗр-пӗр *F* точкӑра касса иртеҫҫӗ. *AF* тӳрӗ лини вара эпир шыракан перпендикуляр пулса тӑрать.

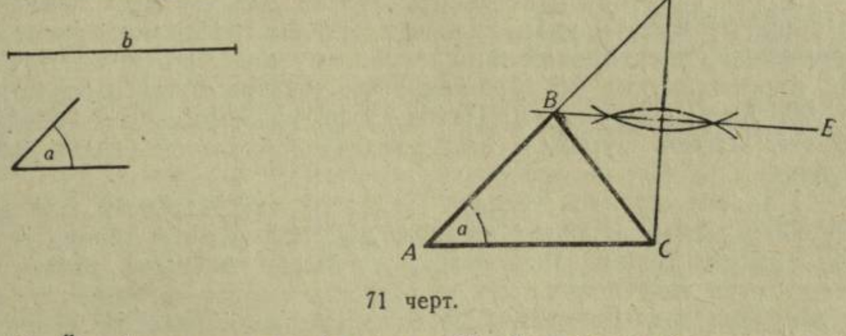
Чӑнах та, чертеж тунинчен ҫакӑ курӑнса тӑрать: *A* тата *F* точкӑсенчен кашни точки *D* тата *E* точкӑсенчен пӗртан инҫӗшре тӑрать. Ҫакӑн пек точкӑсем *DE* татӑк варри урлӑ туртнӑ перпендикуляр ҫинче выртаҫҫӗ (58 §).

67. 6-мӗш задача. *Тӳрӗ линин панӑ AB татӑкӗ варри урлӑ перпендикуляр туртмалла* (70 черт.); урӑхла каласан, *AB татӑкӑн симметри тӗнӗлне тумалла.*

A тата *B* точкӑсене центр туса, циркуль урисене мӗн чухлӗ те пулин сарса (вӑл хушӑ *AB* ҫурринчен пысӑкрах пулмалла), ҫак хушша улӑштармасӑрах, икӗ пӗкӗ туртар; вӗсем пӗрне-пӗри пӗр-пӗр *C* тата *D* точкӑсенче касса иртеҫҫӗ. *CD* тӳрӗ лини вара эпир шыракан перпендикуляр пулса тӑрать.

Чӑнах та, чертеж пулнинчен ҫакӑ курӑнса тӑрать: *C* тата *D* точкӑсенчен кашни точки *A* тата *B* точкӑсенчен пӗртан инҫӗшре тӑрать; ҫавӑнпа ҫак точкӑсем *AB* татӑкӑн симметри тӗнӗлӗ ҫинче выртма тивӗҫ.

7-мӗш задача. *Тӳрӗ линин панӑ татӑкне* (70 черт.) *ҫурмаран уйӑрмалла.* Ку задачӑна маларах кӑтартнӑ задача тунӑ пекех тумалла.



71 черт.

68. Йывӑртарах задачӑн примерӗ. Ҫак тӗпре тӑракан задачӑсем пулӑшнипе йывӑртарах задачӑсене те тума пулать.

Задача. *Треугольникӗн тӗпӗ b, тӗпӗ ҫумӗнчи кӗтесӗ a,* *аякĕнчи икĕ енĕн сумми s пултăр; çаксене пĕлнипе треугольник тумалла* (71 черт.).

Задача шутламалли план тăвас тесе, çапла калар: задача шутласа кăларнă пултăр, урăхла каласан, çакăн пек $\triangle ABC$ тӳса хунă пултăр: унăн тĕпĕ $AC = b$, $\angle A = a$ тата $AB + BC = s$ пулччăр. Халь ĕнтĕ çак треугольник пулнă чертежа пăхса тухар. Треугольникĕн b татăк тăршшĕ AC енне тата унăн a кĕтеспе пĕртан A кĕтесне тума пĕлетпĕр эпир. Апла пулсан, треугольникĕн тепĕр енĕ çинче B точка тупмалла; ăна тупсан, $AB + BC$ сумма s-па пĕртан пулмалла. Треугольникĕн AB енне малалла тăсса, ун çинчен AD татăк виçсе илер; AD татăк s-па пĕртан пулмалла.

Халь ĕнтĕ AD тӳрĕ линии çинче C тата D точкăсенчен пĕр инçĕшре тăракан B точка тупмалла. Эпир пĕлетпĕр (58 §), çавăн пек точка CD татăкăн варри урлă туртнă перпендикуляр çинче выртмалла. B точка çак перпендикуляр AD тӳрĕ линие касса иртнĕ тĕлти точка пулать.

Çапла ĕнтĕ, задача шутлани çакă пулать: панă a кĕтес пысăкăшĕ A кĕтес (71 черт.) тăватпăр; унăн енĕсем çине $AC = b$ тата $AD = s$ виçсе хуратпăр, D точкăна C точкăпа пĕрлештеретпĕр. CD варри урлă BE перпендикуляр туртатпăр; перпендикуляр AD татăка касса иртнĕ тĕлти точкăна, урăхла каласан, B точкăна C точкăпа пĕрлештеретпĕр. Çапла тунипе пулнă $\triangle ABC$ эпир шыракан треугольник пулать, мĕншĕн тесен вăл задачăн пур требованисемпе те килĕшсе тăрать: унăн $AC = b$, $\angle A = a$ тата $AB + BC = s$ (мĕншĕн тесен $BD = BC$).

Чертежа пăхса тухсан, çакна калама пултаратпăр: треугольникĕн панă пайĕсем кирек епле пулсан та, задача тĕрĕс пулать, теме пултараймастпăр эпир. Чăнах та, панă сумма b тĕлĕшĕнчен ытла та пĕчĕккĕ пулсан, BE перпендикуляр AD татăка касса иртме пултараймасть (е вăл AD тăсăмне A точка е D точка хыçĕнче касса иртме пултарать); ун чух вара задачăна тума май килмест. Чертеж тумасăрах çакна курма пулать: $s < b$ е $s = b$ пулсан, задача тĕрĕс мар пулать, мĕншĕн тесен ниепле треугольникĕн те икĕ енĕн сумми виççĕмĕш енĕнчен пĕчĕкрех е унпа пĕртан пулма пултараймасть.

Задача тума май килекенскер пулсан, ăна шутласа тупмалли те пĕрре çех пулать, урăхла каласан, задачăн требованийĕсемпе килĕштерекен треугольник пĕр треугольник кăна пур, мĕншĕн тесен BE перпендикуляр AD тӳрĕ линие пĕр точкăра анчах касса иртет.

69. Асăрхаттарни. Пăхса тухнă примертан çакă курăнса тăрать: чертеж тумалли йывăр задачăна шутласси тăватă пайлă пулать:

1) Задача шутласа кăларнă тейĕпĕр, ним хатĕрсĕр, алă вĕççĕн кăна, хамăр шыракан фигура майлăскер чертеж тăвар; унтан вăл чертежа лайăх пăхса тухса, çак йывăр задачăра хамăр пĕлекен ытти задачăсенчи пек çыхăнусем тупма тăрăшмалла; вăл çыхăнусене задачăн панă пайĕсемпе тупмалли пайĕсем хушшинче шырамалла. Задачăна шутлассин çак пайĕ унăн чи кирлĕ пайĕ пулать, унăн тĕллевĕ задача шутлассин планне тăвасси пулать, ăна **анализ** теççĕ.

2) Çапла вара задачăна шутлассин планне тунă хыççăн, ун тăрăх **чертежа тăваççě**.

3) Унтан, планне тěрěслес тесе, вěреннě теоремăсемпе усă курса, тунă фигура задачăн пур требованийěсемпе те килěшсе тăнине кăтартса параççě. Ку пая **синтез** теççě.

4) Унтан вара çакăн пек ыйтусем лартаççě: треугольникěн панă пайěсем кирек епле пулсан та, задача тěрěс пулать-ши? Задачăн отвечě пěрре-ши, е темиçе-ши? Задачăра епле те пулин хăйне уйрăм тăракан тěслěхсем çук-ши? Чертеж тăвасси хăçан çăмăл пулать-ши, е хăçан йывăр пулать-ши? Шутланин çак пайě задачăна **тěпчени** пулать, теççě.

Задача пит çăмăл пулсан тата унăн тěрěслěхě çинчен иккěленмелли нимěн те çук пулсан, анализпа тěпчеве яланах сиктерсе хăвараççě; ун чух тӳрех задачăна шутламалли чертеж туса, вăл тěрěссине кăтартса параççě. Эпир те çак сыпăкри пирвайхи çичě задача шутлани çинчен çырнă чух çапла турăмăр; малалла та, йывăр мар задачăсене шутлани çинчен çырма тěл килсен, çаплах тăвăпăр.

УПРАЖНЕНИСЕМ.

Çак теоремăсем тěрěссине кăтартса памалла.

1. Тануралла треугольникре икě медиана пěр-пěринпе пěртан, икě биссектриса пěр-пěринпе пěртан, икě çӳллěш пěр-пěринпе пěртан.

2. Тануралла треугольникěн кашни пěртан енě варринчен тепěр пěртан енне касса иртекен перпендикулярсем тăратсан, вăл перпендикулярсем пěр-пěринпе пěртан пулаççě.

3. Кěтес биссектрисипе перпендикулярлă тӳрě лини çав кěтесěн енěсенчен пěртан татăксем касса иртет.

4. Треугольникěн медиани унăн периметр çурринчен пěчěкрех.

5. Треугольникěн медиани хăйěн ик аякěнчи енěсен çурсумминчен пěчěкрех.

Кăтартса пани. Медианăна тата хăй тăршшě малалла тăсмалла, унтан медиана тăсăмěн вěçěнчи точка медиана уйăрнă енěн пěр вěçěпе пěрлештермелле. Çапла тунă фигурăна пăхса тухмалла.

6. Треугольник медианисен сумми ун периметрěнчен пěчěкрех, çурма-периметрěнчен пысăкрах.

Кăтартса пани. Çакăн умěнчи упражнение пăхăр тата 50 § следствие те пăхăр.

7. Четырехугольник диагоналěсен сумми унăн периметрěнчен пěчěкрех, çурма-периметрěнчен пысăкрах.

8. Тӳрě теорема тěрěссине кăтартнă пек çакна кăтартса памалла: тӳрě лини татăкě варри урлă туртнă перпендикуляр çинче выртман кирек хăш точка та çак татăк вěçěсенчен пěр инçěшре тăмасть, çав точка перпендикулярăн хăш енче выртать, çав енчи татăк вěçне çывăхарах тăрать.

9. Тӳрě теорема тěрěссине кăтартнă пек çакна кăтартса памалла: кěтес биссектриси çинче выртман кирек хăш точка та çав кěтесěн енěсенчен пěр инçěшре тăмасть.

10. Треугольникěн пěр-пěр тăрринчен тухакан медиана унăн ытти икě тăрринчен пěр инçěшре тăрать.

11. A кěтесěн пěр енě çине AB тата AC татăксем виççе хунă тата тепěр енě çине AB тăршшě AB' тата AC тăрăшшě AC' татăксем виççе хунă. Çак тěрěссине кăтартса памалла: BC' тата $B'C$ тӳрě линисем A кěтесěн биссектриси çинче пěр-пěрне касса иртеççě.

12. 11-мěш задачăран кěтес биссектриси чертежне тумалли мел тупса кăлармалла.

13. A тата A', B тата B' икě мăшăр точка пěр-пěр XY тӳрě лини тěлěшěнчен симметриллě пулсан, вара тăватă точка: A, A', B, B' пěр çавракăш çинче выртаççě.

14. *XOY* шĕвĕр кĕтес панă, тата çак кĕтес ăшĕнче *A* точка панă. Кĕтесĕн *OX* енĕ çинче *B* точка тата *OY* енĕ çинче *C* точка тупмалла; çапла тунă $\triangle ABC$ чи пĕчĕк периметрлă треугольник пулмалла.

Кăтартса пани. Тупнă точкăсем кĕтесĕн *OX* тата *OY* енĕсен тĕлĕшĕнчен *A* точкăпа симметриллĕ пулмалла.

Чертеж тумалли задачăсем.

15. Икĕ, виçĕ тата ытларах та кĕтессен суммин чертежне тумалла.

16. Икĕ кĕтесĕн разноçĕн чертежне тумалла.

17. Икĕ кĕтесĕн панă сумми тата разноçĕ тăрăх кĕтесĕсене хăйсене тупмалла.

18. Кĕтесе 4, 8 тата 16 пĕртан пая уйăрмалла.

19. Панă кĕтесĕн тулашĕнчен унăн тăрри урлă тӳрĕ лини туртмалла, вăл лини кĕтес енĕсемпе пĕртан кĕтессем пулмалла.

20. Треугольник тумалла: a) унăн икĕ енĕнчен тата вĕсен хушшинчи кĕтесĕнчен; b) пĕр енĕнчен тата çав ен вĕçĕсен çумĕнче выртакан икĕ кĕтесĕнчен; c) икĕ енĕнчен тата пысăк енне хирĕç выртакан кĕтесĕнчен; d) икĕ енĕнчен тата пĕчĕк енне хирĕç выртакан кĕтесĕнчен (кунта икĕ е пĕр решени пулать, е пĕр решени те пулмасть).

21. Танураллă треугольник тумалла: a) унăн тĕпĕпе аякĕнчи енĕнчен; b) тĕпĕпе ун çумĕнче выртакан кĕтесĕнчен; c) аякĕнчи енĕпе тăрринчи кĕтесĕнчен; d) аякĕнчи енĕпе тĕпĕ çумĕнчи кĕтесĕнчен.

22. Тӳркĕтеслĕ треугольник тумалла: a) унăн икĕ катетĕнчен; b) катечĕпе гипотенузинчен; c) катечĕпе ун çумĕнче выртакан шĕвĕр кĕтесĕнчен.

23. Танураллă треугольник тумалла: a) унăн çӳллĕшĕпе аякĕнчи енĕнчен; b) çӳллĕшĕпе тăрринчи кĕтесĕнчен; c) тĕпĕпе ун вĕçĕнчен аякĕнчи енĕ çине антарнă перпендикулямртан.

24. Гипотенузăпа шĕвĕр кĕтесрен тӳркĕтеслĕ треугольник тумалла.

25. Кĕтес ăшĕнчи точка урлă тӳрĕ лини туртмалла, вăл лини кĕтес енĕсенчен пĕртан пайсем касса илмелле.

26. Икĕ татăкăн панă сумми тăрăх тата вĕсен разноçĕ тăрăх татăкĕсене хăйсене тупмалла.

27. Панă татăка 4, 8, 16 пĕртан пая уйăрмалла.

28. Панă тӳрĕ лини çинче точка тупмалла, вăл точка (тӳрĕ лини тулашĕнче) панă икĕ точкăран пĕртан инçĕшре тăмалла.

29. Треугольникĕн виçĕ тăрринчен пĕртан инçĕшре тăракан точка тупмалла.

30. Кĕтесĕн енĕсене касса иртекен тӳрĕ лини çинче точка тупмалла, вăл точка çак кĕтесĕн енĕсенчен пĕр инçĕшре тăмалла.

31. Треугольникĕн виçĕ енĕсенчен пĕр инçĕшре тăракан точка тупмалла.

32. Вĕççĕр *AB* тӳрĕ лини çинче *C* точка тупмалла, çав *C* точкăран *AB* тӳрĕ линин пĕр енче выртакан *M* тата *N* точкăсем урлă *CM* тата *CN* çурматӳрлинисем туртмалла, çак çурмалинисемпе *CA* тата *CB* çурмалинисенчен тунă кĕтессем пĕртан пулмалла.

Кăтартса пани. *M′* точка *AB* тĕнĕл тĕлĕшĕнчен *M* точкăпа симметриллĕ тумалла тата *M′* точкăпа *N* точка пĕрлештермелле.

33. Катетран тата гипотенузăпа тепĕр катет сумминчен тӳркĕтеслĕ треугольник тумалла.

34. Тĕпĕнчен, тĕпĕ çумĕнче выртакан кĕтесрен тата икĕ енĕн разноçĕнчен треугольник тумалла [икĕ тĕслĕх пăхса тухмалла: 1) тĕпĕ çумĕнче выртакан икĕ кĕтесрен пĕчĕкрех кĕтесне панă пултăр, 2) вĕсенчен пысăкрах кĕтесне панă пултăр].

Кăтартса пани. 68 § задача пăхăр.

35. Катетпа тата ытти икĕ енĕ разноçĕнчен тӳрĕ кĕтеслĕ треугольник тумалла.

36. *A* кĕтес тата *B* точкăпа *C* точка панă; пĕр точки кĕтесĕн пĕр енĕ çинче, тепĕр точки ун тепĕр енĕ çинче выртать. Çакна тупмалла: 1) кĕтесĕн енĕсенчен пĕртан инçĕшре тăракан *M* точкăна тупмалла тата $MC = MB$ пулмалла; 2) кĕтесĕн енĕсенчен пĕртан инçĕшре тăракан *N* точкăна тупмалла, вара $NC = CB$ пулмалла.

37. Чугун çул çывăхĕнче икĕ ял *A* тата *B* пур. (Тӳрĕ лини формăллă) чугун çул линийĕ çинче *A* тата *B* ялсенчен пĕр инçĕшре тăракан станци вырăнне тупмалла.

38. *A* кĕтес панă тата унăн пĕр енĕ çинче выртакан *B* точка панă. Кĕтесĕн тепĕр енĕ çинче *C* точка тупмалла, $CA + CB$ сумма l татăкпа пĕртан пулмалла.

V. ПАРАЛЛЕЛЬЛĔ ТӲРĔ ЛИНИСЕМ.

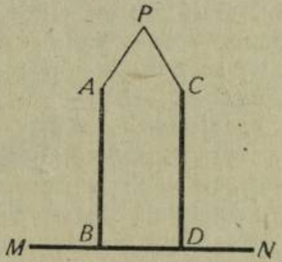
Тĕп теоремăсем.

70. Определени. Кирек мĕн чухлĕ малалла тăссан та, пĕр тӳремçире выртакан икĕ лини **пĕр-пĕрне тĕл пулса касăлмаççĕ** пулсан, çавăн пек икĕ линие **параллельлĕ** линисем теççĕ.

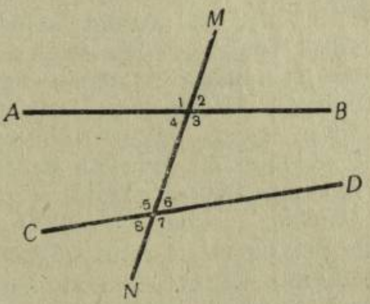
Тӳрĕ линисен параллельноçне ‖ паллăпа çыраççĕ. Сăмахран, AB тата CD пĕр-пĕринпе параллельлĕ пулсан, акă çапла çыраççĕ: $AB \parallel CD$.

Параллельлĕ тӳрĕ линисем пулма пултарни çинчен ак çак теорема кăтартса тăрать.

71. Теорема. ***Пĕр тӳрĕ лини*** MN ***патне туртнă икĕ перпендикуляр*** (AB тата CD, 72 черт.), ***кирек мĕн чухлĕ тăссан та, пĕр-пĕрне тĕл пулса касăлмаççĕ.***



72 черт.



73 черт.

Чăнах та, çак перпендикулярсем, пĕр-пĕр P точкăра тĕл пулса касăлас пулсан, вара çак точкăран MN тӳрĕ лини çине икĕ перпендикуляр антарма май пулнă пулĕччĕ, анчах вăл пулма пултараймасть (24 §).

Çапла ĕнтĕ, пĕр тӳрĕ лини патне туртнă икĕ перпендикуляр пĕр-пĕринпе параллельлĕ.

72. Икĕ тӳрĕ линие виççĕмĕш касса иртнĕ чух пулакан кĕтессен ячĕсем.

Икĕ тӳрĕ лини (AB тата CD, 73 черт.) виççĕмĕш тӳрĕ линипе (MN) касăлнă пултăр. Ун чух вара 8 кĕтес (эпир вĕсене цифрăсемпе паллă тунă) пулса тăрать. Вĕсен ячĕсем мăшăрăн-мăшăрăн çаксем пулаççĕ:

пĕрмайлă выртакан (килĕшӳллĕ) кĕтессем: *1* тата *5*, *4* тата *8*, *2* тата *6*, *3* тата *7*;

хĕреслĕ выртакан кĕтессем: *3* тата *5*, *4* тата *6* (шалтисем); *1* тата *7*, *2* тата *8* (тулашĕнчисем);

пĕр енчи кĕтессем: *4* тата *5*, *3* тата *6* (шалтисем); *1* тата *8*, *2* тата *7* (тулашĕнчисем).

73. Икĕ тӳрĕ линин параллельноçĕн паллисем. ***Икĕ тӳрĕ лини*** (AB тата CD, 74 черт.) ***виççĕмĕш тӳрĕ линипе*** (MN) ***касăлнă чух:*** 1) ***пĕрмайлă выртакан кĕтессенчен пĕр-пĕр кĕтесĕсем пĕртан пулсан,*** е

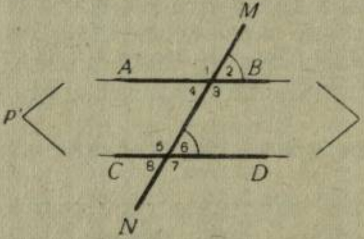
2) ***хĕреслĕ выртакан кĕтессенчен пĕр-пĕр кĕтесĕсем пĕртан пулсан,*** е

3) ***шалти е тулашĕнчи пĕр енчи кĕтессенчен пĕр-пĕр ик кĕтесĕн сумми*** $2d$***-пе пĕртан пулсан,***

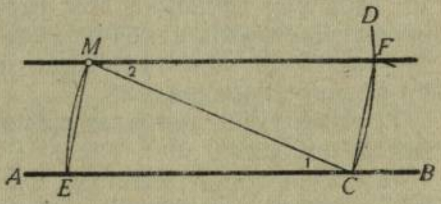
вара çавăн пек икĕ тӳрĕ лини пĕр-пĕринпе параллельлĕ пулаççĕ.

Сăмахран, 2 тата 6 пĕрмайлă выртакан кĕтессем пĕртан пулччăр; ун чух вара $AB \parallel CD$ пулать; çак тĕрĕссине ĕнтĕ кăтартмалла.

Тепĕр майлă шутлăпăр, урăхла каласан, AB тата CD тӳрĕ линисем пĕр-пĕринпе параллельлĕ мар тейĕпĕр, ун чух вара çак тӳрĕ линисем MN линин сылтăм енче выртакан пĕр-пĕр p точкăра, е MN линин сулахай енче выртакан пĕр-пĕр p' точкăра пĕр-пĕрне касса иртмелле. AB тата CD тӳрĕ линисем p точкăра пĕр-пĕрне касса иртеççĕ пулсан, ун чух вара треугольник пулса тăмалла; вăл треугольникĕн 2-мĕш кĕтесĕ унăн тулашĕнчи кĕтесĕ пулать, 6-мĕш кĕтесĕ унăн тулашĕнчи 2-мĕш кĕтесĕпе юнашар тăман шалти кĕтесĕ пулать; çапла вара 2-мĕш кĕтес 6-мĕшĕнчен пысăкрах пулма тивĕç (44 §). Анчах апла пулма пултараймасть: вăл теоремăра панине хирĕçле пулать. Апла эппин AB тата CD тӳрĕ линисем MN линин сылтăм енче выртакан пĕр-пĕр p точкăра пĕр-пĕрне касса иртме пултараймаççĕ. AB тата CD тӳрĕ линисем пĕр-пĕрне p' точкăра касса иртмелле пулччăр, ун чух вара треугольник пулса тăмалла; вăл треугольникĕн 4-мĕш кĕтесĕ, 2-мĕш кĕтесĕпе танскер, треугольникĕн шалти кĕтесĕ пулать; 6-мĕш кĕтесĕ шалти 4-мĕш кĕтесĕпе юнашар тăман треугольникĕн тулашĕнчи кĕтесĕ пулать; ун чух вара 6-мĕш кĕтес 4-мĕшĕнчен, апла пулсан, 2-мĕшĕнчен те пысăкрах пулма тивĕç. Анчах апла пулма пултараймасть: вăл—теоремăра панине хирĕçле пулать.



74 черт.



75 черт.

Апла эппин AB тата CD тӳрĕ линисем MN линин сулахай енче выртакан p' точкăра пĕр-пĕрне касса иртме пултараймаççĕ; çапла вара çак тӳрĕ линисем ниçта та пĕр-пĕрне касса иртмеççĕ, урăхла каласан, вĕсем пĕр-пĕринпе параллельлĕ пулаççĕ.

Çак тĕрĕссине те çаплах кăтартаççĕ: $\angle 1 = \angle 5$, е $\angle 3 = \angle 7$ т. ыт. пулсан, $AB \parallel CD$ пулать.

Тата çакна панă пултăр: $\angle 4 + \angle 5 = 2d$ пултăр; ун чух вара $\angle 4 = \angle 6$ пулать, мĕншĕн тесен 6-мĕш кĕтеспе 5-мĕш кĕтесен сумми те $2d$ пулать. Анчах $\angle 4 = \angle 6$ пулсан, вара тӳрĕ линисем пĕрне-пĕри касса иртме пултараймаççĕ, мĕншĕн тесен вĕсем пĕр-пĕрне касса иртес пулсан, 4-мĕш кĕтеспе 6-мĕш кĕтес пĕр-пĕринпе пĕртан пулма пултараймĕччĕç (пĕр кĕтесĕ тулашĕнчи кĕтес пулĕччĕ, тепĕри унпа юнашар тăман шалти кĕтес пулĕччĕ).

74. Задача. *Панă M точка урлă* (75 черт.) *AB тӳрĕ линипе параллельлĕ тӳрĕ лини туртмалла.*

Çак задача чи çăмăл шутласа кăларасси çакă пулать: *M* точкăна центр туса пĕр-пĕр радиуспа *CD* пĕкĕ туртатпăр; унтан, *C* точка центр туса, çав радиуспах *ME* пĕкĕ туртатпăр. Унтан, *C* точка центр туса, циркуль урисене *EM* тăршшĕ сарса, пĕчĕк пĕкĕ туртатпăр; вăл пĕкĕ *CD* пĕкĕне пĕр-пĕр *F* точкăра касса иртет. *MF* тӳрĕ лини *AB* тӳрĕ линипе параллельлĕ пулать.

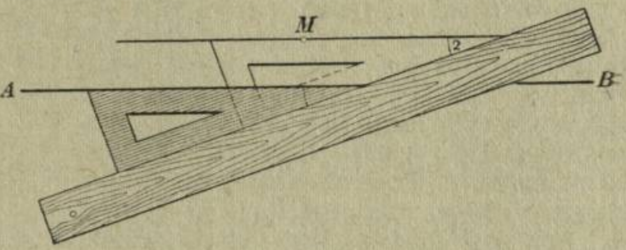
MF тӳрĕ линипе *AB* тӳрĕ лини параллельлĕ пулнине кăтартма, пулăшакан тӳрĕ лини *MC* туртар. 1-мĕшпе 2-мĕш кĕтессем пĕртан: чертеж туна чух вĕсене пĕртан тунă (мĕншĕн тесен *EMC* треугольникĕн виçĕ енĕ *MCF* треугольникĕн виçĕ енĕпе те пĕртан); хĕреслĕ выртакан кĕтессем пĕртан пулсан, вара линисем пĕр-пĕринпе параллельлĕ пулаççĕ.

Параллельлĕ тӳрĕ линисене треугольникпе тата линейкăпа тума питĕ аван, ăна эпир 76 чертежран куратпăр.

75. Параллельлĕ линисен аксиоми. ***Пĕр точка урлах пĕр тӳрĕ линипе параллельлĕ икĕ тĕрлĕ тӳрĕ лини туртма май килмест.***

Сăмахран, *CE* ‖ *AB* пулсан, (77 черт.) вара *C* точка урлă туртнă урăх нимĕнле тӳрĕ лини те (*CE′*) *AB* линипе параллельлĕ пулма пултараймасть, урăхла каласан, *CE′* тӳрĕ линие малалла тăссан, вăл вара *AB* линие касса иртет.

Çак предложени тĕрĕссине кăтартма, урăхла каласан, ăна малта йышăннă аксиомăсен следствийĕ тума, май çук. Çавăнпа ăна пĕр-пĕр çĕнĕ йышăну (постулат е аксиома вырăнне хисеплеме тивет).

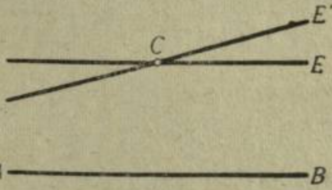


76 черт.

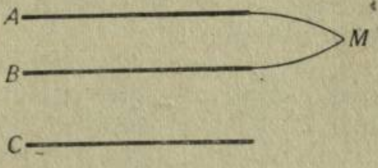
76. Следствисем: 1) *CE* ‖ *AB пулсан* (77 черт.) *тата пĕр-пĕр виççĕмĕш тӳрĕ лини* (*CE′*) *çак параллельлĕ линисенчен пĕрне касса иртет пулсан, вăл вара тепĕрне те касса иртет.* Унсăрăн пĕр *C* точка урлах пĕр *AB* тӳрĕ линипех параллельлĕ икĕ тĕрлĕ тӳрĕ лини (*CE′* тата *CE*) туртма пулĕччĕ, анчах вăл пулма пултараймасть.

2) *Икĕ тӳрĕ линирен A тата B* (78 черт.) *кашни линийĕ виççĕмĕш тӳрĕ линипе* (*C*) *параллельлĕ пулсан, вĕсем вара пĕр-пĕринпе параллельлĕ пулаççĕ.*

Чăнах та, *A* тата *B* тӳрĕ линисем пĕр-пĕрне *M* точкăра касса



77 черт.



78 черт.

иртмелле пулсан, ун чух вара çак M точка урлă C тӳрĕ линипе параллельлĕ икĕ тĕрлĕ тӳрĕ лини иртĕччĕç, анчах вăл пулма пултараймасть.

77. Икĕ параллельлĕ тӳрĕ линие вĕсемпе параллельлĕ мар виççĕмĕш тӳрĕ лини касса иртнĕ чух пулнă кĕтессем çинчен.

Теорема (тӳртĕн теорема, 73 §). ***Икĕ параллельлĕ тӳрĕ линие*** (AB тата CD, 79 черт.) ***пĕр-пĕр тӳрĕ лини*** (MN) ***касса иртнĕ пулсан, ун чух вара:***

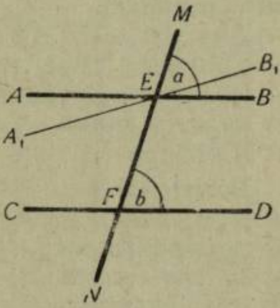
1) ***килĕшӳллĕ кĕтессем пĕр-пĕринпе пĕртан пулаççĕ;***

2) ***хĕреслĕ выртакан кĕтессем пĕр-пĕринпе пĕртан пулаççĕ;***

3) ***пĕр енчи шалти кĕтессен сумми 2d-пе пĕртан пулать;***

4) ***пĕр енчи тулашĕнчи кĕтессен сумми 2d-пе пĕртан пулать.***

Сăмахран, çак тĕрĕссине кăтартар: $AB \parallel CD$ пулсан, килĕшӳллĕ a тата b кĕтессем пĕр-пĕринпе пĕртан пулаççĕ.



79 черт.

Тепĕр майлă шутлăпăр, урăхла каласан, çак кĕтессем пĕртан мар тейĕпĕр (сăмахран, $\angle a > \angle b$ пултăр). $\angle b$ кĕтес пысăкăшĕ MEB_1 кĕтес тăвар, ун чух вара AB тӳрĕ лини çине вырнаçман A_1B_1 тӳрĕ лини пулса тăрать; çапла ĕнтĕ E точка урлă пĕр CD тӳрĕ линипех параллельлĕ икĕ тĕрлĕ тӳрĕ лини иртеççĕ; тӳрех каласан, теоремăри услови тăрăх $AB \parallel CD$ тата килĕшӳллĕ MEB_1 тата b кĕтессем пĕр-пĕринпе пĕртан пирки $A_1B_1 \parallel CD$ пулать. Ку вара параллельлĕ линисен аксиомине хирĕçле пулса тăрать; çапла ĕнтĕ a кĕтес b кĕтеспе пĕртан мар тенине пăрахма тивет: çакна йышăнмалла пулать: $\angle a \parallel \angle b$.

Теоремăн ытти заключенийĕсем тĕрĕссине те çак майпах кăтартма пулать. Тĕрĕслĕхре кăтартнă предложенисенчен тӳрех çак теорема тухса тăрать:

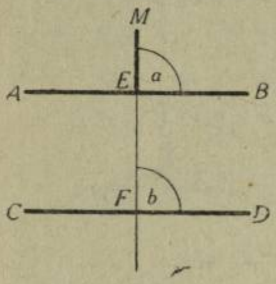
Икĕ параллельлĕ линирен пĕринпе перпендикулярлă лини тепĕр линипе те перпендикулярлă пулать.

Чăнах та, $AB \parallel CD$ (80 черт.) тата $ME \perp AB$ пулсан, вара, пĕрремĕшĕнче, AB линие касса иртекен ME лини CD линие те пĕр-пĕр F точкăра касса иртет; иккĕмĕшĕнче, киллĕшӳллĕ a тата b кĕтессем пĕр-пĕринпе пĕртан пулаççĕ. Анчах $\angle a$ тӳрĕ кĕтес, çавăнпа b кĕтес те тӳрĕскер пулать, урăхла каласан, $ME \perp CD$.

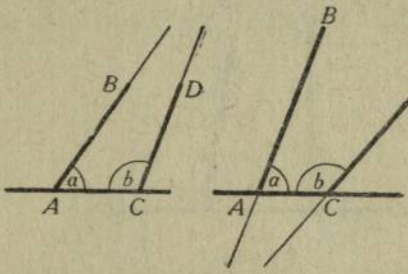
78. Тӳрĕ линисен параллельноççĕрлĕх паллисем. Икĕ теоремăран: тӳрринчен (73 §) тата ăна тӳртĕнничен (77 §) çакăн пек заключени тухса тăрать: хирĕçле теоремăсем те тĕрĕс, урăхла каласан:

икĕ тӳрĕ линие виççĕмĕш тӳрĕ лини касса иртнĕ чух: 1) *пĕрмайлă выртакан кĕтессем* пĕр-пĕринпе пĕртан мар пулсан е 2) *хĕреслĕ выртакан шалти кĕтессем* пĕр-пĕринпе пĕртан мар пулсан т. ыт. те, *вара тӳрĕ линисем* пĕр-пĕринпе параллельлĕ мар пулаççĕ;

икĕ тӳрĕ лини пĕр-пĕринпе параллельлĕ мар пулсан, *вĕсене виççĕмĕш тӳрĕ лини касса иртнĕ чух пулнă:*



80 черт.



81 черт.

1) *пĕрмайлă выртакан кĕтессем* пĕр-пĕринпе тан мар пулаççĕ, 2) *хĕреслĕ выртакан шалти кĕтессем* тан мар пулаççĕ т. ыт. те.

Параллельсĕрлĕхĕн çак паллисенчен (тĕрĕслĕхĕсене хирĕçле мелпе çăмăллăн кăтартма май пуррисенчен) çак паллă çине уйрăм тимлĕн пăхни усăллă:

пĕр енчи шалти кĕтессен (*a* тата *b* кĕтессен, 81 черт.) *сумми 2d-пе тан пулмасан,* (*AB* тата *CD*) *тӳрĕ линисем, хăйсене малалла çителĕклĕ тăснă чух пĕр-пĕрне касса иртеççĕ,* мĕншĕн тесен çак тӳрĕ линисем пĕрне-пĕри касса иртмесен, вĕсем пĕр-пĕринпе параллельлĕ пулĕччĕç; ун чух вара пĕр енчи шалти кĕтессен сумми 2*d*-пе тан пулĕччĕ, анчах апла вăл условие хирĕçле пулать.

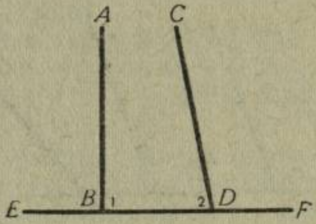
Çак предложение (ун çумне: тӳрĕ линисене касса иртекен линин хăш енче шалти пĕр енчи кĕтессен сумми 2*d*-рен пĕчĕкрех пулать, çав енче тӳрĕ линисем пĕр-пĕрне касса иртеççĕ, тенине хушса), ăна (çак предложение) параллельлĕ линисен аксиоми вырăнне хурса, грексен паллă геометрĕ **Эвклид** (пирĕн эрă пуçланиччен III ĕмĕрте пурăннăскер) хăйĕн геометри „Пуçламăшĕсенче“ доказательствăсăрах йышăннă пулнă; çавăнпа çак предложение унăн ячĕпе **Эвклид постулачĕ** теççĕ. Хальхи вăхăтра çак постулат вырăнне унтан çăмăлтарах предложени (75 §) йышăннă.

Параллельсĕрлĕх паллисенчен тата ак çак икĕ паллă çинчен калар, вĕсем пире кайран кирлĕ пулаççĕ:

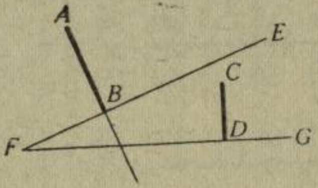
1) *Пĕр тӳрĕ лини патне* (*EF*) *перпендикулярлă* (*AB*, 82 черт.) *тата тайлăк тăракан* (*CD*) *линисем пĕр-пĕрне касса иртеççĕ,* мĕншĕн тесен шалти 1-мĕш тата 2-мĕш кĕтессен сумми 2*d*-пе тан мар.

2) *Пĕр-пĕрне касса иртекен икĕ тӳрĕ линипе* (*FE* тата *FG*) *перпендикулярлă икĕ тӳрĕ лини* (*AB* тата *CD*, 83 черт.) *пĕр-пĕрне касса иртеççĕ.*

Чăнах та, тепĕр майлă пулас пулсан, урăхла каласан, *AB* ‖ *CD* пулсан, вара *FD* тӳрĕ лини, параллельлĕ линисенчен пĕринпе (*CD*) перпендикулярлă пулса, теприпе те (*AB*) перпендикулярлă пулĕччĕ, ун чух вара *F* точкăран *AB* тӳрĕ лини патне икĕ перпендикуляр (*FB* тата *FD*) туртма май килĕччĕ; анчах вăл пулма пултараймасть.



82 черт.

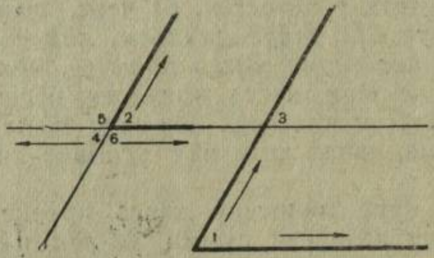


83 черт.

Килĕшӳллĕ енĕсене параллельлĕ е перпендикулярлă линисенчен тунă кĕтессем.

79. Теорема. ***Пĕр кĕтесĕн енĕсем тепĕр кĕтесĕн килĕшӳллĕ енĕсемпе параллельлĕ пулсан, ун пек кĕтессем пĕр-пĕринпе е пĕртан пулаççĕ е вĕсен сумми икĕ тӳрĕ кĕтеспе пĕртан пулать.***

Виçĕ тĕслĕх уйрăм пăхса тухар (84 черт.).



84 черт.

1) 1-мĕш кĕтесĕн енĕсем 2-мĕш кĕтесĕн килĕшӳллĕ енĕсемпе параллельлĕ пулччăр, кунтан пуçне тата вĕсен енĕсем пĕр еннеллех кайччăр (чертеж çинче енсем хăш еннелле кайнине стрелкăсемпе кăтартнă).

2-мĕш кĕтесĕн пĕр енне малалла тăсар, вăл ен хăйпе параллельлĕ мар пĕрремĕш кĕтесĕн енне касса иртет; ун чух вара 3-мĕш кĕтес пулса тăрать; 3-мĕш кĕтес 1-мĕш тата 2-мĕш кĕтессемпе пĕртан (мĕншĕн тесен çак кĕтессем параллельлĕ тӳрĕ линисем çумĕнчи пĕрмайлă выртакан кĕтессем пулаççĕ); çавăнпа $\angle 1 = \angle 2$ пулать.

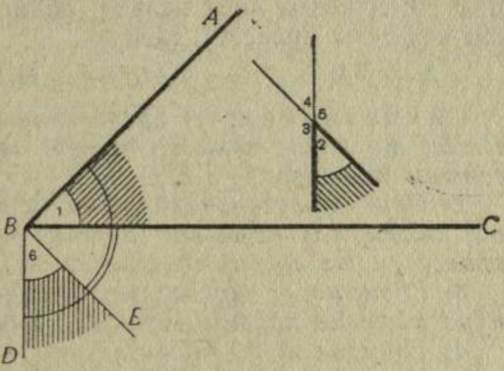
2) 1-мĕш кĕтесĕн енĕсем 4-мĕш кĕтесĕн килĕшӳллĕ енĕсемпе параллельлĕ пулччăр, анчах енĕсем пĕр-пĕрне хирĕçле май кайччăр.

4-мĕш кĕтесĕн енĕсене малалла тăсар, ун чух вара 2-мĕш кĕтес пулса тăрать; 2-мĕш кĕтес (çӳлте кăтартса панă тăрăх) 1-мĕш кĕтеспе пĕртан тата вăл (хăйпе вертикальлĕ кĕтес пулакан) 4-мĕш кĕтеспе те пĕртан; çавăнпа $\angle 4 = \angle 1$ пулать.

3) Юлашкинчен, 1-мĕш кĕтесĕн енĕсем 5-мĕшпе 6-мĕш кĕтессен енĕсемпе параллельлĕ пулччăр, çак енсенчен иккĕшĕ пĕр пек еннелле кайччăр тата иккĕшĕ пĕр-пĕрне хирĕçле еннелле пулччăр.

5-мĕш е 6-мĕш кĕтессен пĕр енне малалла тăссан, 2-мĕш кĕтес пулса тăрать; вăл кĕтес (малта кăтартнипе) 1-мĕш кĕтеспе пĕртан; анчах $\angle 5$ (е $\angle 6)+\angle 2=2d$ (юнашар кĕтессен свойстви тăрăх); çавăнпа $\angle 5$ (е $\angle 6)+\angle 1$ те $2d$-пе тан пулать.

Çапла вара, параллельлĕ енлĕ кĕтессем пĕр пек еннелле е пĕрпĕрне хирĕçле еннелле каяççĕ пулсан, пĕр-пĕринпе тан пулаççĕ; çак услови çук пулсан, кĕтессен сумми $2d$ пулать.



85 черт.

Асăрхаттарни. Параллельлĕ енсенчен тунă кĕтессем иккĕшĕ те шĕвĕр е пуклак пулсан, вĕсем пĕртан пулаççĕ, теме пулĕччĕ; анчах хăш чух кĕтес шĕвĕррипе пуклаккине тулашĕнчен пăхнипе кăна пĕлме хĕн; çавăнпа та кĕтессен енĕсем хăш еннелле кайнине пĕр-пĕринпе танлаштарма тивет.

80. Теорема. ***Пĕр кĕтесĕн енĕсем тепĕр кĕтесĕн килĕшӳллĕ енĕсемпе перпендикулярлă пулсан, çакăн пек кĕтессем пĕр-пĕринпе тан пулаççĕ, е вĕсен сумми икĕ тӳрĕ кĕтеспе пĕртан пулать.***

ABC кĕтес, 1 цифрăпа паллă тунăскер (85 черт.), панă кĕтессенчен пĕри пултăр; панă тепĕр кĕтесĕ икĕ тӳрĕ лини пĕрне-пĕри касса иртнĕ чух пулнă тăватă кĕтесрен пĕр ($\angle 2$, $\angle 3$, $\angle 4$ е $\angle 5$) кĕтесĕ пултăр; çак пĕрне-пĕри касса иртекен тӳрĕ линисенчен пĕри *ABC* кĕтесĕн *AB* енĕпе перпендикулярлă, тепĕри *BC* енĕпе перпендикулярлă пулччăр (çав тăватă кĕтесĕн пĕрлехи тăрри тӳремçин кирек хăш точкинче те пулма пултарать).

1-мĕш кĕтес тăрринчен пулăшакан икĕ тӳрĕ лини туртар: $BD \perp BC$ тата $BE \perp BA$ пулаççĕ. Пулăшакан линисенчен пулнă 6-мĕш кĕтес 1-мĕш кĕтеспе çакăн пирки пĕртан: *DBC* кĕтес *ABE* кĕтеспе пĕртан пулать, мĕншĕн тесен вĕсем иккĕшĕ те — тӳрĕ кĕтессем; кашни тӳрĕ кĕтесрен пĕр *CBE* кĕтес кăларсан, 6-мĕш кĕтеспе 1-мĕш кĕтес юлаççĕ, вĕсем пĕр-пĕринпе тан пулаççĕ: $\angle 6=\angle 1$ пулать. Халь ĕнтĕ çакна астутарар: 6-мĕш пулăшу кĕтесĕн енĕсем *2, 3, 4* тата *5* кĕтессене тăвакан тӳрĕ линисемпе параллельлĕ пулаççĕ (мĕншĕн тесен пĕр тӳрĕ лини патне туртнă икĕ перпендикуляр, пĕр-пĕринпе параллельлĕ пулаççĕ, 71 §), çавăнпа çак кĕтессем 6-мĕш кĕтеспе е пĕртан е, вĕсенчен кашнине 6-мĕш кĕтес çумне хушсан, $2d$ пулать. 6-мĕш кĕтес вырăнне унпа пĕртан 1-мĕш кĕтесе лартсан, теорема тĕрĕссине кăтартни пулать.

Треугольник тата многоугольник кĕтесĕсен сумми.

81. Теорема. ***Треугольник кĕтесĕсен сумми икĕ тӳрĕ кĕтеспе пĕртан.***

ABC (86 черт.)—пĕр-пĕр треугольник пултăр; çак тĕрĕссине кăтартмалла: *A*, *B* тата *C* кĕтессен сумми $2d$-пе пĕртан, урăхла каласан, 180° пулать.

Треугольникӗн AC енне малалла тӑсар тата AB енӗпе параллельлӗ CE туртар: $CE \parallel AB$ пултӑр; ун чух вара ҫакна тупатпӑр: $\angle A = \angle ECD$ пулать (мӗншӗн тесен вӗсем параллельлӗ линисем ҫумӗнчи килӗшӳллӗ кӗтессем пулаҫҫӗ), $\angle B = \angle BCE$ пулать (мӗншӗн тесен вӗсем параллельлӗ линисем ҫумӗнчи хӗреслӗ выртакан кӗтессем пулаҫҫӗ); ҫавӑнпа,

$$\angle A + \angle B + \angle C = \angle ECD + \angle BCE + \angle C = 2d = 180^\circ \text{ пулать.}$$

Следствисем: 1) *Треугольникӗн тулашӗнчи кирек хӑш кӗтесӗ те хӑйпе юнашар тӑман шалти икӗ кӗтесӗн суммипе пӗртан* (сӑмахран, $\angle BCD = \angle A + \angle B$).

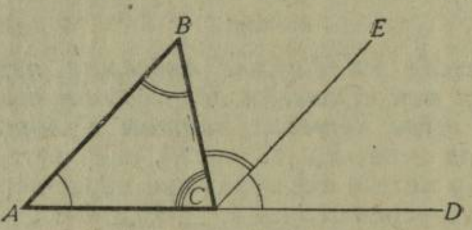
2) *Пӗр треугольникӗн икӗ кӗтесӗ тепӗр треугольникӗн икӗ килӗшӳллӗ кӗтесӗпе пӗртан пулсан, вара вӗсен виҫҫӗмӗш кӗтесӗсем те пӗртан пулаҫҫӗ.*

3) *Тӳркӗтеслӗ треугольникӗн икӗ шӗвӗр кӗтесӗн сумми пӗр тӳрӗ кӗтеспе пӗртан, урӑхла каласан, 90° пулать.*

4) *Тануралла тӳркӗтеслӗ треугольникӗн кашни шӗвӗр кӗтесӗ $^1/_2d$-пе пӗртан, урӑхла каласан, 45° пулать.*

5) *Тан енлӗ треугольникӗн кашни кӗтесе $^2/_3d$-пе пӗртан, урӑхла каласан, 60° пулать.*

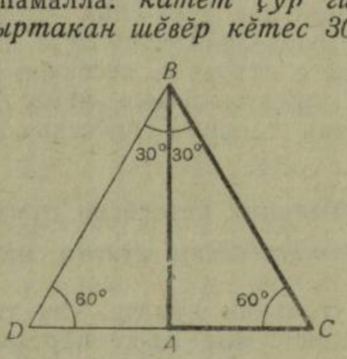
6) *Тӳркӗтеслӗ треугольникӗн* (ABC, 87 черт.) *пӗр шӗвӗр кӗтесӗ* (сӑмахран, $\angle B$) *30°-па пӗртан пулсан, ҫав кӗтесе хирӗҫ выртакан катет ҫур гипотенузӑпа пӗртан пулать.*



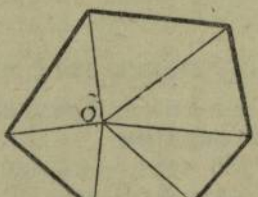
86 черт.

Ҫакӑн пек треугольникӗн тепӗр шӗвӗр кӗтесӗ 60° пулать. ABC треугольник ҫумне унпа пӗртан ABD треугольник туса хурар. Ун чух вара DBC треугольник пулса тӑрать, унӑн кашни кӗтесӗ 60° пулать. Ҫакӑн пек треугольник тан енлӗ треугольник пулма тивӗҫ (47 §); ҫавӑнпа та $DC = BC$ пулать, $AC = \frac{1}{2} DC$; апла пулсан, $AC = \frac{1}{2} BC$ пулать.

Ҫак тӳртӗн предложени тӗрӗссине вӗренекенсем хӑйсем кӑтартса памалла: *катет ҫур гипотенузӑпа тан пулсан, ӑна хирӗҫ выртакан шӗвӗр кӗтес 30° пулать.*



87 черт.



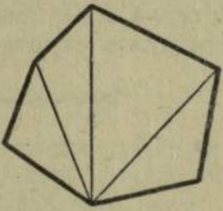
88 черт.

82. Теорема. ***n енлĕ мăкăр многоугольник кĕтесĕсен сумми $(n-2)$ хут ўстернĕ икĕ тўркĕтеспе пĕртан.***

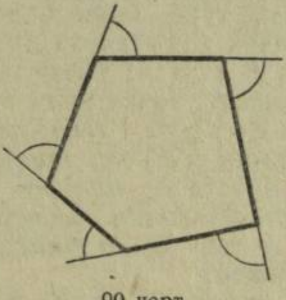
Мăкăр многоугольникĕн (88 черт.) ăшĕнче пĕр-пĕр точка илер, вăл точкăна многоугольникĕн пур тăррисемпе те пĕрлештерер. Ун чух вара мăкăр многоугольникрен треугольниксем пулса тăрасçĕ: многоугольникĕн мĕн чухлĕ ен, çавăн чухлĕ треугольник пулса тăрать, кашни треугольникри кĕтессен сумми $2d$ пулать; çавăнпа пур треугольниксен кĕтесĕсен сумми $2dn$ пулать, n саспалли многоугольникĕн ен хисепне пĕлтерет. $2dn$ многоугольник кĕтесĕсен сумминчен O точка тавра выртакан кĕтессен сумми чухлĕ пысăк; вăл сумма $4d$ пулать; çавăнпа многоугольник кĕтесĕсен сумми çакă пулать:

$$2dn-4d=2d(n-2)=180^\circ(n-2).$$

Асăрхаттарни. Çак теорема тĕрĕссине тата акă çапла кăтартма пулать: пĕр-пĕр мăкăр многоугольникĕн тăрринчен диагональсем туртар (89 черт.). Ун чух вара многоугольникĕн мĕн чухлĕ ен, çавăн чухлĕ треугольникрен икĕ треугольник кая пулса тăрать. Чăнах та, многоугольникĕн диагональ туртнă тăррине тăвакан икĕ енне хисеплемесен, унăн ытти кашни енĕ пуçне пĕр треугольник тивет. Çапла вара мĕнпурĕ $(n-2)$ треугольник пулать, n саспалли многоугольникĕн ен хисепне пĕлтерет. Кашни треугольникри кĕтесĕсен сумми $2d$; апла пулсан, пур треугольниксен кĕтесĕсен сумми $2d(n-2)$ пулать; çак сумма вара многоугольникĕн пур кĕтесĕсен те сумми пулать.



89 черт.



90 черт.

Хушса ăнлантарни. Тĕрĕслĕхне кăтартнă теорема шалалла авăнчăк многоугольниксемшĕн те тĕрĕс пулать. Многоугольник ăшĕнче точка тупмалла; вăл точкăна многоугольникĕн тăррисемпе тўрĕ лини туртса пĕрлештермелле; вара çав тўрĕ лини татăкĕсем многоугольник ăшĕнче выртаççĕ пулсан, теорема тĕрĕссине кăтартма унăн пирвайхи доказательствинче каласа ăнлантарнипе пĕр сăмах улăштармасăр усă курмалла. Многоугольник ăшĕнче çакăн пек точка тупма май çук пулсан, вара хăшпĕр диагональсене туртса шалалла авăнчăк многоугольникрен мăкăр многоугольниксем тумалла; унтан кашни многоугольникри кĕтессен суммине хисеплесе кăлармалла та çав пур суммăсене пĕр çĕре хушмалла. Юлашкинчен вара çак $2dn-4d$ формулах пулса тăрать. Çакна вĕренекен хăех хисеплесе кăлармалла.

83. Теорема. ***Мăкăр многоугольникĕн кашни кĕтесĕ тăрринчен çав кĕтесе тăвакан енсенчен пĕр енне малалла тăссан, вара многоугольникĕн ун чух пулса тăнă тула-***

шĕнчи кĕтесĕсен сумми (многоугольникĕн миçе ен пуррине шута илмесĕрех) ***тăватă тӳрĕ кĕтеспе пĕртан пулать.***

Многоугольникĕн çакăн пек тулашĕнчи кашни кĕтесĕ (90 черт.) унăн шалти юнашар кĕтесĕпе $2d$ пулать; çавăнпа шалти пур кĕтессен сумми çумне тулашĕнчи пур кĕтессен суммине хушсан, $2dn$-пе пĕртан пулать (n саспалли—ен хисепĕ); эпир малта курнăччĕ, шалти кĕтессен сумми $(2dn-4d)$-пе пĕртан пулать; çавăнпа тулашĕнчи кĕтессен сумми çак разноçпе пĕртан пулать:

$$2dn-(2dn-4d)=2dn-2dn+4d=4d=360^\circ.$$

Центрлă симметри.

84. 37 параграфра икĕ пĕр пек фигура тӳрĕ лини тĕлĕшĕнчен симметриллĕ выртнине пăхса тухнăччĕ. Параллельлĕ тӳрĕ линисен çӳлте кăтартнă свойствисем тата тепĕр палла симметриллĕ фигурăсем çинчен вĕренме пулăшаççĕ; вăл симметри çакă пулать: икĕ пĕр пек фигура, е икĕ пĕртан татăксем, е ике точка тӳремçи çинче выртакан пĕр-пĕр точка тĕлĕшĕнчен симметриллĕ пулни.

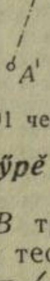
Пĕр-пĕр икĕ точка (A тата A', 91 черт.) **O точка выртакан тӳрĕ лини çинче, çав O точкăн икĕ енче тата унтан пĕр инçĕшре** ($OA=OA'$) **выртать пулсан, çавăн пек точкăсене** (O) **точка тĕлĕшĕнчен симметриллĕ точкăсем теççĕ.**

Панă O точка тĕлĕшĕнчен A точкăпа симметриллĕ точка тупас тесен, A точкăпа O точкăна тӳрĕ линипе пĕрлештермелле; унтан çав тӳрĕ линие O точка хыçнелле тăсмалла; çав тăснă лини çинчен O точкăран пуçласа, OA тăршшĕ OA' татăк виçсе илмелле; A тата A' точкăсем O точкăн терлĕ енче выртмалла. Çапла вара A' точка эпир шыракан точка пулса тăрать.

85. Теорема. ***Пĕр-пĕр тӳрĕ линин*** (AB) ***икĕ точки валли*** (A тата B) ***пĕр-пĕр O точка тĕлĕшĕнчен симметриллĕ*** (A' тата B') ***точкăсем тусан, вара:***

1) A' ***тата*** B' ***точкăсене пĕрлештерекен тӳрĕ лини панă тӳрĕ линипе*** (AB) ***параллельлĕ пулать тата*** (AB) ***татăк*** ($A'B'$) ***татăкпа пĕртан пулать.***

2) ***Панă тӳрĕ линин*** (AB) ***кашни точки валли тепĕр тӳрĕ лини*** ($A'B'$) ***çинче симметриллĕ точка пур.***



91 черт.

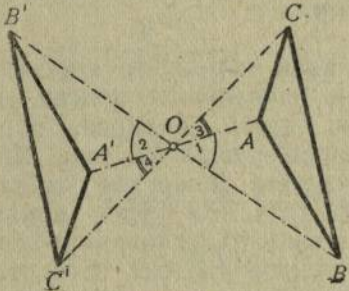
92 черт.

Доказательство. 1) AOB треугольник $A'OB'$ треугольникпе пĕртан (92 черт.), мĕншĕн тесен вĕсен $AO=A'O$ (вĕсене пĕртан виçсе тунă) тата $\angle AOB=\angle A'OB'$ (çак кĕтессем вертикалльлĕ кĕтессем пулнăран пĕртан). Ку треугольниксем тан пулнинчен çакă тухса тăрать: $AB=A'B'$ тата $\angle OAB=\angle OA'B'$ пулаççĕ. Апла пулсан $AB \parallel A'B'$ пулать. (73 §, 2-мĕш тĕслĕх).

2) AB тӳрӗ лини ҫинче пӗр-пӗр D точка илер (92 черт.) D точкӑна O точкӑпа пӗрлештерекен лини ҫине пӑхар. Ҫак тӳрӗ лини $A'B'$ тӳрӗ линие пӗр-пӗр D' точкӑра касса иртет. AOD треугольник $A'OD'$ треугольникпе пӗртан, мӗншӗн тесен вӗсен $AO = A'O$, $\angle 1 = \angle 2$ (ҫак кӗтессем параллельлӗ тӳрӗ линисем ҫумӗнче хӗреслӗ выртакан кӗтессем пулнӑран пӗртан) тата $\angle 3 = \angle 4$ (ҫак кӗтессем вертикальлӗ кӗтессем пулнӑран пӗртан). Ку треугольниксем пӗртан пулнинчен ҫакӑ тухса тӑрать: $OD = OD'$, пулать. Апла пулсан, D точка O точка тӗлӗшӗнчен D' точкӑпа симметриллӗ пулать.

86. Симметриллӗ фигурӑсем. ***Пӗр фигурӑн кашни точки валли тепӗр фигура ҫинче симметриллӗ точка пулсан, ҫавӑн пек икӗ фигурӑна панӑ O точка тӗлӗшӗнчен симметриллӗ фигурӑсем теҫҫӗ.***

O точка панӑ фигурӑсен **симметри центрӗ** пулать. Симметрие хӑйне, тӗнӗллӗ симметрирен уйрӑм тӑтӑр тесе, **центрлӑ симметри** теҫҫӗ; тӗнӗллӗ симметрие эпир маларах (37 §) ӗнтӗ тӗл пулнӑччӗ. Панӑ фигурӑн кашни точки валли (пӗр-пӗр центр тӗлӗшӗнчен) ҫав фигура ҫинчех симметриллӗ точка пулсан, ҫапла калаҫҫӗ: панӑ фигурӑн симметри центрӗ пур, теҫҫӗ. Ҫавӑн пек фигурӑна кӑтартакан пример ҫавракӑш пулать, унӑн симметри центрӗ ҫавракӑшӑн центрӗ пулать.



93 черт.

Кашни фигурӑна, симметри центрӗ тавра ҫавӑрса, хӑйпе симметриллӗ фигура ҫине вырнаҫтарма пулать. Чӑнах та, сӑмахран, пӗр-пӗр O центр тӗлӗшӗнчен симметриллӗ ABC тата $A'B'C'$ треугольниксене илер. Пӗтӗм $OABC$ фигурӑна, тӳремҫирен хӑпӑтмасӑр, O точка тавра центр тавра ҫавӑрнӑ пек OA тӳрӗ лини OA' тӳрӗ лини тӑрӑх кайиччене ҫавӑрар.

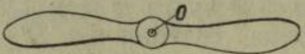
$\angle 1 = \angle 2$ тата $\angle 3 = \angle 4$, ҫавӑнпа OB тӳрӗ лини OB' тӳрӗ лини тӑрӑх, OC тӳрӗ лини OC' тӑрӑх каяҫҫӗ.

$OA = OA'$, $OB = OB'$, $OC = OC'$ пулсан, A точка вара A' точка ҫине, B точка B' точка ҫине тата C точка C' точка ҫине вырнаҫҫӗ. Ҫапла вара ABC треугольник $A'B'C'$ треугольник ҫине вырнаҫать.

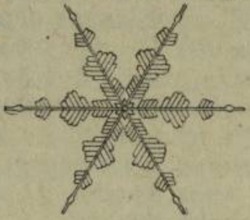
Пӑхсах курӑнать: фигурӑна ҫапла ҫавӑрнӑ чух OA, OB, OC тӳрӗ линисем кашни тата ABC треугольникӗн кашни енӗ 180° градуса ҫитиччен ҫаврӑнаҫҫӗ. Фигурӑн симметри центрӗ пур пулсан, вӑл, хӑйне ҫав центр тавра 180° градус таран ҫавӑрнӑ хыҫҫӑн, хӑй ҫине хӑй вырнаҫать.

Асӑрхаттарни. ABC тата $A'B'C'$ треугольниксене пӗрпӗрин ҫине вырнаҫтарас тесе, $OABC$ фигурӑна ҫавӑрнӑ чух ABC треугольник тӳремҫи тӑрӑх шуса пырать. Ҫапла вара центр тӗлӗшӗнчен симметриллӗ фигурӑсене **тӳремҫирен кӑлармасӑрах** пӗрпӗрин ҫине вырнаҫтарма пулать. Ҫакӑ ӗнтӗ центрлӑ симметрие тĕнĕллĕ симметрирен (37 §) тĕпренех уйăрса тăрать; тĕнĕл тĕлĕшĕнчен симметриллĕ икĕ фигурăна пĕр-пĕрин çине вырнаçтарас тесен, вĕсенчен пĕрне тепĕр енне çавăрмалла пулать.

Фигурăсен центрлă симметрийĕ тĕнĕллĕ симметри пекех çутçанталăкра



94 черт.



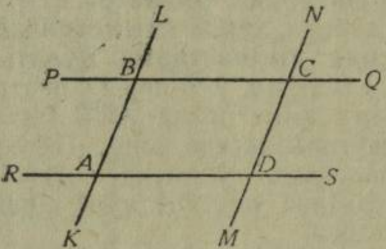
95 черт.

тата пурăнăçра час-час тĕл пулать. 94 чертеж çинче самолетăн пропеллер ӳкерчĕкне туса кăтартнă. Вăл ӳкерчĕкĕн симметри центрĕ O точка пулать. 95 чертеж çинче юр пĕрчин ӳкерчĕкне тунă, унăн та симметри центрĕ пур.

VI. ПАРАЛЛЕЛОГРАМСЕМ ТАТА ТРАПЕЦИСЕМ.

Параллелограмсем.

87. Параллелограм. Четырехугольникĕн пĕр-пĕрне хире-хирĕç выртакан енĕсем мăшăрăн-мăшăрăн параллельлĕ пулсан, ун пек четырехугольнике **параллелограм** теççĕ. Сăмахран, пĕр-пĕр икĕ параллельлĕ KL тата MN тӳрĕ линие тата тепĕр икĕ параллельлĕ RS тата PQ тӳрĕ линипе касса иртсен, параллелограм текен четырехугольник ($ABCD$, 96 черт.) пулса тăрать.



96 черт.

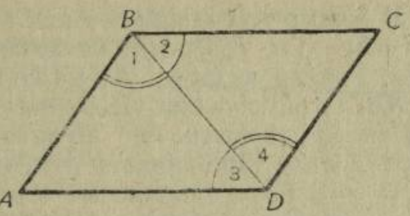
88. Теорема (параллелограм енĕсемпе кĕтесĕсен свойствине кăтартакан теорема). ***Кирек хăш параллелограмра та хире-хирĕç выртакан енĕсем пĕртан, хире-хирĕç выртакан кĕтесĕсем пĕртан тата пĕр енĕ çумĕнче выртакан кĕтесĕсен сумми** $2d$-пе **пĕртан** (97 черт.) **пулаççĕ.***

BD диагональ туртсан, икĕ треугольник пулса тăрать: ABD тата BCD; вĕсем пĕр-пĕринпе пĕртан, мĕншĕн тесен BD—вĕсен пĕрлехи енĕ пулать, $\angle 1 = \angle 4$ тата $\angle 2 = \angle 3$ (параллельлĕ тӳрĕ линисем çумĕнчи хĕреслĕ выртакан кĕтессем пулнипе). Треугольниксем пĕртаннинчен çакă тухса тăрать: $AB = CD$, $AD = BC$ тата $\angle A = \angle C$ пулаççĕ. Хире-хиреç выртакан B кĕтеспе D кĕтес те пĕр-пĕринпе пĕртан, мĕншĕн тесен вĕсем пĕртан кĕтессен суммисем пулса тăраççĕ.

Юлашкинчен, пĕр ен çумĕнчи A тата D кĕтессен сумми $2d$-пе пĕртан, мĕншĕн тесен вăл кĕтессем параллельлĕ тӳрĕ линисем çумĕнчи пĕр енчи шалти кĕтессем пулаççĕ.

Асăрхаттарни. Параллелограмăн пĕр-пĕринпе хире-хирĕç выртакан енĕсен пĕртанлăхне хăш чух кĕскен çапла калаççĕ:

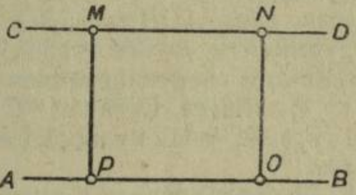
параллельлĕ линисем касса иртнĕ параллельлĕ линисен татăкĕсем пĕртан пулаççĕ.



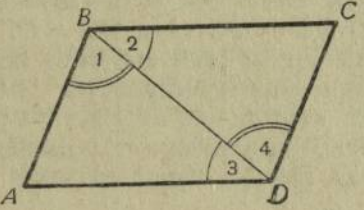
97 черт.

Следстви. *Икĕ тӳрĕ лини пĕр-пĕринпе параллельлĕ пулсан, вĕсенчен пĕр параллельлĕ линин пур точкисем те тепĕр параллельлĕ лининчен пĕр инçĕшре тăраççĕ,* кĕскен: *параллельлĕ линисем* (AB тата CD, 98 черт.) *пĕр-пĕринчен пĕр инçĕшре тăраççĕ.*

Чăнах та, CD тӳрĕ линин пĕр-пĕр икĕ точкинчен (M тата N) AB тӳрĕ лини çине MP тата NO перпендикулярсем антарсан, çак перпендикулярсем пĕр-пĕринпе параллельлĕ пулаççĕ (71 §), çавăнпа та $MNOP$ фигура параллелограм пулать; кунтан çакă тухса тăрать: $MP = NO$ пулать, урăхла каласан, M тата N точкăсем AB тӳрĕ линирен пĕр инçĕшре тăраççĕ.



98 черт.



99 черт.

89. Параллелограмсен икĕ палли.

Теорема. ***Мăкăр четырехугольникĕн:***

1) ***хире-хирĕç выртакан енĕсем пĕр-пĕринпе пĕртан пулсан*** е

2) ***икĕ хире-хирĕç выртакан енĕсем пĕр-пĕринпе пĕртан тата параллельлĕ пулсан, çакăн пек четырехугольник параллелограм пулать.***

$ABCD$ фигура (99 черт.) четырехугольник пултăр, унăн:

$$AB = CD \text{ тата } BC = AD \text{ пулччăр.}$$

Çак тĕрĕссине кăтартмалла: $ABCD$ фигура—параллелограм пулать, урăхла каласан, $AB \parallel CD$ тата $BC \parallel AD$ пулаççĕ.

BD диагональ туртсан, икĕ треугольник пулса тăрать; вĕсем пĕр-пĕринпе пĕртан, мĕншĕн тесен BD вĕсен пĕрлехи енĕ пулать, (услови тăрăх) $AB = CD$ тата $BC = AD$ пулаççĕ. Ку треугольниксен пĕртанлăхĕнчен çакă тухса тăрать: $\angle 1 = \angle 4$ тата $\angle 2 = \angle 3$ пулаççĕ (пĕртан треугольниксен пĕртан енĕсене хирĕç пĕртан кĕтессем выртаççĕ); çакăн пирки $AB \parallel CD$ тата $BC \parallel AD$ пулаççĕ, (хĕреслĕ выртакан кĕтессем пĕртан пулсан, тӳрĕ линисем вара параллельлĕ пулаççĕ).

2) Четырехугольникре ($ABCD$, 99 черт.) $BC \parallel AD$ тата $BC=AD$ пулччăр. Çак тĕрĕссине кăтартмалла: $ABCD$ фигура—параллелограм, урăхла каласан, $AB \parallel CD$ пулать.

ABD треугольник BCD треугольникпе пĕртан, мĕншĕн тесен BD вĕсен пĕрлехи енĕ пулать (услови тăрăх), $BC=AD$ тата (параллельлĕ тӳрĕ линисен çумĕнчи хĕреслĕ кĕтессем пулнă пирки) $\angle 2=\angle 3$. Треугольниксем пĕртанлăхĕнчен çакă тухса тăрать: $\angle 1=\angle 4$ пулать. Çавăнпа $AB \parallel CD$.

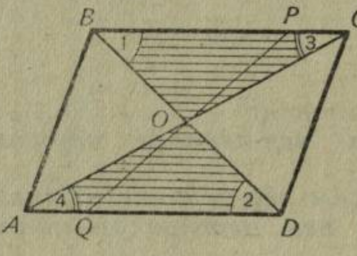
90. Теорема (параллелограм диагоналĕсен свойствине кăтартаканни). ***Четырехугольник*** ($ABCD$, 100 черт.) ***параллелограм пулсан, унăн диагоналĕсем пĕрне-пĕри çурмаран касса ирттеççĕ.***

Тӳртĕн: ***четырехугольникĕн диагоналĕсем пĕрне-пĕри çурмаран касса ирттеççĕ пулсан, панă четырехугольник вара параллелограм пулать.***

1) BOC треугольник AOD треугольникпе пĕртан пулать, мĕншĕн тесен вĕсен $BC=AD$ (çак линисем параллелограмăн хирехирĕç выртакан енĕсем пулнăран пĕртан), $\angle 1=\angle 2$ тата $\angle 3=\angle 4$ (çак кĕтессем параллельлĕ тӳрĕ линисем çумĕнчи хĕреслĕ кĕтессем пулнăран пĕртан). Треугольниксен пĕртанлăхĕнчен çакă тухса тăрать: $OC=OA$ тата $OB=OD$ пулаççĕ.

2) $AO=OC$ тата $BO=OD$ пулсан, вара AOB тата BOC треугольниксем (икĕ енĕ тата вĕсен хушшинчи кĕтесĕ тăрăх) пĕрпĕринпе пĕртан пулаççĕ. Треугольниксен пĕртанлăхĕнчен çакă тухса тăрать: $\angle 1=\angle 2$ тата $\angle 3=\angle 4$ пулаççе. Çавăнпа $BC \parallel AD$ (хĕреслĕ выртакан кĕтессем пĕртан) тата $BC=AD$ пулаççĕ; çавăнпа $ABCD$ фигура параллелограм пулать.

91. Параллелограмăн симметри центрĕ. ***Параллелограмăн симметри центрĕ пур***, вăл центр параллелограмăн диагоналĕсем пĕрне-пĕри касса иртекен точка пулать (100 черт.). Чăнах та, $BO=OD$ тата $OC=OA$, çавăнпа BC татăк O точка тĕлĕшĕнчен AD татăкпа симметриллĕ тата BC татăк çинчи кашни точкăн (P) AD татăк çинче симметриллĕ точка Q пур (85 §).

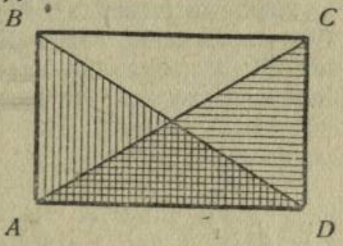


100 черт.

AB татăк O точка тĕлĕшĕнченех CD татăкпа симметриллине те çаплах ăнланса илме пултаратпăр эпир. Параллелограма унăн диагоналĕсем пĕрне-пĕри касса иртекен точка тавра 180° таран çавăрсан, параллелограмăн çĕнĕ вырăнĕ унăн малтанхи вырăнĕ çине вырнаçать. Унăн кашни тăрри хăйне хирĕç выртакан тăрăпа хăй вырăнне улăштарать (A тăрă C тăрăпа тата B тăрă D тăрăпа улăштараççĕ, 100 черт.).

Хăшпĕр уйрăм тăракан параллелограмсем: прямоугольник, ромб, квадрат.

92. Прямоугольник тата унăн свойствисем. Параллелограмăн пĕр кĕтесĕ тӳрĕ кĕтес пулсан, унăн ытти кĕтесĕсем те тӳрĕ кĕтессем пулаççĕ (88 §). Параллелограмăн пур кĕтесĕсем те тӳрĕ кĕтессем пулсан, ăна **прямоугольник** теççĕ.



101 черт.

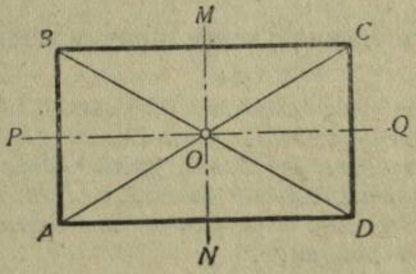
Прямоугольник — параллелограм, çавăнпа прямоугольникре параллелограмăн свойствисем пурте пур; сăмахран, унăн диагоналĕсем пĕр-пĕрне çурмаран уйăраççĕ тата диагоналĕсем пĕрне-пĕри касса иртекен тĕлти точка симметри центрĕ пулать. Анчах прямоугольникĕн тата хăйĕн уйрăм свойствисем те пур.

1) ***Прямоугольникĕн*** (*ABCD*, 101 черт.) ***диагоналĕсем пĕртан.***

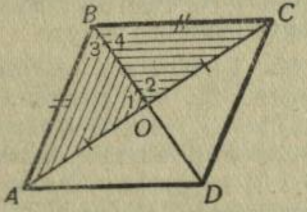
ACD тата *ABD* тӳркĕтеслĕ треугольниксем пĕртан, мĕншĕн тесен *AD* вĕсен пĕрлехи катечĕ пулать тата $AB = CD$ (параллелограмăн хире-хирĕç выртакан енĕсем пĕртан). Треугольниксен пĕртанлăхĕнчен çакă тухса тăрать: $AC = BD$.

2) **Прямоугольникĕн симметри тĕнĕлĕ иккĕ**. Прямоугольникĕн симметри центрĕ урлă иртекен кашни тӳрĕ лини унăн хире-хирĕç выртакан икĕ енне параллельлĕ пулсан, вăл тӳрĕ лини вара прямоугольникĕн симметри тĕнĕлĕ пулать. Прямоугольникĕн симметри тĕнĕлĕсем пĕр-пĕринпе перпендикулярлă (102 черт. пăхăр) пулаççĕ.

93. Ромб тата унăн свойствисем. Параллелограмăн пур енĕсем те пĕртан пулсан, ăна **ромб** теççĕ. Паллах, ромбра параллелограмăн пур свойствисем те пур, анчах унăн тата хăйĕн уйрăм икĕ свойство пур:



102 черт.



103 черт.

1) ***Ромб диагоналĕсем*** (*ABCD*, 103 черт.) ***пĕр-пĕринпе перпендикулярлă тата вĕсем ромб кĕтессисене çурмаран уйăраççĕ.***

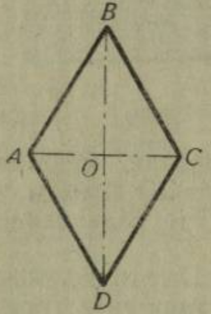
ABO треугольник *BOC* треугольникпе пĕртан, мĕншĕн тесен *BO* вĕсен пĕрлехи енĕ пулать, $AB = BC$ (ромбăн пур енĕсем те пĕртан) тата $AO = OC$ (кирек хăш параллелограмăн та диагоналĕсем çурмаран уйăрăлаççĕ). Треугольниксен пĕртанлăхĕнчен çакă тухса тăрать:

$$\angle 1 = \angle 2, \text{ урăхла каласан, } BD \perp AC \text{ тата } \angle 3 = \angle 4,$$

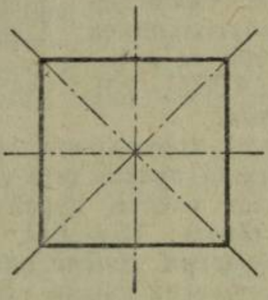
урăхла каласан, диагональ кĕтесе çурмаран уйăрать. *BOC* тата *COD* треугольниксен пĕртанлăхĕнчен çакă тухса тăрать: диагональ *C* кĕтесе çурмаран уйăрать тата малалла та çаплах.

2) ***Ромбӑн кашни диагоналӗ унӑн симметри тӗнӗлӗ пулать.***

BD диагональ (104 черт.) $ABCD$ ромбӑн симметри тӗнӗлӗ пулать, мӗншӗн тесен ABD треугольнике BD тавра ҫавӑрсан, вӑл BCD треугольник ҫине вырнаҫса ларать. Чӑнах та, BD диагональ B тата D кӗтессене ҫурмаран уйӑрать, унтан пуҫне тата $AB = BC$ тата $AD = CD$.



104 черт.

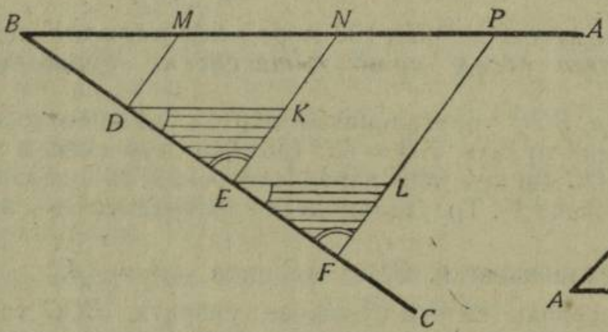

105 черт.

AC диагональ ҫинчен те ҫавнах каламалла пулать.

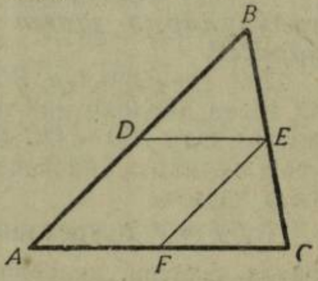
94. Квадрат тата ун свойствисем. Параллелограмӑн енӗсем те пӗртан пулсан тата унӑн пур кӗтесӗсем те тӳрӗ кӗтессем пулсан, ҫавӑн пек параллелограма **квадрат** теҫҫӗ; тата ҫакна та калама пулать: прямоугольникӗн енӗсем пӗртан пулсан, вӑл квадрат пулать; е ромбӑн пур кӗтесӗсем те тӳрӗ кӗтессем пулсан, ун пек ромб квадрат пулать. Ҫавӑнпа квадратра параллелограм, прямоугольник тата ромб свойствисем пурте пур. Сӑмахран, квадратӑн симметри тӗнӗлӗ тӑваттӑ (105 черт.', иккӗшӗ квадратӑн хире-хирӗҫ выртакан енӗсен варринчен (прямоугольникӗнни пек) иртеҫҫӗ тата иккӗшӗ квадратӑн хире-хирӗҫ выртакан кӗтесӗсем урлӑ (ромбӑнни пек) иртеҫҫӗ.

Параллелограм свойствисем ҫинче никӗсленсе тӑракан хӑшпӗр теоремӑсем.

95. Теорема. ***Кӗтесӗн пӗр енӗ ҫинчен*** (сӑмахран, ABC кӗтесӗн BC енӗ ҫинчен, 106 черт.) ***пӗртан татӑксем*** ($DE = EF = \ldots$) ***виҫсе илсен тата вӗсен вӗҫӗсем урлӑ кӗтесӗн тепӗр енӗ патне ҫитиччен параллельлӗ линисем*** (DM, EN, $FP, \ldots$) ***туртсан, вара кӗтесӗн ҫак енӗ ҫинче те пӗртан татӑксем*** ($MN = NP \ldots$) ***пулса тӑраҫҫӗ.***



106 черт.



107 черт.

Пулăшакан DK тата EL тӳрĕ линисем туртар, вĕсем ABC кĕтесĕн AB енĕпе параллельлĕ пулмалла. DK тата EL татăксене туртнă хыççăн, DKE тата ELF пĕр пек треугольниксем пулса тăраççĕ, мĕншĕн тесен вĕсен $DE=EF$ (услови тăрăх), $\angle KDE=\angle LEF$ тата $\angle KED=\angle LFE$ (параллельлĕ линисен çумĕнчи пĕрмайлă выртакан кĕтессем пĕртан). Ку треугольниксен пĕртанлăхĕнчен çакă тухса тăрать: $DK=EL$ пулать. Анчах та, $DK=MN$ тата $EL=NP$ (параллелограмсен хире-хирĕç выртакан енĕсем пĕртан); апла пулсан, $MN=NP$ пулать.

Асăрхаттарни. Пĕртан татăксене B кĕтесĕн тăрринчен пуçласа та виççе илме юрать, урăхла каласан, акă çапла тума юрать: $BD=DE=EF\dots$ Ун чух вара тепĕр енĕ çинче те пĕртан татăксене B кĕтесĕн тăрринчен пуçласа хисеплемелле пулать, урăхла каласан, акă çапла тумалла: $BM=MN=NP\dots$

96. Следстви. *Треугольникĕн AB енĕ варри урлă унăн тепĕр енĕпе (AC) параллельлĕ туртнă тӳрĕ лини (DE, 107 черт.) треугольникĕн виççĕмĕш енне (BC) çурмаран уйăрать.*

Чăнах та, эпир çакна куратпăр: B кĕтесĕн AB енĕ çинчен пĕртан татăксем ($BD=DA$) виççе илнĕ те D точкăпа A точка урлă кĕтесĕн BC енĕ патне çитиччен параллельлĕ тӳрĕ линисем (DE тата AC) туртнă; çапла вара, тĕрĕслĕхне кăтартнă теорема тăрăх, B кĕтесĕн BC енĕ çинче те пĕртан татăксем ($BE=EC$) пулса тăраççĕ, çавăнпа та BC ен E точкăран çурмаран уйăрăлать.

Асăрхаттарни. Треугольникĕн икĕ енĕ варрисене пĕрлештерекен татăка треугольникĕн **вăтам линийĕ** теççĕ.

97. Теорема (треугольникĕн вăтам линийĕн свойствине кăтартаканни). ***Треугольникĕн икĕ енĕ варрисем урлă иртекен тӳрĕ лини*** (DE, 107 черт.), урăхла каласан, ABC треугольникĕн вăтам линийĕ) ***унăн виççĕмĕш енĕпе параллельлĕ треугольникĕн ăшĕнче выртакан çак тӳрĕ линин татăкĕ унăн виççĕмĕш енĕ çуррипе пĕртан.***

Çак теорема тĕрĕссине кăтартас тесе треугольникĕн AB енĕ варринчи D точка урлă AC енĕпе параллельлĕ тӳрĕ лини туртар. Ун чух вара, малти параграфри теорема тăрăх, çак тӳрĕ лини треугольникĕн BC енне çурмаран уйăрать; çавăнпа та вăл AB тата BC енсен варрисене пĕрлештерекен DE тӳрĕ лини çине выртать.

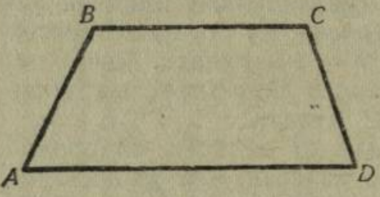
Çаплах тата $EF \parallel AD$ туртсан, треугольникĕн AC енĕ те F точкăран çурмаран уйрăлать; çапла вара $AF=FC$ пулать; кунтан пуçне тата $AF=DE$ (мĕншĕн тесен $ADEF$ параллелограмăн хире-хирĕç выртакан енĕсем пĕртан), кунтан вара çакă тухса тăрать:

$$DE=\frac{1}{2}AC.$$

Трапецисем.

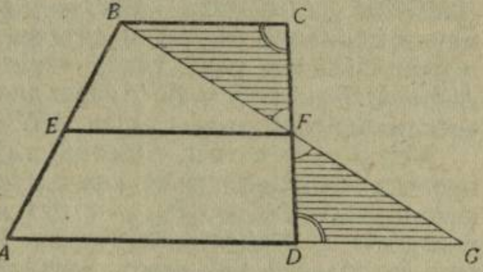
98. Четырехугольникĕн хире-хирĕç выртакан икĕ енĕ пĕр-пĕринпе параллельлĕ пулсан, тата икĕ енĕ параллельлĕ мар пулсан, ун пек четырехугольнике **трапеци** теççĕ. Трапецин параллельлĕ енĕсене (AD тата BC) **унăн тĕпĕсем**, параллельлĕ мар енĕсене (AB тата CD) унăн **аякĕсем** (108 черт.) теççĕ, аякĕсем пĕртан пулсан, ун пек трапеци **танаяклă** пулать.

99. Трапецин вăтам линийĕн свойстви. Трапеци аякĕсен варрисене пĕрлештерекен тӳрĕ лини унăн **вăтам линийĕ** пулать. Ку линин çакăн пек свойствăсем пур:



AD, *BC* — тĕпĕсем
AB, *CD* — енĕсем

108 черт.

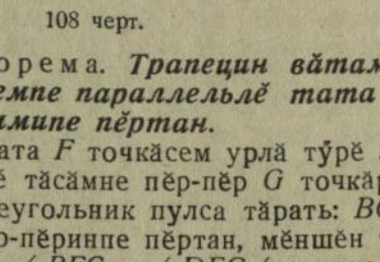


109 черт.

Теорема. *Трапецин вăтам линийĕ* (*EF*, 109 черт.) *унăн тĕпĕсемпе параллельлĕ тата вăл лини трапеци тĕпĕсен çурсуммипе пĕртан.*

B тата *F* точкăсем урлă тӳрĕ лини туртар, вăл лини трапеци *AD* енĕ тăсăмне пĕр-пĕр *G* точкăра касса иртмелле. Ун чух вара икĕ треугольник пулса тăрать: *BCF* тата *DFG*, çак треугольниксем пĕр-пĕринпе пĕртан, мĕншĕн тесен вĕсен $CF = FD$ (услови тăрăх), $\angle BFC = \angle DFG$ (вертикальлĕ кĕтессем пĕр-пĕринпе тан) тата $\angle BCF = \angle FDG$ (параллельлĕ линисен çумĕнче выртакан хĕреслĕ кĕтессем пĕртан). Треугольниксен пĕртанлăхĕнчен çакă тухса тăрать: $BF = FG$ тата $BC = DG$ пулаççĕ. Халĕ ĕнтĕ çакна куратпăр: *ABG* треугольникре *EF* тӳрĕ лини унăн икĕ енĕн варрисене пĕрлештерсе тăрать; апла пулсан (97 §), $EF \parallel AG$ тата $EF = \frac{1}{2}(AD + DG)$ пулать; урăхла каласан, $EF \parallel AD$ тата

$$EF = \frac{1}{2}(AD + BC)$$



110 черт.

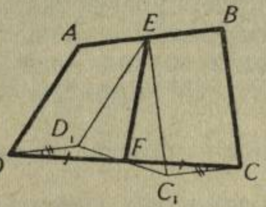
100. Задача. *Тӳрĕ линин панă татăкне* (*AB*, 110 черт.) *панă число чухлĕ пĕр пек пая уйăрмалла* (сăмахран 3 пая).

A точкăран *AB* татăкпа пĕр-пĕр кĕтес тăвакан *AC* тӳрĕ лини туртар; *AC* тӳрĕ линин *A* точкинчен пуçласа виçĕ пĕр пек татăк виççе илер: *AD*, *DE* тата *EF*; *F* точкăна *B* точкапа пĕрлештерер; юлашкинчен, *E* тата *D* точкăсенчен *FB* татăкпа параллельлĕ *EN* тата *DM* татăксем туртар. Ун чух вара *AB* татăк, малта кăтартнă тăрăх, *M* тата *N* точкăсенчен виçĕ пĕр пек пая уйăрăлса тăрать.

Чертеж тумалли задачăсем.

101. Параллельлĕ куçармалли метод. Чертеж тумалли задачăсене шутласа кăлармалли хăйне уйрăм мел параллелограм свойствисемпе усă курни çинче никĕсленсе тăрать, вăл меле параллельлĕ куçармалли метод теççĕ. Çак методăн тĕп шухăшне пуринчен ытла тĕслĕхпе кăтартса пама лайăх.

Задача. *Панă енĕсенчен тата хире-хирĕç выртакан енĕсен варрисене пĕрлештерекен панă EF татăкран четырехугольник* ($ABCD$, 111 черт.) *тумалла.*



111 черт.

Панă линисене пĕр-пĕрин патне çывăхартас тесе, AD тата BC енсене, хăйсемпе хăйсене параллельлĕ туса, ED_1 тата EC_1 вырăнсене куçарар. Ун чух вара DD_1 ен AE енпе пĕртан тата параллельлĕ пулать, CC_1 ен EB енпе пĕртан тата параллельлĕ пулать; AE татăк EB татăкпа пĕртан, çавăнпа $DD_1 = CC_1$ тата $DD_1 \parallel CC_1$ пулаççĕ. Çакăн пирки DD_1F треугольник CC_1F треугольникпе пĕртан пулать (мĕншĕн тесен вĕсен $DD_1 = CC_1$, $DF = FC$ тата $\angle D_1DF = \angle FCC_1$); апла пулсан, $\angle D_1FD = \angle CFC_1$ пулать, çавăнпа та D_1FC_1 тӳрĕ лини пулмалла, урăхла каласан, ED_1FC_1 фигура треугольник пулма тивĕç. Ку треугольникре икĕ енĕн тăршшĕ паллă ($ED_1 = AD$ тата $EC_1 = BC$) тата виççĕмĕш енĕ патне туртнă EF медиана тăршшĕ те паллă. Çак панă линисемпе ED_1C_1 треугольнике тума çăмăл (EF медианăна F точка хыçнелле тăсса ярсан, çав тăснă медиана çинчен EF тăршшĕ татăк виçсе илсен, çав виçсе илнĕ татăкăн вĕçĕнчи точкине D_1 тата C_1 точкăсемпе пĕрлештерсен, параллелограм пулса тăрать; çак параллелограм енĕсен тата унăн пĕр диагоналĕ тăршшĕ пире паллă).

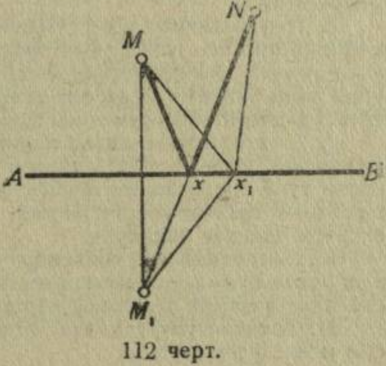
ED_1C_1 треугольнике тупсан, D_1DF тата C_1CF треугольниксене тăвар, унтан вара $ABCD$ четырехугольнике те пĕтĕмĕшпех тума пулать.

Ку методпа усă курса, вĕренекенсем хăйсем халлĕн çак задачăсене шутласа кăлармалла:

1. Пĕр панă кĕтесĕнчен, икĕ диагоналĕнчен тата вăтам линийĕнчен трапеци тумалла.
2. Виçĕ панă енĕнчен (a, b, c,) тата тăршшĕ паллă мар енĕ çумĕнчи икĕ кĕтесĕнчен (α тата β) четырехугольник тумалла.
3. Тăватă панă енĕнчен трапеци тумалла.

102. Симметри меточĕ. Чертеж тумалли задачăсене шутланă чух, тĕнĕллĕ симметри свойствисемпе те усă курма пулать. Чертеж пĕр пайне пĕр-пĕр тӳрĕ лини тавра çавăрсан, вăл çак тӳрĕ линин тепĕр енĕпе симметриллĕ вырăн йышăнать; хăш чух çапла туни пире чертеж тума кирлĕ меле çăмăллăн палăртать. Тĕслĕх илер.

Задача. *AB тӳрĕ лини çинче* (112 черт.) *x точка тупмалла, вăл точкăпа панă M* тата *N точкăсен хушшисен сумми чи пĕчĕк сумма пулмалла.*



112 черт.

Чертежа AB тавра çавăрса, M точкăна AB тĕлĕшĕнчен симметриллĕ (M_1) вырăн парсан, ун чух вара M точкăпа AB тӳрĕ линин кирек хăш точки хушши те AB тӳрĕ линин çав точкипе M_1 точка хушши пĕртан пулать. Çавăнпа $Mx+xN$, Mx_1+x_1N... суммăсем вĕсен килĕшӳллĕ суммисемпе M_1x+xN, $M_1x_1+x_1N$... пĕртан пулаççĕ; анчах çак суммăсенчен M_1xN тӳрĕ линиллĕ сумма чи пĕчĕкки пулать. Çакăнтан ĕнтĕ чертеж тумалли мел уççăн курăнса тăрать.

Çак чертежах тата тепĕр задачăна шутласа кăларма пулăшать: AB тӳрĕ лини çинче x точкăна тупмалла, çав x точкăпа панă M тата N точкăсем хушшисене туртнă xM тата xN татăксем AB тӳрĕ линипе пĕртан кĕтессем тумалла.

Симметри меточĕпе усă курса, вĕренекенсем хăйсем халлĕн çак задачăсене шутласа кăлармалла:

1. Тăватă панă енĕнчен $ABCD$ четырехугольник тумалла, унăн диагоналĕ A кĕтесе çурмаран уйăрать.

2. Прямоугольник евĕрлĕ бильярд çинче унăн A тата B шарĕсем икĕ панă вырăнта тăраççĕ. A шар, бильярдăн тăватă бортне (аяккине) çитсе çапăнса, юлашкинчен B шара çитсе лектĕр тесен, çав A шара хăш еннелле тĕртсе ямалла.

3. Кĕтес тата ун ăшĕнче точка панă. Чи пĕчĕк периметрлă треугольник тумалла, треугольникĕн пĕр тăрри панă точка çинче выртмалла, тата иккĕшĕ панă кĕтесĕн енĕсем çинче выртмалла.

УПРАЖНЕНИСЕМ.

Çак теоремăсем тĕрĕссине кăтартмалла.

1. Пĕр-пĕр четырехугольник енĕсен варрисене тӳрĕ лини татăкĕсемпе йĕркерен пĕрлештерсе пырсан, параллелограм пулса тăрать.

2. Тӳркĕтеслĕ треугольникĕн гипотенузи патне туртнă медиана гипотенуза çуррипе пĕртан.

Кăтарту. Медианăна хăй тăршшĕ тата малалла тăсмалла.

3. Тӳртĕн: треугольникĕн енĕ патне туртнă медиана çав енĕн çуррипе пĕртан пулсан, треугольник вара тӳркĕтеслĕ пулать.

4. Тӳркĕтеслĕ треугольникĕн гипотенузи патне туртнă медианипе çӳллĕшĕ кĕтес тăваççĕ; çав кĕтес треугольникĕн шĕвĕр кĕтесĕсен разноçĕпе пĕртан.

Кăтарту. 2-мĕш задача пăхăр.

5. ABC треугольникре A кĕтес биссектриси BC ене D точкăра тĕл пулать; D точкăран пуçласа CA енĕпе параллельлĕ туртнă тӳрĕ лини AB ене E точкăра тĕл пулать; E точкăран пуçласа BC енĕпе параллельлĕ туртнă тӳрĕ лини AC ене F точкăра тĕл пулать. Çак тĕрĕссине кăтартмалла: $EA=FC$.

6. Панă кĕтес ăшне тепĕр кĕтес тунă, çав тепĕр кĕтесĕн енĕсем панă кĕтесĕн енĕсемпе параллельлĕ тата вĕсенчен пĕр инçĕшре тăраççĕ. Çакă тĕрĕссине кăтартмалла: тунă кĕтесĕн биссектриси панă кĕтесĕн биссектриси çинче выртать.

7. Трапецин аялти тĕпĕн пĕр-пĕр точкине çӳлти тĕпĕн пĕр-пĕр точкипе пĕрлештерекен кирек хăш тӳрĕ лини те трапецин вăтам линийĕпе çурмаран уйăрăлать.

8. Треугольникĕн тĕпĕ çумĕнче тăракан кĕтесĕсен биссектрисисем пĕр-пĕрне касса иртекен точка урлă треугольник тĕпĕпе параллельлĕ выртакан тӳрĕ лини туртнă. Çак тĕрĕссине кăтартмалла: треугольникĕн аяк енĕсен хушшинчи тӳрĕ лини татăкĕ аяк енĕсен татăкĕсен суммипе пĕртан; ен татăкĕсен тăршшĕне треугольникĕн тĕпĕ çумĕнчен виçмелле.

9. Треугольникĕн кĕтес тăррисем урлă хире-хирĕç выртакан енĕсемпе параллельлĕ тăракан тӳрĕ линисем туртнă. Çакă тĕрĕссине кăтартмалла: çак линисем тунă треугольник тăватă треугольникрен пулнă, вĕсенчен кашни треугольникĕ панă треугольникпе пĕртан, унăн кашни енĕ панă треугольникĕн килĕшӳллĕ енĕнчен икĕ хут пысăкрах.

10. Танураллă треугольникре унăн тĕпĕ çинчи кашни точкипе аяк енĕсен хушшисен сумми улăшăнман пысăкăш пулать; тӳрех каласан, вăл пысăкăш аяк енĕ çине антарнă çӳллĕшпе пĕртан пулать.

11. Точкине треугольник тĕпĕн тăсăмĕ çинче илсен, маларахри теорема (10) мĕнле улăшăнать?

12. Тан енлĕ треугольникре ун ăшĕнче илнĕ кирек хăш точкăпа треугольник енĕсен хушшисен сумми улăшăнман пысăкăш пулать, вăл пысăкăш треугольникĕн çўллĕшĕпе пĕртан.

13. Тан диагональсемлĕ кирек хăш параллелограм та прямоугольник пулать.

14. Кирек хăш параллелограм та, унăн диагоналĕсем пĕр-пĕринпе перпендикулярлă пулсан, ромб пулать.

15. Кирек хăш параллелограм та, унăн диагоналĕ параллелограм кĕтесне çурмаран уйăрать пулсан, ромб пулать.

16. Ромб диагоналĕсем пĕр-пĕрне касса иртекен точкăран ромб енĕсем çине перпендикулярсем антарнă. Çакна кăтартса памалла: çак перпендикулярсен тĕпĕсем прямоугольник тăррисем пулаççĕ.

Кăтарту. 13 задача пăхăр.

17. Прямоугольник кĕтесĕсен биссектрисисем пĕрне-пĕри касса иртнипе квадрат пулать.

18. A', B', C' тата D' точкăсене квадратăн CD, DA, AB тата BC енĕсенваррисемпе пĕрлештернĕ пултăр. Çак тĕрĕссине кăтартмалла: AA', CC', DD' тата BB' татăксем пĕрне-пĕри касса иртнипе квадрат пулать; квадратăн енĕ кашни татăкăн $^2/_5$ пайĕпе пĕртан.

19. $ABCD$ квадрат панă. Ун енĕсем çинчен пĕр пек пайсем AA_1, BB_1, CC_1 тата DD_1 виçсе илнĕ. A_1, B_1, C_1, D_1 точкăсене тўрĕ линисемпе йĕркерен пĕрлештернĕ. Çак тĕрĕссине кăтартмалла: $A_1B_1C_1D_1$ квадрат.

20. Кирек мĕнле четырехугольник енĕсен варрисене тепĕр четырехугольникĕн тăрри тусан, çак çĕнĕ четырехугольник параллелограм пулать. Çакна тупмалла: мĕнле условисенче ку параллелограм: 1) прямоугольник, 2) ромб, 3) квадрат пулма пултарать.

Геометрилле вырăнсем тупмалла.

21. Панă точкăран панă тўрĕ линин тĕрлĕ точкисем патне туртнă пур татăксен те варри тĕлĕнче выртакан точкăсен геометрилле вырăнне тупмалла.

22. Икĕ параллельлĕ тўрĕ линирен пĕр инçĕшре тăракан точкăсен геометрилле вырăнне тупмалла.

23. Пĕр тĕплĕ тата пĕртан çўллĕшлĕ треугольниксен тăррисен геометрилле вырăнне тупмалла.

Чертеж тумалли задачăсем.

24. Треугольникĕн икĕ кĕтесне панă; виççĕмĕшне тумалла.

25. Тўркĕтеслĕ треугольникĕн шĕвĕр кĕтесне панă; тепĕр шĕвĕр кĕтесне тумалла.

26. Панă тўрĕ линипе параллельлĕ тўрĕ лини туртмалла, вăл линисен хушши панă хушă чухлĕ пулмалла.

27. Тăрри чертеж çине вырнаçман кĕтесе çурмаран уйăрмалла.

28. Панă тўрĕ линипе панă кĕтес туса, çав лини патне панă точка урлă тўрĕ лини туртмалла.

29. Икĕ тўрĕ лини (XY тата $X'Y'$) тата P точка панă; P точка урлă касакан лини туртмалла; çак линин пĕр пайне—панă тўре линисем хушшинчи пайне—P точка çурмаран уйăрмалла.

30. Панă точка урлă тўрĕ лини туртмалла, унăн татăкĕ—икĕ панă параллельлĕ тўрĕ линисен хушшинчи татăкĕ—панă татăкпа пĕртан пулмалла.

31. Панă шĕвĕр кĕтес енĕсен хушшине тăршшĕне панă татăк вырнаçтармалла, çав татăк кĕтесĕн пĕр енĕпе перпендикулярлă пулмалла.

32. Панă кĕтес енĕсен хушшине тăршшĕне панă татăк вырнаçтармалла, вăл татăк панă кĕтесĕн икĕ енне те касса иртекен панă тўрĕ линипе параллельлĕ пулмалла.

33. Панă кĕтес енĕсен хушшине тăршшĕне панă татăк вырнаçтармалла, вăл татăк кĕтес енĕсенчен пĕртан татăксем касса илмелле.

34. Панă шĕвĕр кĕтесрен тата ăна хирĕç выртакан катетран тўрĕ кĕтеслĕ треугольник тумалла.

35. Икĕ кĕтесрен тата вĕсенчен пĕрне хирĕç выртакан енрен треугольник тумалла.

36. Тăрринчи кĕтесрен тата тĕпĕнчен тануреллă треугольник тумалла.

37. Тĕпĕ çумĕнчи кĕтесĕнчен тата аякĕнчи енĕ çине антарнă çўллĕшĕнчен танураллă треугольник тумалла.

38. Аякӗнчи енӗнчен тата ун çине антарнӑ çӳллӗшӗнчен тануралла треугольник тумалла.

39. Панӑ çӳллӗшӗнчен тан енлӗ треугольник тумалла.

40. Тӳрӗ кӗтесе виçӗ пая уйӑрмалла (урӑхла каласан, $^1/_3\, d = 30^\circ$ пысӑкӑшӗ кӗтес тумалла).

41. Панӑ тӗпӗнчен, çӳллӗшӗнчен тата аякӗнчи енӗнчен треугольник тумалла.

42. Тӗпӗнчен, çӳллӗшӗнчен тата тӗпӗ çумӗнчи кӗтесӗнчен треугольник тумалла.

43. Кӗтесӗнчен тата çак кӗтесӗн енӗсем çине антарнӑ икӗ çӳллӗшӗнчен треугольник тумалла.

44. Пӗр енӗнчен, ытти икӗ енӗн сумминчен тата çак енӗсенчен пӗрин çине антарнӑ çӳллӗшӗнчен треугольник тумалла.

45. Çӳллӗшӗнчен, периметрӗнчен тата тӗпӗ çумӗнчи кӗтесӗнчен треугольник тумалла.

46. Треугольникре тӗпӗпе параллельлӗ тӳрӗ лини туртмалла, аяк енӗсен хушшинчи татӑк аяк енӗ татӑкӗсен суммипе пӗртан пулмалла (ен татӑкӗсен тӑршшӗне треугольникӗн тӗпӗ çумӗнчен виçмелле).

47. Панӑ многоугольникпе пӗртан многоугольник тумалла.

Кӑтарту. Панӑ многоугольнике диагональсем туртнипе треугольниксем туса уйӑрмалла.

48. Виçӗ кӗтесӗнчен тата тӑваттӑмӗш кӗтесне тӑвакан икӗ енӗнчен четырехугольник тумалла.

Кӑтарту. Тӑваттӑмӗш кӗтесне тупмалла.

49. Виçӗ енӗнчен тата икӗ диагоналӗнчен четырехугольник тумалла.

50. Икӗ танмар енӗнчен тата пӗр диагоналӗнчен параллелограм тумалла.

51. Пӗр енӗнчен тата икӗ диагоналӗнчен параллелограм тумалла.

52. Икӗ диагоналӗнчен тата вӗсен хушшинчи кӗтесӗнчен параллелограм тумалла.

53. Тӗпӗнчен, çӳллӗшӗнчен тата диагоналӗнчен параллелограм тумалла.

54. Диагоналӗнчен тата диагоналӗсен хушшинчи кӗтесрен прямоугольник тумалла.

55. Панӑ енӗпе диагоналӗнчен ромб тумалла.

56. Икӗ диагоналӗнчен ромб тумалла.

57. Çӳллӗшӗпе диагоналӗнчен ромб тумалла.

58. Кӗтесӗнчен тата çав кӗтес урлӑ иртекен диагоналӗнчен ромб тумалла.

59. Диагоналӗнчен тата ӑна хирӗç выртакан кӗтесӗнчен ромб тумалла.

60. Диагоналӗсен сумминчен тата диагоналӗпе пӗр енӗ тунӑ кӗтесӗнчен ромб тумалла.

61. Панӑ диагоналӗнчен квадрат тумалла.

62. Тӗпӗнчен, ун çумӗнче выртакан кӗтесӗнчен тата икӗ параллельлӗ мар енӗнчен трапеци тумалла (икӗ е пӗр решени пулма пултарать, е пӗр решени те пулма пултараймасть).

63. Тӗпӗсен разноçӗнчен, икӗ аяккинчи енӗнчен тата пӗр диагоналӗнчен трапеци тумалла.

64. Тӑватӑ енӗнчен трапеци тумалла (ку задачӑна кирек хӑçан та тума пулать-и?)

65. Тӗпӗнчен, çӳллӗшӗнчен тата икӗ диагоналӗнчен трапеци тумалла (майпурлӑх условийӗ).

66. Икӗ тӗпӗнчен тата икӗ диагоналӗнчен трапеци тумалла (майпурлӑх условийӗ).

67. Енӗсемпе диагоналӗн сумминчен квадрат тумалла.

68. Диагоналӗпе енӗн разноçӗнчен квадрат тумалла.

69. Икӗ диагоналӗпе çӳллӗшӗнчен параллелограм тумалла.

70. Панӑ енӗнчен, диагоналӗсен сумминчен тата вӗсен хушшинчи кӗтесӗнчен параллелограм тумалла.

71. Икӗ енӗнчен тата виççӗмӗш енӗ патне туртнӑ медианинчен треугольник тумалла.

72. Тӗпӗнчен, çӳллӗшӗнчен тата аякӗнчи енӗ патне туртнӑ медианӗнчен треугольник тумалла.

73. Гипотенузинчен тата катечӗсен сумминчен тӳркӗтеслӗ треугольник тумалла (тӗпчесе сӑнамалла).

74. Гипотенузинчен тата катечӗсен разноçӗнчен тӳркӗтеслӗ треугольник тумалла.

75. Панӑ тӳрӗ линин (XY) пӗр енче выртакан икӗ точка (A тата B) панӑ. Çак лини çине l тӑршшӗ MN татӑк хумалла, $AM+MN+NB$ хуçкаланчӑк линин тӑршшӗ чи кӗске пуласси MN татӑка хума пӗлнинчен килет. MN татӑка пӗлсе хурса, хуçкаланчӑк линие чи кӗске тумалла.

Кӑтарту. B точкӑна, XY-па параллельлӗ тӳрӗ лини тӑрӑх куçарса пырса, A точка патне MN тӑршшӗ чухлӗ çывӑхартмалла.

ИККӖМӖШ СЫПӐК.

ÇАВРАКӐШ.

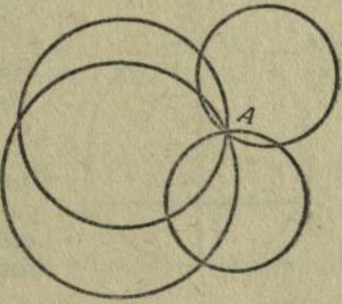
I. ÇАВРАКӐШӐН ФОРМИПЕ ПОЛОЖЕНИЙӖ.

103. Малтан асӑрхаттарни. Пӗр точка (113 черт.) урлӑ темӗн чухлӗ çавракӑш та тума пулни, вӗсен центрӗсене кирек мӗнле те илме юрани курӑнсах тӑрать. Икӗ точка урлӑ та (114 черт., A тата B) темӗн чухлӗ çавракӑш тума пулать, анчах вӗсен центрӗсене кирек мӗнле те илме юрамасть, мӗншӗн тесен A тата B точкӑсенчен пӗртан аякра тӑракан точкӑсем AB татӑкӑн варрине лартнӑ перпендикуляр çинче çеç пулаççӗ (58 §).

Халӗ ӗнтӗ виçӗ точка урлӑ çавракӑш тума май пуррипе çуккине пӑхса тухӑпӑр.

104. Теорема. ***Пӗр тӳрӗ лини çинче выртман виçӗ точка урлӑ çавракӑш тума тата пӗр çавракӑш çеç тума пулать.***

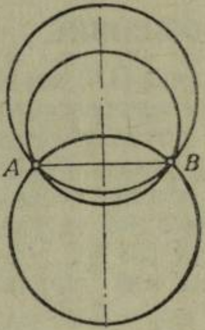
Пӗр тӳрӗ лини çинче выртман A, B, C (115 черт.) виçӗ точка урлӑ (урӑхла каласан, $\triangle ABC$ тӑррисем урлӑ) A, B тата C точкӑсенчен пӗртанах аякра тӑракан тӑваттӑмӗш O точка пулсан çеç çавракӑш тума пулать. Халӗ ӗнтӗ çакӑн пек точка пуррине тата ун пек точка пӗрре çеç пулнине кӑтартӑпӑр. Эпир пӗлетпӗр, A тата B точкӑсенчен пӗртанах аякра тӑракан кирек епле точка та AB енӗн варри çине лартнӑ MN перпендикуляр çинче пулмалла (59 §), çавӑн пекех B тата C точкӑсенчен пӗртан аякра тӑракан кирек епле точка та BC енӗн варри урлӑ тунӑ PQ перпендикуляр çинче пулмалла. Çапла виçӗ A, B тата C точкӑран пӗртанах аякра тӑракан точка пулсан, вӑл точка пӗр вӑхӑтрах MN çинче те, PQ çинче те пулмалла. Çак точка икӗ тӳрӗ лини пӗр-пӗринпе пӗрлешнӗ çӗрте çеç кун пек пулма пултарать. MN тата PQ тӳрӗ линисем пӗр-пӗринпе **яланах пӗрлешеççӗ**, мӗншӗн тесен вӗсем пӗр-пӗринпе пӗрлешекен AB тата BC тӳрӗ линисен перпендикулярӗсем пулса тӑраççӗ (78 §). Вӗсем пӗр-пӗринпе пӗрлешнӗ O точка A, B тата C точкӑсенчен пӗртанах аякра тӑракан çакӑн пек точка пулать те ӗнтӗ; çак точкӑна центр вырӑнне илсен, радиус вырӑнне OA татӑка (е OB е OC татӑка) илсен, çавракӑш вара A, B тата C точкӑсем урлӑ каять. Анчах та, MN тата PQ тӳрӗ линисем пӗр точкӑра çеç пӗрлешме пултарнӑ пирки, çак



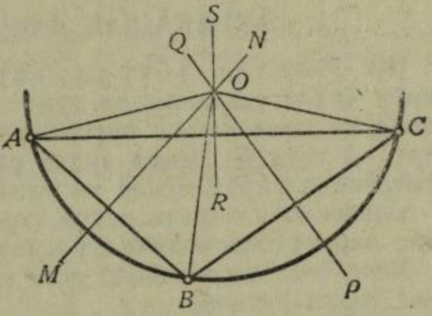
113 черт.

ҫаврӑкӑшӑн **пӗр центр** ҫеҫ пулма пултарать тата унӑн радиус вӑрӑмӑшӗ те **пӗрре кӑна** пулать; ҫапла шыракан ҫавракӑш та **пӗртен пӗр** ҫавракӑш пулать.

Асӑрхаттарни. A, B тата C виҫӗ точка та пӗр тӳрӗ лини ҫинче выртаҫҫӗ пулсан, вара MN тата PQ перпендикулярсем пӗр-пӗринпе параллельлӗ пулнӑ пулӗччӗҫ, вара вӗсем пӗр-пӗрне касса кайма пултараймӗччӗҫ. Ҫапла ӗнтӗ, пӗр тӳрӗ лини ҫинче выртакан виҫӗ точка урлӑ ҫавракӑш тума май килмест.



114 черт.



115 черт.

Следстви. A точкӑран та, C точкӑран та пӗртанах аякра тӑракан O точка (115 черт.), треугольникӗн AC енӗн варрине лартнӑ RS перпендикуляр ҫинче пулмалла. Ҫапла ӗнтӗ:
треугольник енӗсен варри витӗр тунӑ виҫӗ перпендикуляр пӗр точкӑра пӗрлешеҫҫӗ.

105. Теорема. ***Хордӑпа*** (116 черт., CD) ***перпендикулярлӑ диаметр*** (AB) ***ҫак хордӑна тата вӑл туртса тӑракан пӗкӗне ҫурмаран пайлать.***

Чертежа AB диаметр тӑрӑх, унӑн сылтӑм енчи пайӗ сулахай енчи ҫине ӳкмелле хутлатӑпӑр. Вара сулахай енчи ҫурҫавракӑш сылтӑм енчи ҫурҫавракӑш ҫине ӳкет те, KC перпендикуляр KD тӑрӑх каять; KC тӳрӗ лини ҫурҫавракӑшпа пӗрлешнӗ C точка D точка ҫине ӳкет; ҫавӑнпа та:

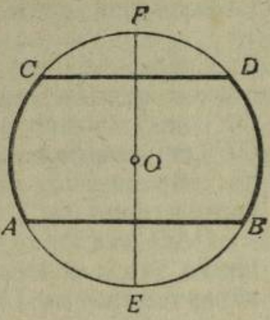
$$CK = KD; \smile BC = \smile BD; \smile AC = \smile AD.$$

116 черт.

106. Тӳртӗнле теоремӑсем. 1. ***Хорда*** (CD) ***варри урлӑ тунӑ диаметр*** (AB) ***ҫак хордӑпа перпендикулярлӑ тата вӑл туртса тӑракан пӗкке ҫурмаран пайлать*** (116 черт.).

2. ***Пӗкӗ*** (CBD) ***варри урлӑ тунӑ диаметр*** (AB) ***ҫак пӗкке туртса тӑракан хордӑпа перпендикулярлӑ тата ӑна ҫурмаран пайлать.***

Ҫак икӗ предложение те хирӗҫле майпа ҫӑмӑллӑнах кӑтартса пама пулать.



117 черт.

107. Теорема. ***Пĕр-пĕринпе параллельлĕ хордăсем хушшинчи пĕкĕсем*** (117 черт., *AC* тата *BD*) ***пĕртан.***

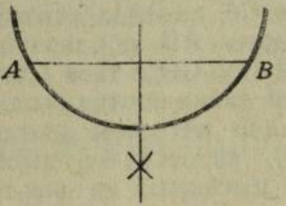
Чертежа $AB \perp EF$ диаметр тăрăх хутлăпăр. Вара, малтанхи теорема тăрăх, *A* точка *B* точка çине, *C* точка *D* точка çине ӳкет теме пултаратпăр; çапла ĕнтĕ, *AC* пĕкĕ те *BD* пĕкĕ çине ӳкет, урăхла каласан, çак пĕкĕсем пĕр-пĕринпе пĕртан пулаççĕ.

108. Задачăсем. 1) *Панă пĕкке* (118 черт., *AB*) *çурмаран пайлăр.*

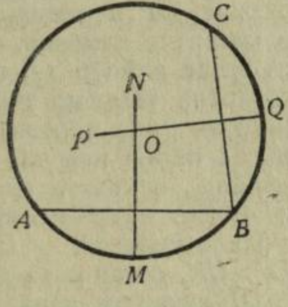
Пĕккĕн вĕçĕсене *AB* хордăпа пĕрлештерер те центрĕнчен ун çине перпендикуляр антарса ăна пĕкĕ урлă каçиччен тăсар. Маларах кăтартса панă теорема тăрăх, çак перпендикулярпа *AB* пĕкĕ çурмаран пайланать. Центр паллă мар пулсан, *AB* хордăн варри урлă перпендикуляр тумалла.

2) *Панă çавракăшăн центрне тупăр* (119 черт.).

Панă çавракăш çинче мĕнле те пулин виçĕ точка *A*, *B* тата *C* илсе, вĕсем урлă икĕ хорда, сăмахран *AB* тата *CB* тăвăр. Вара çак хордăсен варри урлă вĕсене перпендикулярлă *MN* тата *PQ* тӳрĕ линисем тăвар. *A*, *B* тата *C* точкăсенчен пĕртанах аякра тăракан шыракан центр *MN* çинче те, *PQ* çинче те пулмалла; çапла ĕнтĕ, вăл çак перпендикулярсем пĕр-пĕринпе пĕрлешнĕ вырăнта, урăхла каласан, *O* точкăра пулать.



118 черт.



119 черт.

II. ПĔКĔСЕМ, ХОРДĂСЕМ ТАТА ХОРДĂСЕМПЕ ЦЕНТР ХУШШИСЕМ ПĔР-ПĔРИНПЕ ÇЫХĂНСА ПЫНИ.

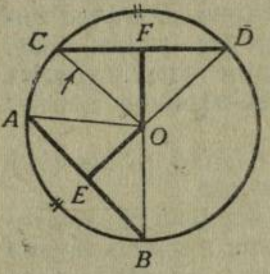
109. Теоремăсем. ***Пĕр çавракăшра е пĕртан çавракăшсенче:***

1) ***пĕкĕсем пĕртан пулсан, вĕсене туртса тăракан хордăсем те пĕртанах тата вĕсем центртан пĕртанах аякра тăраççĕ;***

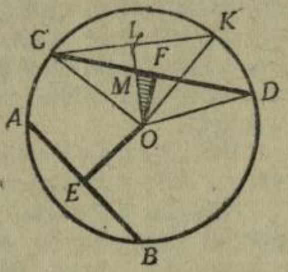
2) ***çурçавракăшран пĕчĕкрех икĕ пĕкĕ пĕр-пĕринпе пĕртан мар пулсан, вĕсенчен пысăкраххине пысăкрах хорда***

туртса тăрать, тата хордăсенчен пысăкраххи центр çывăхнерех пулать.

1) Калăпăр, AB пĕкĕ CD пĕкĕпе пĕртан (120 черт.). AB хорда CD хордăпа пĕртаннине тата центртан хордăсем çине антарнă OE перпендикуляр OF перпендикулярпа пĕртаннине кăтартса памалла. OAB сектора O центр тавра стрелка кăтартнă еннелле OB радиус OC радиуспа пĕр тĕле пуличчен çавăрăр. Вара BA пĕкĕ CD пĕкĕ тăрăх каять, анчах та ку пĕкĕсем пĕртан пирки вĕсем пĕр-пĕрне хупласа лартаççĕ. Çапла AB хорда CD хордăпа тата OE перпендикуляр OF перпендикулярпа пĕр вырăна лараççĕ (пĕр точкăран тӳрĕ лини çине пĕр перпендикуляр çеç антарма пулать), урăхла каласан, $AB = CD$ тата $OE = OF$.



120 черт.



121 черт.

2) Калăпăр, AB пĕкĕ (121 черт.) CD пĕкĕрен пĕчĕкрех тата икĕ пĕкки те çурçавракăшран пĕчĕкрех; AB хорда CD хордăран пĕчĕкреххине, OF перпендикуляр OE перпендикулярتан пĕчĕкреххине кăтартса памалла. CD пĕкĕ çинче AB пĕкĕпе пĕртан CK пĕкĕ виççе илĕпĕр те, пулăшмалли CK хордăна тăвăпăр; маларах кăтартнă теорема тăрăх, çак хорда AB хордăпа пĕртан тата центртан унпа пĕртанах аякра тăрать. COD тата COK треугольниксен пĕрин икĕ енĕ теприн икĕ енĕпе пĕртан (радиуссем пулнă майĕпе), анчах та енсем хушшинчи кĕтессем пĕртан мар; кун пек чухне, эпир пĕлетпĕр (52 §), кĕтессенчен пысăккине хирĕç, урăхла каласан, $\angle COD$ хирĕç пысăкрах ен выртмалла; вара $CD > CK$, çавăнпа та $CD > AB$.

$OE > OF$ кăтартса парас тесен, $OL \perp CK$ тăвăпăр та тата, маларах кăтартса панă тăрăх, $OE = OL$ тесе йышăнăпăр; çапла вара, пирĕн OF тата OL пĕр-пĕринпе танлаштарса пăхсан та çитет. Тӳркĕтеслĕ OFM треугольникре (чертежра хуратнăскерĕнче) OM гипотенуза OF катетран пысăкрах; анчах та, $OL > OM$, вара $OL > OF$ курăнсах тăрать, çавăнпа та $OE > OF$.

Эпир пĕр çавракăш валли кăтартса панă теорема пĕртан çавракăшсемшĕн те вырăнлă пулать, мĕншĕн тесен çакăн пек çавракăшсем пĕр-пĕринчен хăйсен положенийĕпе çеç уйрăм тăраççĕ.

110. Тӳртĕн теоремăсем. Малтанхи параграфра эпир пĕр радиус çинчи икĕ пĕккĕн пĕр-пĕринпе танлаштаруллă тĕслĕхĕсене те пăхса тухрăмăр. Пирĕн хордăсен тата вĕсемпе центрăн хушши хисепĕсен танлаштаруллă вывочĕсем пулчĕç, çавăнпа та тӳртĕн теоремăсем те тĕрĕс пулмалла. Çав тӳртĕн теоремăсем акă мĕнле:

Пĕр çавракăшра е пĕртан çавракăшсенче:

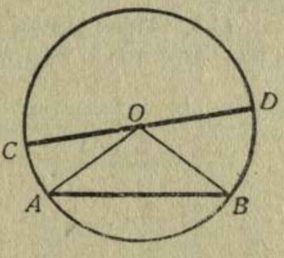
1) ***пĕртан хордăсем центртин пĕртанах инçĕшре пулаççĕ тата вĕсем пĕртан пĕкĕсене туртса тăраççĕ;***

2) ***центртан пĕртан инçешре тăракан хордăсем пĕртан пулаççĕ тата пĕртан пĕкĕсене туртса тăраççĕ;***

3) ***икĕ пĕртан мар хордăран пысăкраххи центр çывăхнерех пулать тата пысăкрах пĕкке туртса тăрать;***

4) ***центртан пĕртан мар инçешре тăракан хордăсенчен центр çывăхнерехри пысăкрах пулать тата пысăкрах пĕкке туртса тăрать.***

Çак теоремăсене хирĕçлесе кăтартса пама çăмăлрах. Сăмахран, вĕсенчен малтанхине кăтартса парас тесен, акă мĕнле тăватпăр: панă хордăсем пĕртан мар пĕкĕсене туртса тăмаççĕ пулсан, вара тӳрĕ теорема тăрăх, вĕсем пĕртан пулман пулĕччĕç, ку вара панă условие те хирĕçле пулать; вара пĕртан хордăсен пĕртан пĕкĕсене туртса тăмалла; пĕкĕсем пĕртан пулсан, тӳрĕ теорема тăрăх, вĕсене туртса тăракан хордăсем те центртан пĕртанах аякра пулмалла.



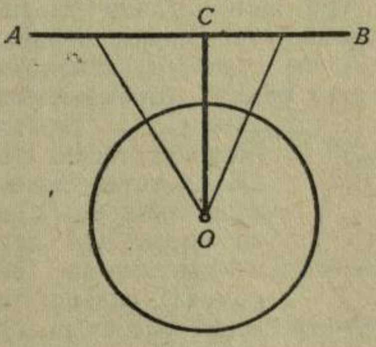
122 черт.

111. Теорема. ***Диаметр пур хордăсенчен те чи пысăкки.***

O центра центр витĕр кайман мĕнле те пулин хордăн, тĕслĕхрен *AB* хордăн, вĕçĕсемпе пĕрлештерер (122 черт.), вара *AOB* треугольник пулать; унăн пĕр енĕ хорда, тепĕр икĕ енĕ—радиуссем пулаççĕ. Анчах та, треугольникре кашни енĕн вăрăмăшĕ тепĕр икĕ енĕн сумминчен кĕскерех; çапла ĕнтĕ, *AB* хорда икĕ радиус сумминчен кĕскерех; çав вăхăтрах кирек епле *CD* диаметр та икĕ радиус суммипе пĕртан. Çапла диаметр центр витĕр кайман пур хордăран та вăрăмрах. Анчах диаметр та хорда пулнă пирки, диаметр хордăсенчен **чи пысăкки** пулса тăрать тесе калама та юрать.

III. ТӲРĔ ЛИНИПЕ ÇАВРАКĂШ ПĔР-ПĔРИНПЕ ВЫРНАÇĂНСА ТĂНИ.

112. Тӳрĕ линипе çавракăш пĕр-пĕринпе çакăн пек виçĕ положенире çеç вырнаçăнса тăма пултарни курăнсах тăрать.



123 черт.

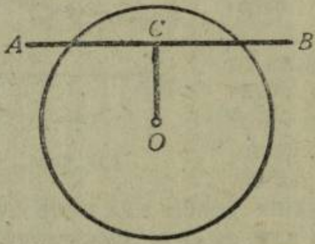
1) *Центрпа тӳрĕ лини (AB) хушши (OC) урăхла каласан, центртан тӳрĕ лини çине антарнă OC перпендикуляр вăрăмăшĕ çавракăш радиусĕнчен вăрăмрах* (123 черт.). Вара тӳрĕ лини çинчи *C* точка центртан радиус вăрăмăшĕнчен аяккарах пулать, çавăнпа та вăл çавракăш тулашĕнче выртать. Анчах та, тӳрĕ лини çинчи ытти пур точкăсем те, *C* точкăпа танлаштарсан, *O* точкăран аяккарах пулнă пирки (чалăш линисем перпендикуляртан вăрăмрах), вĕсем те пурте çавракăш тулашĕнче выртаççĕ; вара тӳрĕ линин çавракăшпа пĕрлешекен пĕр точка та çук.

2) *Центрпа тӳрĕ лини хушши (OC) радиусран кĕскерех.* Ку тĕслĕхре (124 черт.) *C* точка çавракăш ăшĕнче выртать. Кун пек чухне тӳрĕ лини çавракăш урлă каçса кайни курăнсах тăрать.

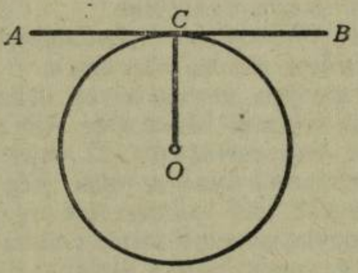
3) *Центрпа тӳрĕ лини хушши (OC) радиуспа пĕртан.* Вара *C* точка (125 черт.) тӳрĕ лини çинче те, çавракăш çинче те пулать; тӳрĕ лини çинчи ытти мĕнпур точкăсем, *C* точкăпа танлаштарсан, *O* точкăран аяккарах тăраканскерсем, çавракăш тулашĕнче пулаççĕ. Çапла вара, ку тĕслĕхре, тӳрĕ линипе çавракăшăн пĕрлехи точка пĕрре çеç пур. Çак точка центртан тӳрĕ лини çине антарнă перпендикулярăн тĕпĕ пулса тăрать.

Çавракăшпа пĕрлехи пĕр точка çеç пур тӳрĕ линие **çавракăша сĕртĕнекен лини** теççĕ; çак пĕрлехи точкăна хăйне **сĕртĕнӳ точки** теççĕ.

113. Сĕртĕнекен лини тĕлĕшĕпе эпир çак икĕ теоремăна (тӳррине тата тӳртĕннине) кăтартса парăпăр (126 черт.):



124 черт.

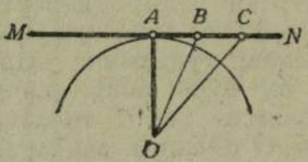


125 черт.

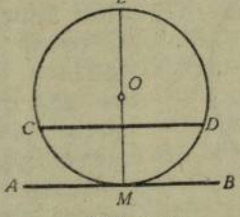
1) ***Тӳрĕ лини (MN) радиусăн çавракăш çинче выртакан вĕçĕпе перпендикулярлă пулсан, вăл çавракăшăн сĕртĕнекен лини пулать,*** тата тӳртĕнле:

2) ***тӳрĕ лини çавракăшăн сĕртĕнекенни пулсан, вара сĕртĕнӳ точкипе пĕрлештернĕ радиус çав линипе перпендикулярлă пулать.***

1) Радиусăн вĕçĕнче выртакан *A* точка çак çавракăшăн точки пулать; анчах çак вăхăтрах вăл *MN* тӳрĕ линин точки те пулать. Апла пулсан, ку точка çавракăшпа тӳрĕ линин пĕрлехи точки пулать. *MN* тӳрĕ лини çинчи ытти точкăсем, сăмахран, *B, C* тата ытти точкăсем те, центртан радиус вăрăмăшĕнчен аяккарах тăраççĕ (мĕншĕн тесен *OB*, *OC*, ... татăксем, чалăш линисем пулнă пирки, *OA* перпендикулярттан вăрăмрах), çавăнпа та, вĕсем çавракăш тулашĕнче выртаççĕ. Çапла ĕнтĕ, *MN* тӳрĕ линин çавракăшпа пĕрлехи пĕр точка (*A*) çеç пур. Çапла вара *MN* тӳрĕ лини сĕртĕнекен лини пулать.



126 черт.



127 черт.

2) *MN* тӳрӗ лини çавракӑшпа *A* точкӑра сӗртӗнет пулсан, çак тӳрӗ линин ытти точкисем пурте çавракӑш тулашӗнче пулмалла; çакӑн пирки вара *OB, OC*,... татӑксем *OA* радиусран вӑрӑмрах (*O* точка çавракӑш центрӗ). Вара радус *O* точкӑна *MN* тӳрӗ линин кирек епле точкипе те пӗрлештерекен пур татӑкран та кӗскереххи пулса тӑрать, çавӑнпа та $OA \perp MN$.

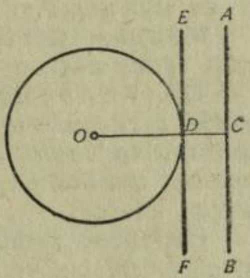
114. Теорема. ***Сӗртӗнекен лини хордӑпа параллельлӗ пулсан, сӗртӗнӳ точки вара çак хорда туртса тӑракан пӗкке çурмаран пайлать.***

Калӑпӑр, *AB* тӳрӗ лини çавракӑш çумне *M* точкӑра сӗртӗнет (127 черт.) тата вӑл *CD* хордӑпа параллельлӗ. $\smile CM = \smile MD$ пулнине кӑтартса памалла.

Сӗртӗнӳ точки витӗр *ME* диаметр тӑвӑпӑр та вара $EM \perp AB$, çавӑн пекех $EM \perp CD$ пулать; çавӑнпа та $\smile CM = \smile MD$.

115. Задача. *Панӑ O çавракӑш çумне панӑ AB тӳрӗ линипе параллельлӗ сӗртӗнӳ лини тӑвӑр* (128 черт.).

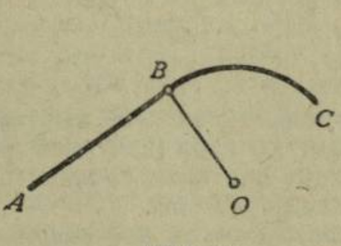
O центртан *AB* çине *OC* перпендикуляр антарӑпӑр та вара çак перпендикуляр çавракӑшпа пӗрлешнӗ *D* точка урлӑ $EF \parallel AB$ тӑвӑпӑр. Шыракан сӗртӗнекен лини *EF* пулать. Чӑнах та, $OC \perp AB$ тата $EF = AB$ пирки, $EF \perp OD$ пулать; радиусӑн вӗçӗнче, çав радиуспа перпендикулярлӑ, çавракӑш çинче выртакан тӳрӗ лини вара сӗртӗнекен лини пулать.



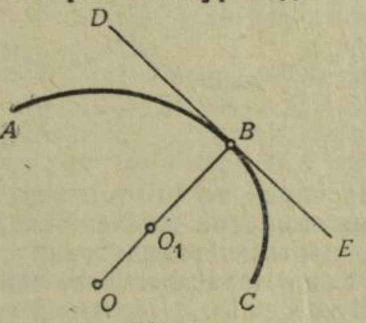
128 черт.

116. Пӗкӗпе тӳрӗ линин, е тепӗр çавракӑшӑн сопряженийӗ. Тӳрӗ линисене тата çавракӑшсен пӗккисене тунӑ чухне, *AB* тӳрӗ лини тата çавракӑшсен *BC* пӗкки пӗр-пӗринпе *B* точкӑра пӗрлешеççӗ пулсан тата çак точка вӗсен **сӗртӗнӳ точки** пулать пулсан, вӗсен пӗр-пӗринпе **сопряжени** пур теççӗ (129 черт.).

AB тата *BC* икӗ пӗкӗ (130 черт.) *B* точкӑра пӗр-пӗринпе пӗрлешеççӗ пулсан тата вӗсен çак точкӑра иккӗшне те сӗртӗнекен лини *DE* пулсан, вӗсен вара **сопряжени** пур теççӗ.



129 черт.



130 черт.

Пӗкӗпе тӳрӗ линин сопряженийӗ пултӑр тесен (113 §), пӗккӗн центрӗ тӳрӗ линин сопряжени точки çине лартнӑ перпендикуляр çинче пулмалла.

Пĕр пĕкĕпе тепĕр пĕккĕн сопряженийĕ пултăр тесен (113 §), икĕ пĕкĕ центрĕ те çак пĕкĕсен пĕрлехи сĕртĕнӳ линийĕ çине лартнă перпендикуляр çинче пулмалла.

Икĕ линин (тӳрĕ линипе пĕккĕн е икĕ пĕккĕн) сопряженийĕ пĕр линирен тепĕр лини çине куçнине якатать, татăксăр тăвать; унпа, сăмахран, чугун çулсен е трамвай çулĕсен кукăрĕсене тунă чухне усă кураççĕ.

IV. ИКĔ ÇАВРАКĂШĂН ПĔР-ПĔРИНПЕ ÇЫХĂНУЛЛĂ ВЫРНАÇĂВĔ.

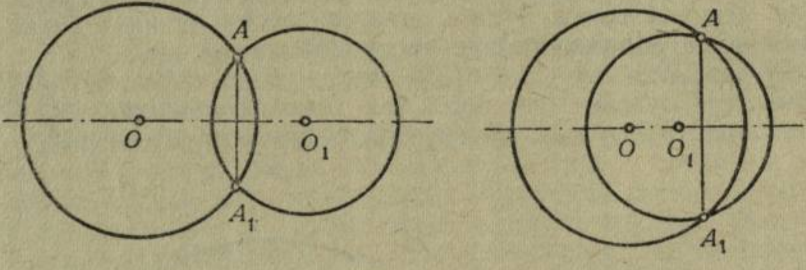
117. Определени. Икĕ çавракăшăн пĕрлехи пĕр точка çеç пулсан, вĕсене пĕр-пĕринпе сĕртĕнекен çавракăшсем теççĕ; икĕ çавракăшăн пĕрлехи икĕ точка пулсан, вĕсене пĕр-пĕрин урлă каçса каякан çавракăшсем теççĕ.

Пĕр-пĕринпе пĕрлешĕнсе ларман икĕ çавракăшăн виçĕ пĕрлехи точка пулма пултараймасть, мĕншĕн тесен унсăрăн виçĕ точка урлă икĕ тĕрлĕрен çавракăш тума май килнĕ пулĕччĕ, кун пек тума май килмест (104 §).

Малашне **центрсен линийĕ** тесе, икĕ çавракăшăн центрĕ витĕр тухса каякан вĕçĕмсĕр линие калăпăр.

118. Теорема. ***Икĕ çавракăшăн*** (131 черт.) ***центрсен линийĕ тулашĕнче пĕрлехи точка*** (A) ***пулсан, вĕсен, центрсен линийĕпе шутласан, çак точкăпа симметриллĕ татах тепĕр точка*** (A_1) ***пур*** (çапла вара, çавракăшсем пĕр-пĕрин урлă каçса каяççĕ).

Центрсен линийĕ çине икĕ çавракăшăн диаметрĕсем те кĕреççĕ, çавăнпа та вăл мĕнпур фигурăн симметри тĕнĕлĕ пулать; çакăн пирки те ĕнтĕ центрсен линийĕ тулашĕнче выртакан A точка симметри тĕнĕлĕн тепĕр енчи A_1 точкăпа (центрсен линийĕ çине лартнă перпендикуляр çинче тата малтанхи точкăпа пĕртанах аякра тăраканскерпе) симметриллĕ пулмалла.

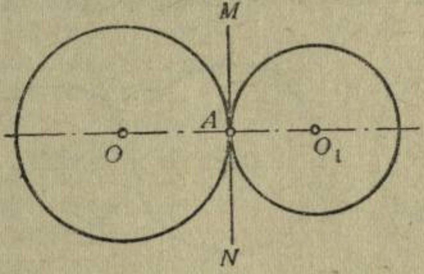


131 черт.

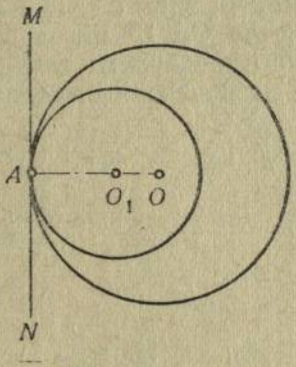
Следстви. *Пĕр-пĕрин урлă каçса каякан икĕ çавракăшăн пĕрлехи хорди* (131 черт., AA_1) *центрсен линийĕпе перпендикулярлă тата çак центрсен линийĕ ăна çурмаран пайлать.*

119. Теорема. ***Икĕ çавракăшăн центрсен линийĕ çинче пĕрлехи точка пулсан, вĕсем пĕр-пĕрне сĕртĕнеççĕ*** (132 тата 133 черт.).

Çавракăшсен центрсен линийĕ тулашĕнче урăх пĕрлехи точка пулма пултараймасть, мĕншĕн тесен вĕсен центрсен лини тулашĕнче татах виççĕмĕш пĕрлехи точка пулнă пулĕччĕ, çапла вара



132 черт.



133 черт.

вĕсем пĕр-пĕринпе пĕрлешсе кайнă пулĕччĕç. Вĕсен центрсен линийĕ çинче те тепĕр пĕрлехи точка пулма пултараймасть, мĕншĕн тесен çак лини çинче пĕрлехи точка иккĕ пулсан, вĕсен вара çак точкăсене пĕрлештерекен пĕрлехи хорда та пулмалла. Анчах та, центрсем витĕр каякан хорда вăл — диаметр пулать; çавракăшсен пĕрлехи диаметр пулсан, вĕсем пĕр-пĕринпе пĕрлешсе пĕр çавракăш пулаççĕ.

Асăрхаттарни. Çавракăшсем пĕр-пĕрин тулашĕнче пулсан, вĕсем сĕртĕннине **тулашĕнчен сĕртĕнни теççĕ** (132 черт.), пĕр çавракăш тепĕр çавракăш ăшĕнче пулсан, вĕсем сĕртĕннине **шалтан сĕртĕнни** теççĕ (133 черт.).

120. Теорема (малтанхипе тӳртĕнле). ***Икĕ çавракăш пĕр-пĕринпе сĕртĕнеççĕ пулсан*** (132 тата 133 черт., A точкăра), ***сĕртĕнӳ точки центрсен линийĕ çинче выртать.***

A точка центрсен линийĕ тулашĕнче пулма пултараймасть, мĕншĕн тесен унсăрăн çавракăшсен татах тепĕр пĕрлехи точка пулнă пулĕччĕ, ку—теоремăн условине хирĕçлет.

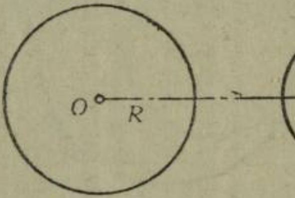
121. Следстви. *Пĕр-пĕрне сĕртĕнекен икĕ çавракăшăн хăйсем сĕртĕннĕ точкăра иккĕшне те пĕрле сĕртĕнекен тӳрĕ лини пур,* мĕншĕн тесен, сĕртĕнӳ точки витĕр OA радиуспа перпендикулярлă MN тӳрĕ лини тусан, çак тӳрĕ лини вара O_1A радиуспа та перпендикулярлă пулать (132 тата 133 черт.).

122. Икĕ çавракăш вырнаçăвĕн тĕрлĕ тĕслĕхĕсем. Икĕ çавракăшăн радиусĕсене R тата R_1 саспаллисемпе тата вĕсен центрĕсем хушшине d саспаллипе паллă тăвăпăр. Вара икĕ çавракăшăн тĕрлĕ вырнаçăвĕсене кура, çак хисепсем мĕнле улшăнса пынине тĕпчесе сăнăпăр. Çакăн пек вырнаçусем пилĕк тĕрлĕ пулма пултараççĕ:

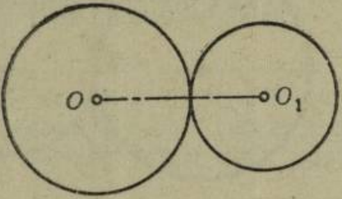
1) Çавракăшсем пĕр-пĕринпе сĕртĕнмесĕр, пĕр-пĕрин тулашĕнче выртаççĕ (134 черт.); ку тĕслĕхре $d > R + R_1$ курăнсах тăрать.

2) Çавракăшсем пĕр-пĕрне тул енчен сĕртĕнеççĕ (135 черт.); вара $d = R + R_1$, мĕншĕн тесен сĕртĕнӳ точки центрсен линийĕ çинче выртать.

3) Çавракăшсем пĕр-пĕрин урлă каçса каяççĕ (131 черт.); вара $d < R + R_1$, анчах çав вăхăтрах $d > R - R_1$, мĕншĕн тесен OAO_1* илсен, унта OO_1 енĕ, d пĕртанскер, R тата R_1 радиуссемпе пĕртан тепĕр икĕ енĕн сумминчен пĕчĕкрех, анчах вĕсен разноçĕнчен пысăкрах.



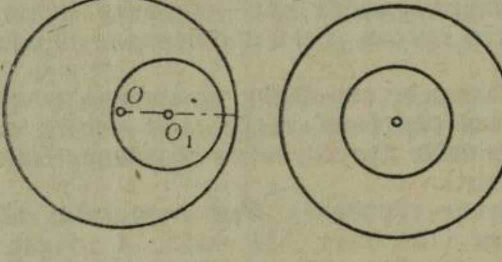
134 черт.



135 черт.

4) Çавракăшсем пĕр-пĕрне шал енчен сĕртĕнеççĕ (133 черт.); ку тĕслĕхре $d = R - R_1$ мĕншĕн тесен сĕртĕннин точки центрсен линийĕ çинче выртать.

5) Пĕр çавракăш тепĕр çавракăшĕ ăшĕнче, пĕр-пĕрне сĕртĕнмесĕрех выртать (136 черт.); вара $d < R - R_1$ курăнсах тăрать, пĕр уйрăм тĕслĕх, икĕ çавракăшăн центрсем пĕр-пĕринпе пĕрлешсе кайнă чухне $d = 0$ (кун пек çавракăшсене **концентрически** çавракăшсем теççĕ).



136 черт.

Асăрхаттарни. Вĕренекенсен çак тĕслĕхсене тӳртĕн каласан та вĕсем тĕрĕс пулнине кăтартса памалла:

1) *$d > R + R_1$ пулсан, вара çавракăшсем пĕр-пĕрне сĕртĕнмесĕрех пĕр-пĕрин тулашĕнче пулаççĕ.*

2) *$d = R + R_1$ пулсан, çавракăшсем тул енчен сĕртĕнеççĕ.*

3) *$d < R + R_1$ пулсан, çав вăхăтрах тата $d > R - R_1$ пулсан, çавракăшсем пĕр-пĕрин урлă каçса каяççĕ.*

4) *$d = R - R_1$ пулсан, çавракăшсем шал енчен сĕртĕнеççĕ.*

5) *$d < R - R_1$ пулсан, вара çавракăшсем пĕр-пĕрне сĕртĕнмесĕрех пĕрин ăшĕнче тепри выртать.*

Çаксене пурне те хирĕçлесе каланинчен çăмăллăнах кăтартса пама пулать.

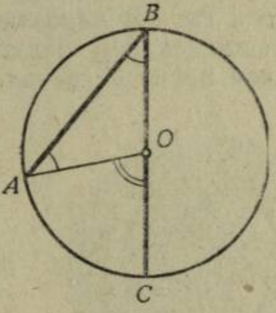
V. ШАЛА ÇЫРНĂ ТАТА ЫТТИ ХĂШПĔР КĔТЕССЕМ. СĔРТĔНЕКЕН ЛИНИ ТĂВАССИ.

123. Шала çырнă кĕтес. Çавракăш çинчи пĕр точкăран тухакан икĕ хордăран пулнă кĕтесе **шала çырнă** кĕтес теççĕ.

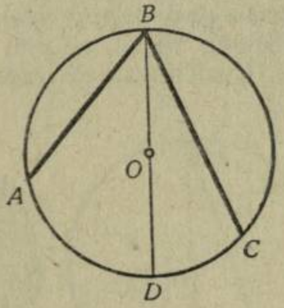
---

* 131 чертежра OA тата O_1A тӳрĕ линисем тăвар.

Тĕслĕхрен, ABC кĕтес (137 черт.) шала çырнă кĕтес пулать. Шала çырнă кĕтес çинчен вăл хăйĕн енĕсем хушшинче хупăнса тăракан пĕкĕ çине **сĕвенсе тăрать** тесе калама йышăннă. Çапла ĕнтĕ ABC кĕтес AC пĕкĕ çине сĕвенсе тăрать.



137 черт.



138 черт.

124. Теорема. ***Шала çырнă кĕтесе хăй сĕвенсе тăракан пĕккĕн çуррийĕпе виçеççĕ.***

Çак теоремăна акă мĕнле ăнланмалла: шала çырнă кĕтес вăл хăй сĕвенсе тăракан пĕккĕн çур пайĕнчи чухлĕ кĕтес градусĕ, минучĕ, секунчĕ хупласа тăнине пĕлтерет.

Теоремăна кăтартса панă чухне ăрасна виçĕ тĕслĕх пăхса тухăпăр:

1) O центр (137 черт.) шала çырнă ABC кĕтесĕн енĕ çинче выртать. OA радиуса тăвăпăр та вара $\triangle AOB$ пулать, кунта $OA=OB$ (радиуссем), çапла ĕнтĕ, $\angle ABO=\angle BAO$. Çак треугольникпе шутласан, AOC кĕтес тулашĕнчи кĕтес пулать; çавăнпа та вăл ABO тата BAO кĕтессен суммипе пĕртан, вăл икĕ ABO кĕтеспе пĕртан; çавăнпа та ABO кĕтес центрти AOC кĕтесĕн çуррийĕпе пĕртан. Анчах та, AOC кĕтесе ăна AC пĕкĕпе виçеççĕ, урăхла каласан, вăл хăйĕнче AC пĕкĕ хăйĕнче пĕкĕ градусне, минутине тата секундине тытса тăнă чухлех кĕтес градусне, минутине тата секундине тытса тăрать, çапла вара, ABC кĕтесе AC пĕккĕн çуррипе виçеççĕ.

2) O центр шала çырнă ABC кĕтесĕн енĕсем хушшинче выртать (138 черт.).

BD диаметра тусан, эпир ABC кĕтесе икĕ кĕтесе пайлатпăр; маларах кăтартнă теорема тăрăх, вĕсенчен пĕрине AD пĕккĕн çуррийĕпе, теприне—DC пĕккĕн çуррийĕпе виçеççĕ; çапла вара, ABC кĕтесе $\frac{1}{2}\smile AD+\frac{1}{2}\smile DC$ суммăпа виçеççĕ, çак сумма акă мĕнпе пĕртан:

$$\frac{1}{2}(\smile AD+\smile DC),\ \text{урăхла каласан,}\ \frac{1}{2}\smile AC.$$

3) O центр шала çырнă ABC кĕтесĕн тулашĕнче выртать (139 черт.).

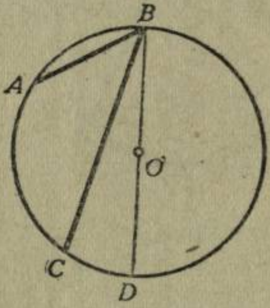
BD диаметр тусан, акă мĕнле пулать:

$$\angle ABC=\angle ABD-\angle CBD.$$

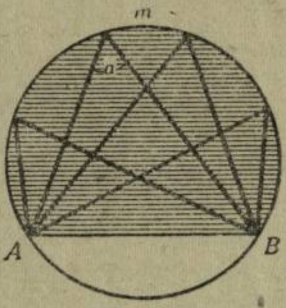
Анчах та, ABD тата CBD кĕтессене, маларах кăтартса панă тăрăх, AD тата CD пĕкĕсен çуррийĕсемпе виçеççĕ, çапла вара, ABC кĕтес вĕсен разноçĕпе виçĕнет.

$\frac{1}{2}\smile AD - \frac{1}{2}\smile CD'$, анчах ку разность $\frac{1}{2}(\smile AD - \smile CD)$, урăхла каласан, $\frac{1}{2}\smile AC$ пĕртан.

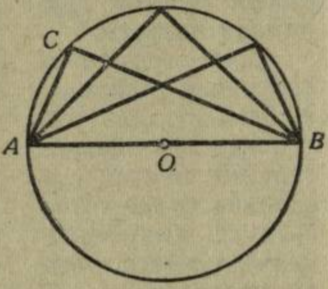
125. Следствисем. 1) *Пĕр пĕкĕ çинех сĕвенсе тăракан шала çырнă пур кĕтессем те пĕр-пĕринпе пĕртан* (140 черт.), мĕншĕн тесен вĕсене кашнинех пĕр пĕккĕн çуррийĕпех виçеççĕ. Çакнашкал кĕтессенчен пĕрне *a* саспаллипе паллă тусан, вара



139 черт.



140 черт.



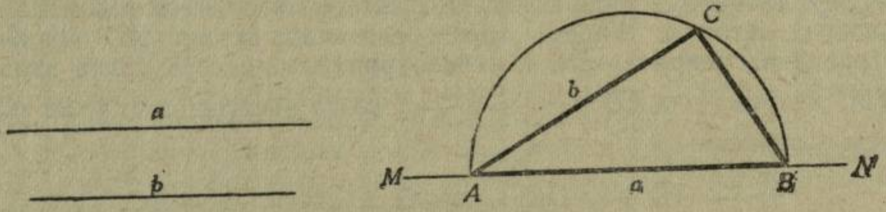
141 черт.

AmB сегмент (чертеж çинче хуратнăскер) хăйĕнче *a* кĕтеспе пĕртан кĕтесе шăнăçтарса тăрать, тесе калама пулать.

2) *Диаметр çине сĕвенсе тăракан шала çырнă пур кĕтессем те тӳрĕ кĕтессем* (141 черт.), мĕншĕн тесен çакнашкал кашни кĕтесех çурçавракăш çуррийĕпе виçеççĕ, çапла вара хăйĕнче вăл 90° тытса тăрать.

126. Задача. *a гипотенуза тата b катет тăрăх тӳркĕтеслĕ треугольник тăвăр* (142 черт.).

Мĕнле те пулин *MN* тӳрĕ лини çинче $AB = a$ хурăпăр та *AB* çине çурçавракăш тăвăпăр. Унтан çурçавракăшăн *A* (е *B*) точкăна центр туса *b* радиуслă пĕкĕ çырса çурçавракăш çинчи С точка тупăпăр.

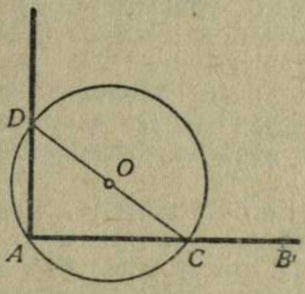


142 черт.

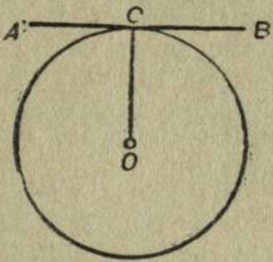
Çурçавракăшпа пĕкĕ пĕрлешнĕ *C* точкăна *AB* диаметрăн вĕçĕсемпе пĕрлештерĕпĕр. Вара *ABC* треугольник шыракан треугольник пулать, мĕншĕн тесен унăн *C* кĕтесĕ тӳрĕ кĕтес, *a* гипотенуза тата *b* катет пулать.

127. Задача. *Панă тӳрĕ линин A вĕçĕнчен, ăна малалла тăсмасăрах, перпендикуляр лартăр.*

Тӳрӗ лини тулашӗнче мӗнле те пулин O точка илӗпӗр те çак точкӑна çавракӑшӑн центрӗ, OA татӑка радиусӗ туса çавракӑш çырӑпӑр, вара çак çавракӑш AB тӳрӗ линие C точкӑра татса каять. Çак C точка витӗр CD диаметр тӑвӑпӑр та унӑн вӗçне точкӑпа пӗрлештерӗпӗр. AD тӳрӗ лини шыракан перпендикуляр пулать те ӗнтӗ, мӗншӗн тесен A кӗтес диаметр çине сӗвенсе тӑракан шала çырнӑ тӳрӗ кӗтес пулать.



143 черт.



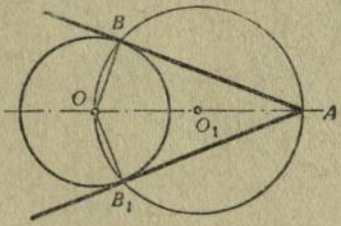
144 черт.

128. Задача. *Панӑ точкӑран панӑ çавракӑш çумне сӗртӗнекен лини тӑвӑр.*

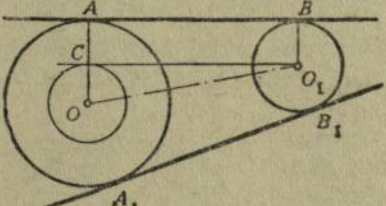
Икӗ тӗслӗхе пӑхса тухар:

1) Панӑ точка (C, 144 черт.), çавракӑш çинче выртать. Вара ун урлӑ радиус тӑвӑпӑр та унӑн C вӗçӗ урлӑ çак радиусӑн AB перпендикулярне тӑвӑпӑр (маларахри задачӑра кӑтартнӑ евӗрлех).

2) Панӑ точка A (145 черт.) (O центрлӑ) çавракӑш тулашӗнче выртать. Вара, A точкӑна O точкӑпа пӗрлештерӗпӗр те AO татӑка O_1 точка тӗлӗнче çурмаран пайласа, çак точкӑна OO_1 радиуслӑ точкӑн центрӗ туса çавракӑш çырса тухӑпӑр. Çак çӗнӗ çавракӑш панӑ çавракӑша татса кайнӑ B тата B_1 точкӑсем урлӑ AB тата AB_1 тӳрӗ линисем хывӑпӑр. Çак тӳрӗ линисем сӗртӗнекен линисем пулаççӗ те ӗнтӗ, мӗншӗн тесен OBA тата OB_1A кӗтессем—диаметр çине сӗвенсе тӑнӑ пирки—тӳрӗ кӗтессем пулаççӗ.



145 черт.



146 черт.

Следстви. *Çавракӑш çумне унӑн тулашӗнчи точкӑран тунӑ икӗ сӗртӗнекен линисем пӗртан тата вӗсем çак точкӑна çавракӑшӑн центрӗпе пӗрлештернӗ тӳрӗ линипе пӗртан кӗтессемех тӑваççӗ.* Ку тӳркӗтеслӗ AOB тата OB_1A треугольниксем пӗртанлӑхӗнчен курӑнса тӑрать (145 черт.).

129. Задача. *O тата O_1 икӗ çавракӑш çумне пӗрлехи сӗртӗнекен лини тӑвӑр* (146 черт.).

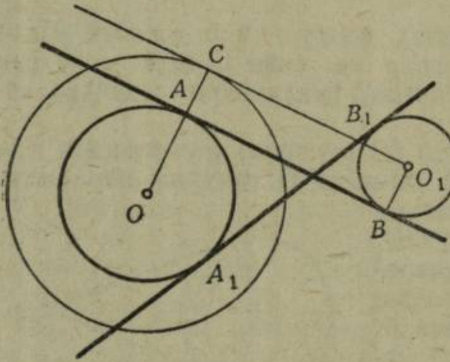
1) Анализ. Задачӑна шутланӑ, тейӗпӗр. AB тӳрӗ лини пӗрлӗхи сӗртӗнекен лини пултӑр, A тата B точкӑсем—сӗртӗнӳ точкисем пулччӑр. Паллах, çак точкӑсенчен пӗрне, сӑмахран,

A точкӑна тупсан, вара тепӗр точкине тупма та йывӑрах мар, OA тата O_1B радиуссене тӑвар. Ҫак радиуссем, пӗрлехи сӗртӗнекен линипе перпендикулярлӑ пулнӑ майӗпе, пӗр-пӗринпе параллельлӗ, ҫавӑнпа та, O_1 точкӑран $O_1C \parallel BA$ тусан, вара OCO_1 треугольник тӳркӗтеслӗ пулать (тӳрӗ кӗтесӗ C тӑрринче); ҫакӑн пирки те ӗнтӗ, O центртан OC радиуслӑ ҫавракӑш ҫырса тухсан, вӑл O_1C тӳрӗ линие C точкӑра сӗртӗнекен пулать. Ҫак пулӑшма тунӑ ҫавракӑшӑн радиусӗ паллӑ: вӑл $OA-CA=OA-O_1B$, урӑхла каласан, вӑл панӑ ҫавракӑшсен радиусӗсен разноҫӗпе пӗртан.

Чертеж тӑвасси. Ҫапла ӗнтӗ, чертежа ҫакӑн пек тума пулать: ҫавракӑш центрне O точкӑра туса, радиусне панӑ радиуссен разноҫӗн вӑрӑмӑшӗ чухлӗ илсе, ҫавракӑш ҫырса тухатпӑр; O_1 точкӑран ҫак ҫавракӑш патне OC сӗртӗнекен лини тӑватпӑр (маларахри задачӑра кӑтартса панӑ мелпе); сӗртӗнӳ C точки урлӑ OC радиус тӑвӑпӑр та вӑл панӑ ҫавракӑшпа A точкӑра пӗрлешиччен ӑна малалла чӑсӑпӑр. Юлашкинчен, A точкӑран CO_1 линипе параллельлӗ AB тӳрӗ лини тӑвӑпӑр.

Ҫакӑн пек майпах эпир тепӗр пӗрлехи сӗртӗнекен лини A_1B_1 тума пултаратпӑр. AB тата A_1B_1 тӳрӗ линисене икӗ ҫавракӑшӑн **тулашӗнчи** пӗрлехи сӗртӗнекен линисем теҫҫӗ.

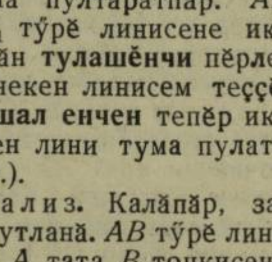
Тата **шал енчен** тепӗр икӗ сӗртӗнекен лини тума пулать (147 черт.).



147 черт.

2) Анализ. Калӑпӑр, задачӑна шутланӑ. AB тӳрӗ лини шыракан сӗртӗнекен лини пултӑр. Сӗртӗнӳ A тата B точкисене OA тата O_1B радиуссем тӑвӑпӑр. Ҫак радиуссем иккӗшӗ те пӗрлехи сӗртӗнекен линипе перпендикулярлӑ тата пӗр-пӗринпе параллельлӗ пулаҫҫӗ.

Ҫавӑнпа та, O_1 точкӑран $O_1C \parallel BA$ тусан тата ӑна O_1C тӳрӗ линипе C точкӑра пӗрлешиччен чӑссан, вара OC тӳрӗ лини O_1C тӳрӗ линипе параллельлӗ пулать; ҫакӑн пирки те вара центрне O точкӑра тусан, OC радиуспа ҫавракӑш ҫырса тухсан, вӑл O_1C тӳрӗ линипе C точкӑра сӗртӗнекен пулать. Ҫак пулӑшакан ҫавракӑшӑн радиусӗ паллӑ: вӑл $OA+AC=OA+O_1B$, урӑхла каласан, вӑл панӑ ҫавракӑшсен радиусӗсен суммипе пӗртан.



148 черт.

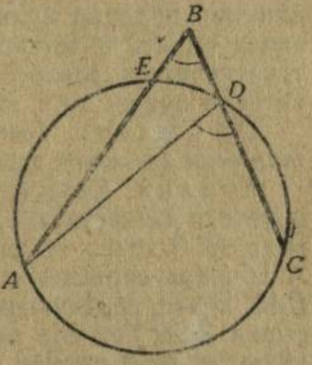
Чертеж тӑвасси. Ҫапла ӗнтӗ, чертежа ҫакӑн пек тума пулать: ҫавракӑшӑн центрне O точкӑра туса, радиусне панӑ радиуссен суммин вӑрӑмӑшӗ чухлӗ илсе, çавракăш çырса тухатпăр; O_1 точкăран çак çавракăш патне сĕртĕнекен O_1C лини тăватпăр; сĕртĕнÿ C точкине O точкăпа пĕрлештеретпĕр; юлашкинчен, OC тÿрĕ лини панă çавракăш урлă каçса каякан A точка урлă $AB \parallel CO_1$ тăватпăр.

Шал енчи тепĕр A_1B_1 сĕртĕнекен линие те çакăн пек майпах тума пулать.

130. Теоремăсем. 1) ***Кĕтесĕн*** (148 черт., ABC) ***тăррийĕ çавракăш ăшĕнче выртать пулсан, вăл хăйĕн енĕсем хушшинчи пĕккĕн тата енĕсене малалла тăсни хушшинчи пĕккĕн суммин*** (AC тата DE) ***çуррийĕпе виçĕнет.***

2) ***Кĕтесĕн*** (149 черт., ABC) ***тăррийĕ çавракăш тулашĕнче выртать пулсан, вăл вара хăйĕн енĕсем хушшинчи икĕ пĕккĕн*** (AC тата ED) ***разноçĕн çуррийĕпе виçĕнет.***

AD хордăна (икĕ чертежĕ çинче те) тусан, пирĕн $\triangle ABC$ пулать. Çак треугольникпе шутласан, кĕтес тăррийĕ çавракăш ăшĕнче выртнă чухне, ABC кĕтес тулашĕнчи, кĕтес тăррийĕ çавракăш тулашĕнче выртнă чухне, шалти пулать. Çавăнпа та, малтанхи тĕслĕхре: $\angle ABC = \angle ADC + \angle DAE$; иккĕмĕш тĕслĕхре: $\angle ABC = \angle ADC - \angle DAE$.



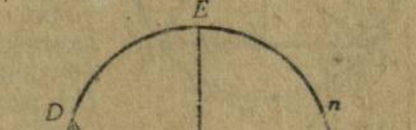
149 черт.

Анчах та, ADC тата DAC кĕтессем шала çырнă кĕтес пулнă пирки, AC тата DE пĕкĕсен çуррийĕпе виçĕнеççĕ; çавăнпа та, ABC кĕтес çакăн пек виçĕнет: пĕрремĕш тĕслĕхре $\frac{1}{2}(\smile AC + \smile DE)$ хисеппе пĕртан $\frac{1}{2}\smile AC + \frac{1}{2}\smile DE$ суммăпа, иккĕмĕш тĕслĕхре $\frac{1}{2}(\smile AC - \smile DC)$ хисеппе пĕртан $\frac{1}{2}\smile AC - \frac{1}{2}\smile DE$ разноçпе виçĕнет.

131. Теорема. ***Сĕртĕнекен линипе хорда тунă кĕтес*** (150 тата 151 черт., ACD) ***унăн ăшĕнчи пĕккĕн çуррийĕпе виçĕнет.***

Малтанлăха CD хорда O центр урлă каять, тейĕпĕр, урăхла каласан, çак хорда диаметр пулса тăрать (150 черт.). Вара ACD

150 черт.



151 черт.

кĕтес тӳрĕ кĕтес, çавăнпа та, вăл 90° пулать. Анчах та, CmD пĕккĕн çуррийĕ те 90°, мĕншĕн тесен пĕтĕм CmD пĕкĕ çурçавракăш пулнă майĕпе 180° тытса тăрать. Вара çак уйрăм тĕслĕхшĕн те теорема тĕрĕсех пулать.

Халĕ ĕнтĕ хорда центр витĕр кайман пĕтĕмĕшле тĕслĕхе илер (151 черт.). Вара CE хордăна тусан, пирĕн çакăн пек пулать:

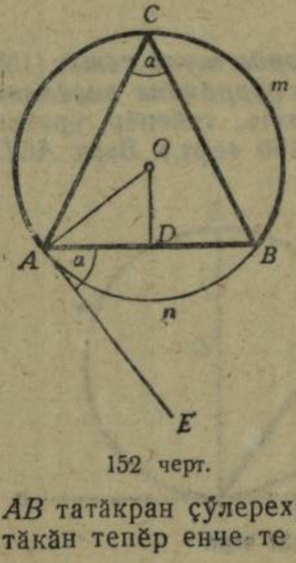
$$\angle ACD=\angle ACE-\angle DCE.$$

ACE кĕтес, сĕртĕнекен линипе тата диаметрпа пулнăскер, маларах кăтартса панă тăрăх, CDE пĕккĕн çуррийĕпе виçĕнет: DCE кĕтес, шала çырнă майĕпе, DE пĕккĕн çуррийĕпе виçĕнет; çапла ĕнтĕ, ACD кĕтес $\frac{1}{2}\smile CDE-\frac{1}{2}\smile DE$ разноçĕпе, урăхла каласан, CD пĕккĕн çуррийĕпе виçĕнет.

Çакăн пек майпах, BCD пуклак кĕтес (151 черт.), сĕртĕнекен линипе хордăран пулнăскер, $CnED$ пĕккĕн çуррийĕпе виçĕнет; анчах та, кунта теоремăн доказательствине тунă чухне çак кĕтесе кĕтессен разноçĕ тесе мар, BCE тӳрĕ кĕтеспе ECD шĕвĕр кĕтесĕн сумми тесе шутламалла.

132. Задача. *Панă AB татăк çинче панă a кĕтесе шăнăçтаракан сегмент тăвăр* (152 черт.).

Анализ. Калăпăр, задачăна шутланă; AmB сегмент хăйĕнче a кĕтесе шăнăçтартăр, урăхла каласан, унăн ăшне çырнă кирек епле ACB кĕтес те панă a кĕтеспе пĕртан пултăр. Çавракăша A точкăра сĕртĕнекен пулăшакан AE тӳрĕ лини тăвăпăр. Вара BAE кĕтес, сĕртĕнекен линипе тата хордăпа пулнăскер, шала çырнă ACB кĕтеспе пĕртан пулмалла, мĕншĕн тесен вĕсем иккĕшĕ те AnB пĕккĕн çуррийĕпе виçĕнеççĕ. Халĕ ĕнтĕ çавракăшăн O центрĕ AB татăк çине унăн варри витĕр тунă DO перпендикуляр çинче выртмаллине шута илĕпĕр; çак вăхăтрах тата çак центр AE сĕртĕнекен лини çине сĕртĕнӳ точки витĕр тунă AO перпендикуляр çинче те выртмалла. Çаксемпе усă курса, эпир çакнашкал чертеж тума пултаратпăр.



152 черт.

Чертеж тăвасси. AB татăкăн вĕçĕнче панă a кĕтеспе пĕртан BAE кĕтесе тăватпăр: AB варри витĕр DO перпендикуляр тăватпăр та AE тӳрĕ лини çине, A точкăна, перпендикуляр лартатпăр: çак икĕ перпендикуляр пĕр-пĕринпе пĕрлешнĕ O точкăна çавракăшăн центрĕ туса, радиусне OA илсе çавракăш çырса çавăрăнатпăр.

Доказательство. AnB сегмент шыракан сегмент пулать, мĕншĕн тесен ун çине çырнă кирек епле кĕтес те AnB пĕккĕн çуррийĕпе виçĕнет, çак пĕккĕн çурриех тата $BAE=a$ кĕтесе те виçет.

Асăрхаттарни. 152-мĕш чертежра AB татăкран çӳлерехре тăракан сегмента туса кăтартнă. AB татăкăн тепĕр енче те çакăн пек сегментах тума пулать. Çапла ĕнтĕ, *панă татăк AB панă кĕтеспе курăнакан геометриллĕ точкăсен вырăнĕ икĕ сегментăн пĕккисенчен тăрать; вĕсенчен кашниех хăйĕнче панă кĕтесе шăнăçтарать, тата вĕсенчен пĕрийĕ AB татăкăн пĕр енче, тепри тепĕр енче вырнаçса тăрать*, тесе калама пулать.

Чертеж тумалли задачăсем.

133. Геометриллĕ вырăнсен меточĕ. Чертежла задачăсенчен нумайăшне тунă чухне геометриллĕ вырăна пĕлнипе тата унпа çыхăнулла геометриллĕ вырăнсен меточĕпе усă курма пулать.

Çак методăн, Платон (пирĕн эрăччен IV ĕмĕр) вăхăтĕнченех паллăскерĕн, тĕп шухăшĕ акă мĕнле. Панă задачăра кирлĕ условисене килĕштерекен хăшпĕр точкăна тупмалла, тейĕпĕр. Çак условисенчен пĕрне пăрахăçлăпăр, вара задача паллах мар пулса тăрать, урăхла каласан, ăна килĕштерекен точкăсем темĕн чухлĕ те пулма пултараççĕ. Çак точкăсем мĕнле те пулин геометриллĕ точкăсен вырăнĕ пулать. Май килсен, ăна тăвăпăр. Унтан пăрахăçланă условие илĕпĕр те мĕнле те пулин урăх условие пăрахăçлăпăр; вара задача каллех шутсăр нумай точкăсене килĕштерекен пулать, çак точкăсем татах геометриллĕ точкăсен вырăнне тăваççĕ. Май килсен, ăна та тăвăпăр. Шыракан точка, пур условисене те килĕштернĕ пирки, геометриллĕ икĕ вырăн çинче те, урăхла каласан, вĕсем пĕр-пĕрин урлă каçса кайнă тĕлте пулмалла. Шыраса тупнă геометриллĕ вырăнсем пĕр-пĕрин урлă каçса кайнипе каçса кайманнине кура, задачăна е шутлама май килет, е килмест; геометриллĕ вырăнсем пĕр-пĕрин урлă миçе хутчен каçса каяççĕ, задачăн отвечĕсем те çавăн чухлех пулаççĕ.

Çак методпа шутламалли пĕр тĕслĕхе кăтартса парар. Çак тĕслĕх тепĕр чухне панă пур условисене те шута илмешкĕн чертежа пулăшакан линисем те кĕртме кирлине кăтартса парĕ пире.

153 черт.

134. Задача. *Панă a тĕпĕ, A тăррин-чи кĕтес тата икĕ енĕн s сумми тăрăх треугольник тăвăр.*

Калăпăр, ABC шыракан треугольник пулать (153 чертеж). Икĕ енĕн панă суммине шута илес тесен, BA тӳрĕ линие малалла тăсăпăр та ун çинче $BM = s$ виçсе илĕпĕр. Тата MC тӳрĕ лини тусан, эпир пулăшакан BMC треугольник тăвăпăр. Çак треугольнике тунă хыççăн, вара шыракан ABC треугольнике тума та йывăр мар.

BMC треугольнике тăвасси M точкăна тупасси патне илсе пырать.

AMC треугольник танаяклă пулнине асăрхăпăр та ($AM = AC$) вара, $\angle M = \frac{1}{2} \angle BAC$ (мĕншĕн тесен $\angle M + \angle MCA = \angle BAC$), халĕ ĕнтĕ M точка икĕ условие те килĕштермеллине куратпăр: 1) вăл B точкăран s чухлĕ аякра тăрать, 2) унран панă

BC татăк $\frac{1}{2}\angle A$ пĕртан кĕтеспе курăнать. Иккĕмĕш условие пăрахăçласан, эпир темĕн чухлĕ M точка тупатпăр, вĕсем пурте s радиуспа B точкăран çырса çаврăннă çавракăш çинче выртаççĕ. Пĕрремĕш условие пăрахăçласан, эпир татах темĕн чухлех M точка тупатпăр, вĕсем пурте BC татăк çинче тунă $\frac{1}{2}\angle A$ шăнăçтаракан сегментăн пĕкки çинче выртаççĕ. Çапла ĕнтĕ, M точкăна тупасси геометриллĕ икĕ вырăна тупасси пулать, эпир вĕсене кашнинех тума пĕлетпĕр. Геометриллĕ вырăнсен пĕтĕмĕшле точкăсем пулмасан, вара задачăна шутлама май килмест; геометриллĕ çак вырăнсем пĕр-пĕрин урлă касса кайнине е сĕртĕннине кура, задачăн пĕр е икĕ решени пулать (пирĕн чертеж çинче задачăн условийĕсене килĕштерекен ABC тата A_1BC треугольник пулать).

Тепĕр чухне задача точкăна тупасси мар, темиçе условие те килĕштерекен тӳрĕ линие тупасси пулать. Условисенчен пĕрне пăрахăçласан, темĕн чухлĕ тӳрĕ линисем тупатпăр; кун пек чухне тӳрĕ линисем пĕр-пĕр линие кăтартса пама пултараççĕ (сăмахран, вĕсем пурте пĕр-пĕр çавракăша сĕртĕнекенскерсем пулаççĕ). Вара тепĕр условие пăрахăçласа, малтан пăрахăçланă условие илсен, эпир татах темĕн чухлĕ тӳрĕ линисем тупатпăр, кусем те пĕр-пĕр урăх линие кăтартса пама пултараççĕ. Май килсен, çак линисене тăватпăр та унтан вара шыракан тӳрĕ линие çăмăллăнах тупатпăр. Тĕслĕх кăтартăпăр.

135. Задача. *Панă икĕ O тата O_1 çавракăшсене касса каякан тӳрĕ лини тăвăр, анчах та, касса каякан тӳрĕ линин çавракăшсем ăшĕнчи татăкĕсем панă a тата a_1 татăксемпе пĕртан пулччăр.*

Пĕр условие çеç, тĕслĕхрен, касса каякан тӳрĕ линин O çавракăш ăшĕнче выртакан татăкĕ панă a татăкпа пĕртан пулмалли условие çеç илсен, вара касса каякан тӳрĕ линисем шутсăр пулаççĕ, вĕсем пурте центртан пĕртанах аякра тăраççĕ (мĕншĕн тесен пĕртан хордăсем пурте центртан пĕртанах аякра тăраççĕ). Çавăнпа та, O çавракăшра a татăкпа пĕртан хорда тусан, унтан çак хордăпа центр хушшине радиус туса O çавракăшпа пулăшакан концентрически çавракăш çырса çаврăнăпăр та вара маларах каланă касакан пур тӳрĕ линисем те çак çавракăша сĕртĕнекен линисем пулмалла. Çакăн пек майпах, иккĕмĕш условие хăйне пĕччен çеç шута илсен, эпир шыракан касакан лини пулăшакан иккĕмĕш O_1 çавракăшпа концентрически çавракăшăн сĕртĕнекен линийĕ пулнине куратпăр. Çапла ĕнтĕ, пĕтĕм ыйту та икĕ ункăн пĕрлехи сĕртĕнекен линине тăвасси çеç пулать.

УПРАЖНЕНИСЕМ.

Геометриллĕ вырăнсене тупăр:

1. Точăксем тупăр: çак точкăсенчен панă çавракăш патне тунă сĕртĕнекен линисем панă татăкпа пĕртан пулччăр.

2. Панă çавракăш панă кĕтеспе курăнакан точкăсен геометриллĕ вырăнне тупăр (урăхла каласан, тупнă точкăсенчен панă çавракăш патне тунă икĕ сĕртĕнекен лини пĕр-пĕрин хушшинче панă кĕтесе туччăр).

3. Панă радиуспа çырса тухнă тата панă тўрĕ лини çине сĕртĕнекен çавракăшсен центрĕсен вырăнне тупăр.

4. Панă радиуспа çырса тухнă тата панă çавракăша сĕртĕнекен çавракăшсен центрĕсене тупăр (икĕ тĕслĕх: шалтан сĕртĕнни тата тулашĕнчен сĕртĕнни).

5. Тўрĕ линин панă вăрăмăшлĕ татăкĕ хăйпе параллельлĕ хускалнă чухне унăн пĕр вĕçĕ çавракăш тăрăх шуса пырать. Татăкăн тепĕр вĕçĕ çырса тухнă геометриллĕ вырăна тупăр.

Асăрхаттарни. Хускалакан тўрĕ линин икĕ положенине кăтартакан икĕ тўрĕ линие илĕпĕр те унăн çавракăш çинче выртакан вĕçĕсенчен радиуссем тăвăпăр; тепĕр вĕçĕсенчен çак радиуссемпе параллельлĕ тўрĕ линисем тăвăпăр, вĕсене центр витĕр тухса каякан тата хускалакан линипе параллельлĕ лини урлă каçиччен тăсăпăр. Вара пулнă параллелограмсене пăхса тухăпăр.

6. Панă вăрăмăшлĕ татăкăн вĕçĕсем тўрĕ кĕтесĕн енĕсем тăрăх шăвăнаççĕ. Çак татăкăн варрийĕ çырса тухакан геометриллĕ вырăна тупăр.

Теоремăсен доказательствисене тупăр.

7. Панă çавракăш ăшĕнче выртакан A точка урлă каякан диаметрпа перпендикулярлă выртаканни чи кĕске хорда пулать.

8. AB хорда çинче çак хордăн C варринчен пĕртанах аякра тăракан D тата E икĕ точка илнĕ те, çак точкăсем урлă AB тўрĕ лини çине DF тата EG перпендикулярсем лартса, вĕсене çавракăшпа пĕрлешиччен тăснă. Çак перпендикулярсем пĕртаннине кăтартса парăр.

Асăрхаттарни. Чертежа диаметр тăрăх хутламалла.

9. Çавракăш ăшне AB диаметрпа перпендикулярлă CC' тата DD' икĕ хорда тунă. CD тата $C'D'$ хордăсен варрисене пĕрлештерекен MM' тўрĕ лини AB тўрĕ линипе перпендикулярлă пулнине кăтартса парăр.

10. O центрлă çавракăш ăшне AB хорда тунă та ăна, радиуспа пĕртан пуличчен, BC тăршшĕ тăснă. C точка тата O центр урлă çавракăша касакан CD тўрĕ лини тунă (D—çавракăша касса каякан иккĕмĕш точка). AOD кĕтес виçĕ хут ўстернĕ ACD кĕтеспе пĕртаннине кăтартса парăр.

11. Çавракăш центрĕ урлă тата ум тулашĕнчи точка урлă касакан тўрĕ лини хывсан, вара çак точкăпа çавракăш урлă çывăхарах каçакан точка хушши чи кĕске хушă, панă точкăпа çавракăш урлă каçакан тепĕр точка хушши — чи вăрăм хушă пулать.

12. Пĕр-пĕрин тулашĕнче выртакан икĕ çавракăш хушшинчи чи кĕске хушă вăл—центрсен линийĕ çинчи çавракăшсен хушшинчи татăк пулать.

13. Икĕ çавракăш пĕр-пĕрин урлă каçса каякан точка урлă çавракăша касакан линисене тусан, вĕсене çавракăш тулашне илсе тухмасан, вĕсенчен чи вăрăмми вара центрсен линийĕпе параллельлĕ выртаканни пулать.

14. Пĕр-пĕрне тулашĕнчен сĕртĕнекен икĕ çавракăша виçĕ пĕрлехи сĕртĕнекен линисем тусан, вĕсенчен шалти вара тулашĕнчен сĕртĕннин точкисем хушшинчи татăксене кашнинех çурмаран пайлать.

15. Çавракăшăн A точки урлă AB хорда тата унтан B точка урлă сĕртĕнекен лини хывнă. OA радиуспа перпендикулярлă диаметр сĕртĕнекен линипе хорда (е унăн малалла тăснă пайĕ) урлă тивĕçлĕ C тата D точкăсем урлă каçса каять. $BC=CD$ пулнине кăтартса парăр.

16. Пĕр-пĕрне тулашĕнчен A точкăра сĕртĕнекен O тата O_1 центрлă икĕ çавракăш çумне тулашĕнчен иккĕшне те сĕртĕнекен лини BC тунă (B тата C сĕртĕнў точкисем); BAC кĕтес тўрĕ кĕтес пулнине кăтартса парăр.

Асăрхаттарни. A точка урлă пĕрлехи сĕртĕнекен лини тăвăр та танаклă ABD тата ADC треугольниксене пăхса тухăр.

17. Икĕ тўрĕ лини пĕр M точкăранах тухаççĕ те çавракăша A тата B точкăсенче сĕртĕнеççĕ. OB радиус тăвăр та ăна B точка тепĕр енне $BC = OB$ чухлĕ малалла тăсăр. Вара $\angle AMC = 3 \angle BMC$ пулнине кăтартса парăр.

18. Пĕр M точкăран тухакан икĕ тўрĕ лини çавракăша A тата B точкăсенче сĕртĕнеççĕ. A тата B точкăсемпе чикĕленсе тăракан икĕ пĕкĕрен пĕчĕкки çинче пĕр C точка илеççĕ те ун урлă виççĕмĕш сĕртĕнекен лини хывса ăна MA тата MB тўрĕ линисем çинчи D тата E точкăсенче пĕрлешиччен малалла тăсаççĕ. C точкăн вырăнне улăштарнă чух: 1) $\triangle MDE$ периметрĕ тата 2) DOE кĕтес улшăнманнине кăтартса парăр.

Асăрхаттарни. DME периметрĕ $= MA + MB$,

$$\angle DOE = \frac{1}{2} \angle AOB.$$

19. Икĕ пĕртан çавракăшăн центрĕсене пĕрлештерекен OO' тӳрĕ линипе параллельлĕ касакан тӳрĕ лини хывнă; çак тӳрĕ лини O çавракăша A тата B точкăсенче, O' çавракăша A' тата B' точкăсенче касса каять. $AA' = BB' = OO'$ пулнине кăтартса парăр.

Чертеж тумалли задачăсем.

20. Панă пĕкке 4, 8, 16,... пĕртан пайсене пайлăр.

21. Пĕр радиуспах çырнă пĕкĕсен сумми тата разноçĕ тăрăх çак пĕкĕсене тупăр.

22. Центрне панă точкăра туса, панă çавракăша çурмаран пайлакан çавракăш çырса çаврăнăр.

23. Панă тӳрĕ лини çинче панă çавракăшран чи çывăхра тăракан точкăна тупăр.

24. Çавракăшра хорда панă. Çак хордăпа çурмаран пайланакан тата унпа панă кĕтесе тăвакан тепĕр хорда тăвăр (панă кĕтес кирек епле пулсан та задачăна шутлама май килет-и?).

25. Çавракăш ăшĕнче панă точка урлă хорда тăвăр та çак точка хордăна çурмаран пайлатăр.

26. Кĕтесĕн пĕр енĕ çинчи панă точкăран çавракăш çырса çаврăнăр та, вăл вара тепĕр енĕ çинче панă вăрăмăш хорда татса илтĕр.

27. Центрне панă кĕтесĕн енĕ çинче выртмалла туса, панă радиуспа çавракăш çырса çаврăнăр та вăл вара тепĕр енĕ çинче панă вăрăмăш хорда татса илтĕр.

28. Панă радиуспа панă тӳрĕ линие панă точкăра сĕртĕнекен çавракăш çырса çаврăнăр.

29. Панă çавракăша сĕртĕнекен тата панă тӳрĕ линипе параллельлĕ лини тăвăр.

30. Панă A точка урлă каякан тата панă тӳрĕ линие панă B точкăра сĕртĕнекен çавракăш çырса çаврăнăр.

31. Панă кĕтесĕн енĕсене сĕртĕнекен тата вĕсенчен пĕрне панă точкăра сĕртĕнекен çавракăш çырса çаврăнăр.

32. Пĕр-пĕринпе параллельлĕ икĕ лини хушшинче точка панă; çак точка урлă каякан тата панă тӳрĕ линисене сĕртĕнекен çавракăш çырса çаврăнăр.

33. Панă çавракăша сĕртĕнекен тата панă тӳрĕ линипе панă кĕтес тăвакан линие тăвăр (миçе ответ пулать?).

34. Тулашĕнче панă точкăран çавракăша касакан лини тăвăр та унăн çаврашка ăшĕнчи пайĕ панă татăкпа пĕртан пултăр (задачăна тĕпчесе пăхăр).

35. Панă радиуспа панă точка урлă каякан тата панă тӳрĕ линие сĕртĕнекен çавракăш çырса çаврăнăр.

36. Панă тӳрĕ лини çинче точка тупăр; çак точкăран пуçланакан панă çавракăша сĕртĕнекен тӳрĕ линисем панă вăрăмăш пулччăр.

37. Пĕр кĕтесне тата икĕ çӳллĕшне пĕлни тăрăх треугольник тăвăр; çӳллĕшĕсенчен пĕрне панă кĕтесрен тунă.

38. Икĕ точка панă, тӳрĕ лини тăвăр; панă точкăсенчен çак тӳрĕ лини çине антарнă перпендикулярсем панă вăрăмăш пулччăр.

39. Панă точка урлă каякан тата панă çавракăша панă точкăра сĕртĕнекен çавракăш çырса çаврăнар.

40. Пĕр-пĕрне параллельлĕ икĕ линипе тата çак параллельлĕ линисем хушшинчи çавракăша сĕртĕнекен çавракăш çырса çаврăнăр.

41. Панă радиуспа панă çавракăша сĕртĕнекен тата панă точка витĕр каякан çавракăш çырса çаврăнăр [виçĕ тĕслĕх пăхса тухăр; панă точка: 1) çаврашка тулашĕнче, 2) çавракăш çинче тата 3) çаврашка ăшĕнче выртать].

42. Панă радиуспа панă тӳрĕ линие тата панă çаврашкана сĕртĕнекен çавракăш çырса çаврăнăр.

43. Панă радиуспа çавракăш çырса çаврăнăр; çак çавракăш панă кĕтесĕн енĕсенчен панă вăрăмăш хордăсем татса илтĕр.

44. Панă çаврашкапа панă точкăра сĕртĕнекен тата панă тӳрĕ линие сĕртĕнекен çавракăш çырса çаврăнăр (икĕ ответ).

45. Панă тӳрĕ линие панă точкăра сĕртĕнекен тата панă çаврашкана сĕртĕнекен çавракăш çырса çаврăнăр (икĕ ответ).

46. Панă икĕ çаврашкана сĕртĕнекен, вĕсенчен пĕрне панă точкăра сĕртĕнекен çавракăш çырса çаврăнăр [виçĕ тĕслĕх пăхса тухăр: 1) тупмалли çаврашка панă çаврашкасен тулашĕнче; 2) панă çаврашкасенчен пĕрийĕ тупмалли çаврашка тулашĕнче, тепри унăн ăшĕнче; 3) панă çаврашкасем иккĕшĕ те тупмалли çаврашка ăшĕнче].

47. Виçĕ пĕртан çаврашкана шал енчен е тулашĕнчен сĕртĕнекен çавракăш çырса çаврăнăр.

48. Панă сектор ăшне, сектора чикĕлесе тăракан радиуссене тата секторăн пĕккине сĕртĕнекен çавракăш çырса çаврăнăр.

49. Панă çаврашка ăшне виçĕ пĕртан çаврашка çырса тухăр та, вĕсем мăшăршарăн пĕр-пĕрне тата панă çаврашкана сĕртĕнекен пулччăр.

50. Çаврашка ăшĕнче панă точка урлă хорда тăвăр та унăн татăкĕсен разноçĕ панă татăкпа пĕртан пултăр.

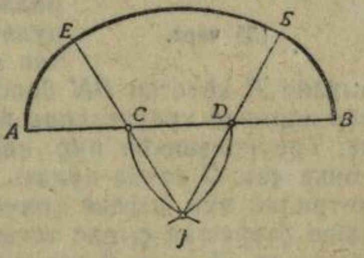
Асăрхаттарни. Панă çавракăшпа концентрически çавракăш тăвăр, вăл панă точка урлă кайтăр. Çак çавракăшра панă точкăран панă вăрăмăш хорда тăвăр.

51. Икĕ çавракăш пĕр-пĕрин урлă каçса каякан точка урлă касакан лини тăвăр та, унăн çавракăшсем ăшĕнчи пайĕ панă вăрăмăшпе пĕртан пултăр.

Асăрхаттарни. Тӳркĕтеслĕ треугольник тăвăр, унăн гипотенузи панă çавракăшсен центрĕсене пĕрлештерекен татăк, катечĕ панă татăкăн çуррийĕпе пĕртан пултăр т. ыт. те.

52. Çаврашка тулашĕнче панă точкăран касакан тӳрĕ лини тăвăр та унăн тулашĕнчи пайĕ шалти пайĕпе пĕртан пултăр.

Асăрхаттарни. Калăпăр O—çавракăшăн центрĕ, R—унăн радиусĕ, A—панă точка. $\triangle AOB$ тăвăпăр та, кунта вара $AB=R$, $OB=2R$. C точка OB татăкăн варрийĕ пулсан, вара AC—тупмалли тӳрĕ лини пулать.



154 черт.

53. Панă тӳрĕ линипе панă точкăран сопряжени пулакан (116 §) тата çак панă точка урлă каякан пĕкке тăвăр.

54. Параллельлĕ мар икĕ тӳрĕ линие сопряженилле линипе тата пĕкĕпе пĕрлештерĕр (116 §). Виçĕ тĕслĕхе пăхса тухăр:

1) сопряжени точкине тата пĕкĕ радиусне паман пулсан;

2) пĕккĕн радиусне çеç панă пулсан;

3) сопряжени точкине çеç панă, радиусне паман пулсан (тӳрĕ линипе пĕкĕсем пĕрлешнин çакăн пек тĕслĕхĕсем чугун çул кукăрăлнисем пулаççĕ).

55. Архитектурăра „виçĕ центрлă кукăр линин“ (е „çуроваллă кукăр линин“) чертежне çакăн пек тăваççĕ (154 черт.): AB татăка C тата D точкăсенче виçĕ пĕртан пая пайлаççĕ; CD татăкпа пĕртан радиуспа, çак точкăсене центрсем туса J точкăра пĕкĕсем паллă тăваççĕ; унтан JC тата JD тӳрĕ линисене тăваççĕ те вĕсене малалла тăсаççĕ; вара C тата D центрсенчен AE тата BF пĕкĕсене тата J центртан EF пĕкке çырса тухаççĕ. AE, EF тата FB пĕкĕсем мĕншĕн сопряжениленнине ăнлантарса парăр. AC татăк DB татăкпа пĕртан, анчах CD татăкпа пĕртан мар пулнă пулсан, вĕсем сопряжениленнĕ пулĕччĕç-ши?

VI. ШАЛА ÇЫРНĂ ТАТА ТУЛАШНЕ ÇЫРНĂ МНОГОУГОЛЬНИКСЕМ.

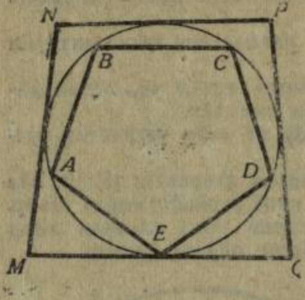
136. Определени. $ABCDE$ многоугольникĕн пур кĕтес тăррисем те (155 черт.) çавракăш çинче выртаççĕ пулсан, вара çак многоугольнике **çавракăш ăшне çырнă**, е çавракăша **ун тавра çырса çаврăннă** теççĕ.

Кирек епле те пулин многоугольникĕн (155 черт. $MNPQ$) пур енĕсем те çавракăша сĕртĕнсе тăраççĕ пулсан, вара многоугольнике **çавракăш тавра çырнă**, е çавракăша **ун ăшне çырнă** теççĕ.

137. Теоремăсем: 1) ***Кирек епле треугольник тавра та çавракăш тата пĕр çавракăш çеç çырса çаврăнма пулать.***

2) ***Кирек епле треугольник ăшне те çавракăш тата пĕр çавракăш çеç çырса çаврăнма пулать.***

1) Кирек епле треугольникĕн те *A*, *B* тата *C* тăррисем пĕр тӳрĕ лини çинче выртман виçĕ точкăсем пулаççĕ; çакнашкал точкăсем урлă яланах çавракăш тата пĕр çавракăш çеç çырма пулнине эпир малтах куртăмăр (104 §).



155 черт.

2) *ABC* треугольникĕн (156 черт.) пур енĕсене те сĕртĕнекен çавракăш пулма пултарсан, унăн центрĕ вара треугольникĕн пур енĕсенчен те пĕртанах аякра тăмалла. Халĕ ĕнтĕ çакăн пек точка пуррине кăтартса парăпăр. *AB* тата *AC* енсенчен пĕртанах аякра тăракан точкăсен геометриллĕ вырăнĕ *A* кĕтесĕн *AM* биссектриси пулать (60 §); *BA* тата *BC* енсенчен пĕртан аякра тăракан точкăсен геометриллĕ вырăнĕ *B* кĕтесĕн *BN* биссектриси пулать. Çак икĕ биссектриса пĕр-пĕринпе треугольник ăшĕнче, пĕр-пĕр *O* точкăра пĕрлешмелле. Треугольникĕн пур енĕсенчен те пĕртанах аякра тăракан точка çак *O* точка пулать те ĕнтĕ; мĕншĕн тесен çак точка геометриллĕ икĕ вырăнĕ çинче те выртать. Çапла ĕнтĕ, треугольник ăшне çаврашка çырас тесен, унăн мĕнле те пулин икĕ кĕтесне, сăмахран, *A* тата *B* кĕтессене, çурмаран пайлăпăр та, вара биссектрисăсем пĕр-пĕринпе пĕрлешнĕ точкăна центр тăвăпăр. Радиус вырăнне центртан треугольникăн пĕр-пĕр енĕ çине антарнă перпендикулярăн, сăмахран, *OP* е *OQ* е *OR* перпендикулярăн вăрăмăшне илĕпĕр. Çавракăш енсене *P*, *Q* тата *R* точкăсенче сĕртĕнет, мĕншĕн тесен енĕсем çак точкăсенче радиуссен çавракăш çинче выртакан вĕçĕсемпе перпендикулярлă пулаççĕ (113 §). Шала çырнă урăх çавракăш пулма пултараймасть, мĕншĕн тесен икĕ биссектриса пĕр-пĕринпе пĕр точкăра çеç пĕрлешме пултараççĕ тата пĕр точкăран тӳрĕ лини çине пĕр перпендикуляр çеç антарма пулать.

Асăрхаттарни. Тулашне çырнă çавракăшăн центрĕ треугольник шĕвĕр кĕтеслĕ пулсан çеç унăн ăшĕнче пулнине вĕренекенсем хăйсем кăтартса ăнлантарччăр; пуклак кĕтеслĕ треугольникре вăл унăн тулашĕнче, тӳркĕтеслĕ треугольникре гипотенуза варринче пулать. Шала çырнă çавракăшăн центрĕ яланах треугольник ăшĕнче пулать

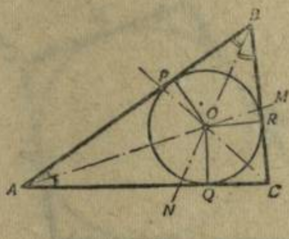
Следстви. *O* точка (156 черт.), *CA* тата *CB* енсенчен пĕртанах аякра тăраканскер, *C* кĕтесĕн биссектриси çинче пулмалла; апла пулсан, *треугольникĕн виçĕ кĕтесĕн биссектрисисем пĕр-пĕрне пĕр точкăра касса каяççĕ.*

138. Тулаш енне çырнă çавракăшсем. Тулаш енне çырнă çавракăшсем тесе (157 черт.) треугольникĕн пĕр енне тата тепĕр икĕ енĕн малалла тăснă пайĕсене сĕртĕнекен çавракăшсене калаççĕ (вĕсем треугольникĕн тулашĕнче выртаççĕ, çавăн пирки те вĕсене **тулаш енне çырнă** çавракăшсем теççĕ). Çакнашкал çавракăшсем кашни треугольникĕн виççĕ пулма пултараççĕ. Çакăн пек çавракăшсене тăвас тесен, ABC треугольникĕн тулашĕнчи кĕтесĕсен биссектрисисене тăваççĕ те вĕсем пĕр-пĕринпе пĕрлешнĕ точка вара çавракăш центрĕ пулать. Çапла ĕнтĕ, A кĕтесĕн тулашне çырнă çавракăшăн центрĕ O точка пулать, урăхла каласан, A кĕтеспе юнашар мар, тулашĕнчи кĕтессен BO тата CO биссектрисисем пĕр-пĕрне касса каякан точка пулать; çак çавракăшăн радиусĕ O точкăран треугольникĕн кирек епле те пулин енĕ çине антарнă перпендикуляр пулать.

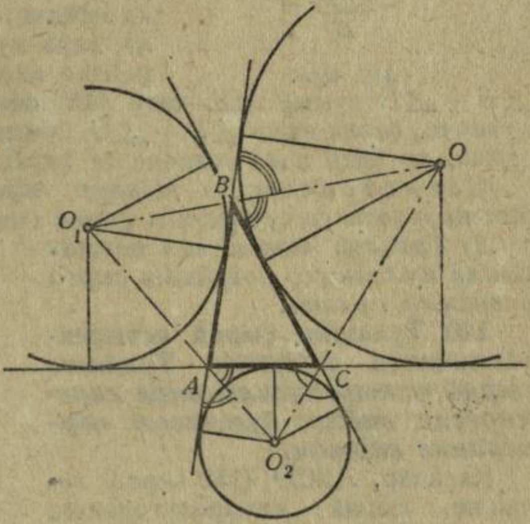
139. Шала çырнă мăкăр четырехугольникĕн свойствисем.

1) ***Шала çырнă мăкăр четырехугольникре хире-хирĕçле выртакан икĕ кĕтесĕн сумми икĕ тӳрĕ кĕтеспе пĕртан.***

2) Тӳртĕн: ***мăкăр четырехугольникре хире-хирĕçле выртакан икĕ кĕтесĕн сумми икĕ тӳрĕ кĕтеспе пĕртан пулсан, ун тавра çавракăш çырса çавăрнма май пур.***



156 черт.



157 черт.

1) Калăпăр $ABCD$ (158 черт.) шала çырнă мăкăр четырехугольник; кăтартса памалла:

$$\angle A + \angle D = 2d \text{ тата } \angle A + \angle C = 2d.$$

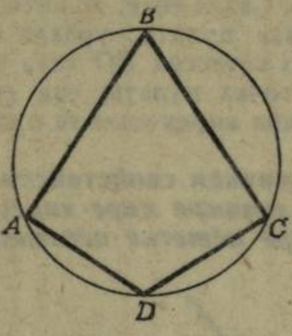
Анчах та, кирек епле мăкăр четырехугольникре те тăватă кĕтесĕн сумми $4d$ пулнă пирки (82 §), кирлĕ пĕртанлăхсенчен пĕрне кăтартса парсан та çителĕклĕ.

Тĕслĕхрен, $\angle B + \angle D = 2d$ пĕртанлăхăн доказательствине тăвăпăр.

B тата D кĕтессем, шала çырнă кĕтессем пулнă пирки, пĕрремĕшĕ ADC пĕккĕн çуррийĕпе; тепри—ABC пĕккĕн çуррийĕпе виçĕнеççĕ; çапла ĕнтĕ, $\angle B + \angle D$ сумма $\frac{1}{2} \smile ADC + \frac{1}{2} \smile ABC$ суммăпа виçĕнĕт, ку сумма шăпах $\frac{1}{2}$ $(\smile ADC + \smile ABC)$ суммăпа пĕртан, урăхла каласан, çавракăш çуррийĕпе пĕртан; çапла вара:

$$\angle B + \angle D = 2d = 180^\circ.$$

2) Калăпăр *ABCD* (158 черт.) мăкăр четырехугольник, унăн $\angle B+\angle D=2d$ тейĕпĕр, çавăнпа та ĕнтĕ, $\angle A+\angle C=2d$ пулмалла. Халĕ ĕнтĕ çак четырехугольник тавра çавракăш çырса çавăрма май пуррине кăтартса памалла.



158 черт.

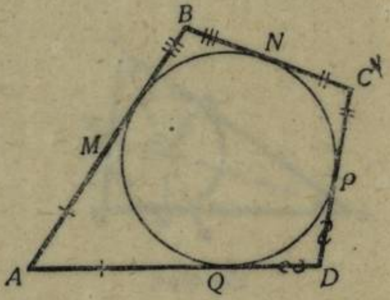
Унăн кирек епле те пулин виçĕ тăррийĕ урлă, сăмахран, *A*, *B* тата *C* тăррисем урлă, çавракăш çырса çаврăнăпăр (çакна тума яланах май пур). Тăваттăмĕш *D* тăррийĕ те çак çавракăш çинчех пулмалла, мĕншĕн тесен унсăрăн *D* кĕтесĕн тăррийĕ е çаврашка ăшĕнче, е унăн тулашĕнче пулмалла, вара ку кĕтес *ABC* пĕккĕн çуррийĕпе виçĕнмен пулĕччĕ; çавăнпа та $\angle B+\angle D$ сумма *ADC* тата *ABC* пĕкĕсен çурсуммипе виçĕнмен пулĕччĕ, çапла вара $\angle B+\angle D$ сумма $2d$-пе пĕртан пулман пулĕччĕ, ку ĕнтĕ панă условие те хирĕçленĕ пулĕччĕ.

Следствисем. 1) *Мĕнпур параллелограмсенчен тӳркĕтесли тавра çеç çавракăш çырса çаврăнма пулать.*

2) *Трапеци тавра вăл пĕртан аяклă пулсан çеç çавракăш çырса çаврăнма пулать.*

140. Тулашне çырнă четырехугольникĕн свойстви. ***Тулашне çырнă четырехугольникре хире-хирĕçле енĕсен суммисем пĕр-пĕринпе пĕртан.***

Калăпăр, *ABCD* (159 черт.) тулашне çырнă четырехугольник, урăхла каласан, унăн енĕсем çавракăшпа сĕртĕнсе тăраççĕ; халĕ ĕнтĕ $AB+CD=BC+AD$ тĕрĕссине кăтартса памалла.



159 черт.

Сĕртĕнӳ точкисене *M*, *N*, *P* тата *Q* саспаллисемпе паллă тăватпăр. Анчах та пĕр точкăран çавракăш патнелле тунă сĕртĕнекен икĕ лини яланах пĕр-пĕринпе пĕртан, çавăнпа та $AM=AQ$, $BM=BN$, $CN=CP$, $DP=DQ$.

Çапла ĕнтĕ,

$$AM+MB+CP+PD=AQ+QD+BN+NC,$$

урăхла каласан,

$$AB+CD=AD+BC.$$

VII. ТРЕУГОЛЬНИКРИ ПИТĔ ПАЛЛĂ ТĂВАТĂ ТОЧКА.

141. Маларах эпир акă мĕн куртăмăр:

1) *треугольникĕн енĕсем варри витĕр лартнă виçĕ перпендикуляр пĕр точкăра пĕрлешеççĕ* (ку вара тулашне çырнă çавракăшăн центрĕ пулать);

2) *треугольникĕн кĕтесĕсен виçĕ биссектриси пĕр точкăра пĕрлешеççĕ* (ку вара шала çырнă çавракăшăн центрĕ пулать).

Тата çак икĕ теорема треугольникри тепĕр икĕ паллă точкăна кăтартса параççĕ: 3) виçĕ çӳллĕшĕ пĕр-пĕрне касса кайнă точкăна тата 4) виçĕ медиана пĕр-пĕрне касса кайнă точкăна.

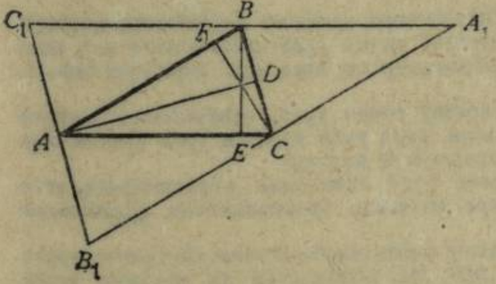
142. Теорема. *Треугольникĕн виçĕ çӳллĕшĕ пĕр точкăра пĕр-пĕрне касса каяççĕ.*

$\triangle ABC$ (160 черт.) кашни тăрри урлах, тăррипе хирĕçле енĕпе параллельлĕ тӳрĕ лини тăвăпăр. Вара пирĕн пулăшакан $\triangle A_1B_1C_1$ пулать, панă треугольникĕн тăррисем çак треугольникĕн енĕсемпе перпендикулярлă. Анчах та, $C_1B = AC = BA_1$ (параллелограмăн хире-хирĕçле енĕсем пулнă пирки), çавăнпа та вара B точка A_1C_1 енĕн варрийĕ пулать.

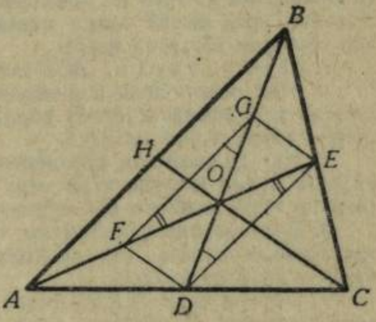
Çакăн пекех, C точка B_1A_1 енĕн варрийĕ, A точка B_1C_1 енĕн варрийĕ пулнине тĕрĕслесе курма пултаратпăр. Çапла ĕнтĕ, AD, BE тата CF çӳллĕшĕсем $\triangle A_1B_1C_1$ енĕсене перпендикулярлă тата вĕсен варрийĕ урлă каяççĕ, кунашкал перпендикулярсем пĕр точкăра пĕр-пĕрне касса кайнине эпир пĕлетпĕр (104 §).

Асăрхаттарни. Треугольникĕн çӳллĕшĕсем пĕр-пĕринпе пĕрлешекен точкăна унăн **ортоцентрĕ** теççĕ.

143. Теорема. *Треугольникĕн виçĕ медиани пĕр-пĕрне пĕр точкăра касса каяççĕ; çак точка кашни медианăранах, килĕшӳллĕ енĕнчен шутласан, виççĕмĕш пайне татса илет.*



160 черт.



161 черт.

$\triangle ABC$ (161 черт.) мĕнле те пулин икĕ медианăна, тĕслĕхрен, AE тата BD медианăсене, O точкăра пĕр-пĕрне касса каяканскерсене, илĕпĕр те вара:

$$OD = \frac{1}{3} BD \quad \text{тата} \quad OE = \frac{1}{3} AE$$

пулнине кăтартса парăпăр.

Çакна тăвас тесе, малтан OA тата OB татăксене F тата G точкăсенче çурмаран пайласа $DEGF$ четырехугольник тăвăпăр. Анчах та, DE татăк тата $\triangle ABC$ икĕ енĕн варрисене те пĕрлештерет, çавăнпа та $FG \parallel AB$ тата $DE = \frac{1}{2} AB$. Çакăнтан акă мĕнле вывод тăватпăр: $DE \parallel FG$ тата $DE = FG$; çапла вара, $DEGF$ четырехугольник параллелограм пулать (89 §), çавăнпа та, $OF = OE$ тата $OG = OD$. Çакăнтан акă мĕнле пулать:

$$OE = \frac{1}{3} AE \quad \text{тата} \quad OD = \frac{1}{3} BD.$$

Халĕ ĕнтĕ AE е BD медианăпа пĕрле виççĕмĕш медианăна илĕпĕр те, вĕсем те пĕр-пĕрне касса каякан точка, тĕпĕнчен шутласан, кашнинченех $\frac{1}{3}$ пайне татнине куратпăр; вара виççĕмĕш медиана та AE тата BM медианăсемпе O точкăрах пĕр-пĕрне касса каймалла.

Физикăра треугольникĕн медианисем пĕр-пĕрне касса каякан точкăна, **треугольникĕн йывăрăш центрĕ** теççĕ; вăл яланах треугольник ăшĕнче пулать.

УПРАЖНЕНИСЕМ.

Геометриллĕ вырăнсен е тупăр:

1. Панă A точкăран тепĕр панă B точка урлă каякан тӳрĕ линисем çине антарнă перпендикулярсен тĕпĕсенне.

2. Çавракăш ăшĕнче панă точка урлă тунă хордăсен варрисенне.

Теоремăсен доказательствисене тупăр:

3. Икĕ çавракăш пĕр-пĕрне сĕртĕнеççĕ пулсан, вара сĕртĕнӳ точки урла хывнă çавракăшсене касакан кирек епле тӳрĕ лини те çавракăшсенчен хирехирĕçле пĕртан градуссемлĕ пĕкĕсемех касса илет.

4. Пĕр çавракăшра икĕ пĕртан хорда пĕр-пĕрне касса каяççĕ пулсан, вĕсен килĕшӳллĕ татăкĕсем пĕртан пулаççĕ.

5. Икĕ çавракăш пĕр-пĕрне A тата B точкăсенче касса каяççĕ; A точкăран çавракăшсене C тата D точкăсенче касса каякан тӳрĕ лини хывнă; CBD кĕтес A точка урлă хывнă касса каякан кирек епле тӳрĕ линишĕн те улшăнман хисеп пулнине кăтартса парăр.

Асăрхаттарни. ACB тата ADB кĕтессем улшăнми пысăкăшсем пулаççĕ.

6. Икĕ çавракăшăн пĕр-пĕринпе сĕртĕнӳ точки урлă касса каякан икĕ лини хывсан тата вĕсен вĕçĕсене хордăпа пĕрлештерсен, вара çак хордăсем пĕр-пĕринпе параллельлĕ пулаççĕ.

7. Икĕ çавракăшăн пĕр-пĕринпе сĕртĕнӳ точки урлă, çавракăшсем ăшĕнче епле те пулин касакан тӳрĕ лини хывсан, вара унăн вĕçĕсем урлă каякан сĕртĕнекен тӳрĕ линисем пĕр-пĕринпе параллельлĕ пулаççĕ.

8. Треугольник çӳллĕшĕсен тĕпĕсене тӳрĕ линисемпе пĕрлештерсен, çĕнĕ треугольник пулать, çак треугольникре малтанхи треугольникĕн çӳллĕшĕсем биссектрисăсем пулаççĕ.

9. Пĕртан енлĕ $\triangle ABC$ таврă тулашне çырса çаврăннă çавракăш çинче кирек епле те пулин M точкăна илнĕ; MA, MB, MC татăксенчен чи вăрăмми тепĕр икĕ татăкăн суммипе пĕртаннине кăтартса парăр.

10. P точкăран çавракăш патнелле сĕртĕнекен икĕ лини PA тата PB хывнă, B точкăран BC диаметр тунă. CA тата OP тӳрĕ линисем пĕр-пĕринпе параллельлĕ пулнине кăтартса парăр (O — çавракăш центрĕ).

11. Икĕ çавракăш пĕр-пĕрин урлă каçса каякан точкăсенчен пĕрин урлă икĕ çавракăшĕнче те диаметр тăвăр. Вара çак диаметрсен вĕçĕсене пĕрлештерекен тӳрĕ лини çавракăшсем пĕр-пĕрин урлă каçса каякан тепĕр точки урлă выртнине кăтартса парăр.

12. AB диаметр тата AC хорда 30° кĕтес тăваççĕ. C точка урлă AB тӳрĕ линин малалли панĕ урлă D точкăра каçса каякан сĕртĕнекен лини хывнă. ACD пĕртан аяклă треугольник пулнине кăтартса парăр.

13. Треугольник тавра çавракăш çырса çаврăнсан тата çавракăш çинчи кирек епле те пулин точкăран треугольникăн енĕсем çине перпендикулярсем антарсан, вĕсен тĕпĕсем пурте пĕр тӳрĕ лини çинче выртаççĕ (Симпсонăн тӳрĕ линийĕ).

Асăрхаттарни. Доказательствине шала çырнă кĕтессен (124 §) тата шала çырнă четырехугольникăн (139 §) свойствисемпе усă курса тумалла.

Чертеж тумалли задачăсем.

14. Панă вĕçĕмсĕр тӳрĕ лини çинче точка тупăр та, çак точкăран пăхсан, панă тӳрĕ лини панă кĕтеспе курăнтăр.

15. Тĕпĕ, тăррийĕнчи кĕтесĕ тата çӳллĕшĕ тăрăх треугольник тăвăр.

16. Панă секторлă пĕкке сĕртĕнекен тӳрĕ лини тăвăр; çак тӳрĕ линин (сектора чикĕлесе тăракан) радиуссен малалли пайĕсем хушшинчи татăкĕ панă татăкпа пĕртан пултăр (ку задачăна малтараххи çине куçарăр).

17. Тĕпĕ, тăрринчи кĕтесĕ тата тĕпĕ çине тунă медиана тăрăх треугольник тăвăр.

18. Хисепĕсене те тата мĕнле выртнисене те кăтартса икĕ татăк a тата b панă. Точка тупăр, çак точкăран a татăк панă α кĕтеспе, b татăк панă β кĕтеспе курăнтăр.

19. Треугольникре точка тупăр та çак точкăран пăхсан, унăн виçĕ енĕ те пĕртан кĕтеспех курăнтăр.

Асăрхаттарни. Çак кĕтессенчен кашниех $^4/_3d$ пулмаллине ăраснах асра тытăр.

20. Тăрринчи кĕтесĕ, çӳллĕшĕ тата тĕпĕ çине тунă медиана тăрăх треугольник тăвăр.

Асăрхаттарни. Медианăна панă чухлĕ малалла (тĕпĕ тепĕр еннелле) тăссан, вара çĕнĕрен тупăннă точкăна тĕпĕн вĕçĕсемпе пĕрлештерĕр те, çакăн пек майпа тунă параллелограма пăхса тухăр.

21. Панă тĕпĕ, ун çумĕнчи кĕтес тата панă кĕтес тăрринчен хывнă медианăпа панă кĕтесе хирĕç енĕ тăвакан кĕтес тăрăх треугольник тăвăр.

22. Икĕ диагональ тата пĕр кĕтес тăрăх параллелограм тăвăр.

23. Тĕпĕ, тăрринчи кĕтесĕ тата тепĕр икĕ енĕн сумми е разноçĕ тăрăх треугольник тăвăр.

24. Икĕ диагональ, юнашар икĕ енĕ тата тепĕр икĕ енĕ тăвакан кĕтес тăрăх четырехугольник тăвăр.

25. A, B тата C виçĕ точка панă. A урлă тӳрĕ лини хывăр та, вара çак тӳрĕ лини çине B тата C точкăсенчен антарнă перпендикулярсен хушши панă татăкпа пĕртан пулччăр.

26. Панă çаврашка ăшне треугольник çырăр; çак треугольникăн икĕ кĕтесне панă.

27. Панă çаврашка тавра, панă икĕ кĕтес тăрăх, треугольник çырăр.

28. Тула çырнă çаврашкан радиусĕ, тăрринчи кĕтесĕ тата çӳллĕшĕ тăрăх треугольник çырăр.

29. Панă çаврашка ăшне икĕ енĕн сумми тата çак енсенчен пĕрне хирĕçле выртакан кĕтес тăрăх треугольник çырăр.

30. Панă çаврашка ăшне панă енĕ тата çак енĕ çумĕнче мар выртакан икĕ кĕтес тăрăх четырехугольник çырăр.

31. Панă ромб ăшне çаврашка çырăр.

32. Тан енлĕ треугольник ăшне виçĕ çаврашка çырăр; вĕсенчен кашниех мăшăршарăн пĕр-пĕрне тата треугольникăн икĕ енне сĕртĕнччĕр.

33. Панă виçĕ енĕ тата пĕр диагоналĕ тăрăх çавракăш ăшне çырăнма пултаракан четырехугольник тăвăр.

34. Панă енĕ тата шала çырнă çаврашкан радиусĕ тăрăх ромб тăвăр.

35. Панă çаврашка тавра тануралла тӳркĕтеслĕ треугольник çырса çаврăнăр.

36. Панă тĕпĕ тата шала çырнă çаврашкан радиусĕ тăрăх тануралла треугольник тăвăр.

37. Тĕпĕ тата çак тĕпĕн вĕçĕсенчен тухакан икĕ медиана тăрăх треугольник тăвăр. 143 § асăрхаттарнине пăхăр.

38. Виçĕ медиана тăрăх треугольник тăвăр. 143 § асăрхаттарнине пăхăр.

39. Çавракăш тата ун çинче A, B тата C точкăсем панă. Çак çавракăш ăшне треугольник çырăр та унăн биссектрисисен малалла тăснă пайĕсем çавракăша A, B тата C точкăсенче тĕл пулччăр.

40. Çак задачăнах, биссектрисисем выртнне унăн çӳллĕшĕсене илсе, тăвăр.

41. Çавракăш тата ун çинче виçĕ точка M, N тата P панă; çавракăш ăшне çырнă треугольникĕн пĕр кĕтесĕнчен тунă çӳллĕшĕ, биссектриса тата медиана (вĕсен малалла тăснă пайĕсем) çак M, N тата P точкăсенче çавракăша тĕл пулаççĕ. Çак треугольника тăвăр.

42. Çавракăш çинче икĕ точка A тата B панă. Çак точкăсенчен пĕр-пĕринпе параллельлĕ икĕ хорда тăвăр. Хордăсен суммине панă.

Шутламалли задачăсем.

43. Çавракăшăн $^1/_{12}$ пайĕ çине сĕвенсе тăракан шала çырнă кĕтесе шутласа кăларăр.

44. Çаврашкана хордăпа икĕ сегмента пайланă; хорда çавракăша 5 : 7 отношенипе пайлать. Çак сегментсене шăнăçакан кĕтессене шутласа кăларăр.

45. Икĕ хорда пĕр-пĕрин урлă 36°15′32″ кĕтес туса каçса каяççĕ. Çак кĕтесĕн енĕсем тата вĕсене малалла тăснă пайĕсем хушшинчи пĕкĕçен хисепне градуспа, минутăпа тата секундăпа шутласа кăларăр. Пĕкĕсен отношенийĕ 3 : 2.

46. Пĕр точкăран çавракăш патнелле хывнă сĕртĕнекен икĕ лини хушшинчи кĕтес 25°15′. Сĕртĕнӳ точкисем хушшинчи пĕкĕсен пысăкăшне шутласа кăларăр.

47. Хорда çавракăша икĕ пая 3 : 7 отношенипе пайлать пулсан, хордăпа сĕртĕнекенни тунă кĕтесе шутласа кăларăр.

48. Икĕ пĕртан радиуслă çавракăш пĕр-пĕрин урлă $^2/_3\, d$ кĕтеспе каçса каяççĕ; пĕр-пĕрин урлă каçса кайнипе пулнă пĕкĕсенчен пĕчĕккинче миçе градус пулнине шутласа кăларăр.

Асăрхаттарни. Икĕ пĕкĕ пĕр-пĕрне касса кайнин кĕтесĕ тесе, пĕкĕсем çумне касса кайнин точки урлă тунă сĕртĕнекен линисем хушшинчи кĕтесе калаççĕ.

49. Диаметрăн пĕр вĕçĕ урлă сĕртĕнекен лини, тепĕр вĕçĕ урлă — касса каякан лини хывнă; сĕртĕнекеннипе касса каяканни пĕр-пĕринпе 20°30′ кĕтес тăваççĕ. Сĕртĕнекеннипе касса каяканни хушшинчи пĕкĕсенчен пĕчĕккине тупăр.

ВИÇÇĔМĔШ СЫПĂК.

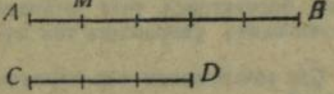
ПЕРЬЕВĔРЛĔ ФИГУРĂСЕМ.

I. ПЫСĂКĂШСЕНЕ ВИÇЕССИ ÇИНЧЕН ĂНЛАНТАРСА ПАНИ.

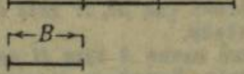
144. Татăка виçессин задачи. Ку таранччен эпир, икĕ татăка пĕр-пĕринпе танлаштарса, вĕсем пĕр-пĕринпе пĕртанни тата пĕртан мар пулсан, вĕсенчен хăшĕ пысăкраххи çинчен çеç калама пултартăмăр (6 §). Пирĕн треугольник енĕсене, кĕтесĕсене танлаштарса вĕреннĕ чухне (46, 47 §), тӳрĕ линие хуçланчăклă линипе танлаштарнă чухне (50, 51 §) тата ытти тĕслĕхсенче те (53, 54, 55 §) çакăн пек тума тĕл килчĕ. Анчах та, татăксене çакнашкал танлаштарса пăхни, татăксенчен кашни пысăкăшнех уйрăмăн кăтартса параймасть.

Халĕ ĕнтĕ эпир хамăр умма татăкăн вăрăмăшне уйрăмăн тĕрĕсрех ăнланмалли задачăна тата çак вăрăмăшне числосемпе кăтартса памалли задачăна лартатпăр.

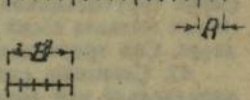
145. Пĕрлехи виçе. Икĕ татăкăн пĕрлехи виçи тесе виççĕмĕш татăка, çак икĕ татăкĕ çине те юлашкисĕр тулли число хут вырнаçаканскерне, калаççĕ. Çапла ĕнтĕ, *AM* татăк (162 черт.) *AB* татăкра 5 хут, *CD* татăкра 3 хут шăнăçать пулсан, вара *AM* татăк *AB* тата *CD* татăксемшĕн пĕрлехи виçе пулать. Çакăн пекех тата пĕртан радиуслă икĕ пĕккĕн, икĕ кĕтесĕн, тата кĕскереххĕн: икĕ пĕр пек пысăкăшăн пĕрлехи виçи çинчен калама пулать.



162 черт.



163 черт.



164 черт.

Асăрхаттарни. Паллах, *AM* татăк *AB* тата *CD* татăксемшĕн пĕрлехи виçе пулсан, вара эпир *AM* татăка 2, 3, 4 тата вĕтĕрех пĕртан пайсене пайласан, *AB* тата *CD* татăксен вĕтĕрех те вĕтĕрех пĕрлехи виçисем пулаççĕ. Çапла ĕнтĕ, икĕ татăкăн пĕр-пĕр пĕрлехи виçе пулсан, вара вĕсен темĕн чухлех пĕрлехи виçесем пулмалла. Вĕсенчен пĕри чи пысăкки пулать.

146. Чи пысăк пĕрлехи виçене тупма пулăшакан теоремăсем. Арифметикăра икĕ тулли числон пуриншĕн чи пысăк пайлаканнине тупнă чухне йĕркерен пайласа пынă пекех, икĕ татăкăн **чи пысăк** пĕрлехи виçине тупмашкăн та, йĕркерен хурса пымалли мелпе усă кураççĕ. Çак мел ак çакăн пек теоремăсем çинче никĕсленсе тăрать:

1. ***Икĕ татăкран*** (*A* тата *B*, 163 черт.) ***пĕчĕкки пысăкки çине нимĕн юлашкисĕрех тулли число хут вырнаçать пулсан, вара çак татăксен чи пысăк пĕрлехи виçи вĕсенчен пĕчĕкки пулать.***

Калăпăр, сăмахран, *B* татăк *A* татăкра шăпах 3 хут вырнаçать; анчах та, *B* татăк хăй çине шăпах 1 хут çеç вырнаçни паллах, çавăнпа та *A* тата *B* татăксен пĕрлехи виçи *B* пулать; тепĕр енчен тата çак виçе чи пысăкки пулать, мĕншĕн тесен *B* татăкран пысăкрахниепле татăк та *B* татăк çине тулли число хут шăнăçма пултараймасть.

2. ***Икĕ татăкран пĕчĕкки*** (164 черт., *B*) ***пысăкки*** (*A*) ***çине тулли число хут вырнаçнă хыççăн кирек мĕн чухлĕ те пулин юлашки*** (*R*) ***юлать пулсан, вара çак татăксен чи пысăк пĕрлехи виçи*** (вăл пур пулсан) ***пĕчĕк татăкĕшĕн те*** (*B*) ***тата юлашкишĕн те*** (*R*) ***чи пысăк пĕрлехи виçе пулмалла.*** Калăпăр, сăмахран:

$$A = B + B + B + R.$$

Çак пĕртанлăхран эпир çакнашкал икĕ заключени тума пултаратпăр:

1) *B* тата *R* çине нимĕн юлашкисĕр вырнаçакан татăк пур пулсан, вăл вара *A* татăк çине те нимĕн юлашкисĕрех вырнаçмалла, тĕслĕхрен, калăпăр, кирек епле те пулин татăк *B* çине шăпах 5 хут тата *R* çине шăпах 2 хут шăнăçать пулсан, *A* çине вара вăл нимĕн юлашкисĕр 5+5+5+2 хут, урăхла каласан, 17 хут вырнаçать.

2) Тўртĕн: *A* тата *B* татăксем çине нимĕн юлашкисĕр шăнăçакан татăк пур пулсан, вара вăл *R* татăк çине те нимĕн юлашкисĕрех вырнаçать; тĕслĕхрен, калăпăр, мĕнле те пулин татăк *A* татăк çине шăпах 17 хут, *B* татăк çине 5 хут вырнаçать пулсан, вара вăл *A* татăкăн 3*B* татăкпа пĕртан пайĕ çине 15 хут вырнаçать; çапла ĕнтĕ *A* татăкăн юлашки юлнă пайĕнче, урăхла каласан, *R* татăкĕнче вăл 17—15 хут, урăхла каласан, 2 хут шăнăçать.

Çапла ĕнтĕ, икĕ мăшăр татăксен:

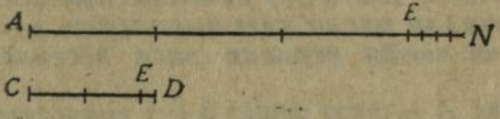
$$\overbrace{A \text{ тата } B} \quad \overbrace{B \text{ тата } R}$$

пĕр пĕрлехи виçесемех пулмалла (вĕсем пур пулсан); çавăнпа та вĕсен чи пысăк пĕрлехи виçисем те пĕрех пулмалла.

Çак икĕ теорема çумне тата **виçмеллин** çакнашкал **аксиомине** (Архимед аксиомине) хушмалла:

Пысăк татăкĕ** (A) **темĕн тери пысăк пулсан та тата пĕчĕк татăкĕ** (B) **темĕн тери пĕчĕккĕ пулсан та, яланах, пĕчĕккине пысăкки çине йĕркерен 1, 2, 3 тата малалла та çавăн пекех хурса пырсан, эпир m хут хунă хыççăн пирĕн е нимĕнле юлашки те юлмасть, е пĕчĕк** (B) **татăкран пĕчĕкрех юлашки юлать; урăхла каласан, $B \cdot m < A$, анчах та $B \cdot (m+1) > A$ пулакан чи пысăк m тулли положительнăй числона яланах тупма пулать.

147. Икĕ татăкăн чи пысăк пĕрлехи виçине тупасси. Калăпăр, панă *AN* тата *CD* (165 черт.) икĕ татăкăн чи пысăк пĕрлехи виçине тупмалла.



165 черт.

Çакна тăвас тесе, эпир пысăк татăкĕ çине (циркульпе усă курса) пĕчĕккине май килнĕ таранах хурса тухатпăр. Вара, виçессин аксиоми тăрăх, пирĕн икĕ тĕрлĕ пулма пултарать: е 1) *AN* çине *CD* нимĕн юлашки юлмасăрах вырнаçать, вара шыраканни, 1-мĕш теорема тăрăх, *CD* пулать, е 2) мĕнле те пулин юлашкийĕ (пирĕн чертежри пек) *CD* татăкран пĕчĕкрехскер, *EN* пулать, вара, 2-мĕш теорема тăрăх пĕчĕкрех икĕ татăкăн, тĕрĕсрех: *CD* тата пĕрремĕш *EN* юлашкин чи пысăк пĕрлехи виçине тупасси пулса тăрать. Ăна тупас тесен, татах малтанхи пекех тăватпăр, урăхла каласан, *CD* çине *EN* татăка май килнĕ хут хура-хура тухатпăр та, вара пирĕн татах икĕ тĕрлĕ пулма пултарать: е 1) *CD* çине *EN* нимĕн юлашкисĕр вырнаçать, вара шыракан виçе *EN* пулать, е 2) *EN* татăкран пĕчĕкрех (пирĕн чертеж çинчи пек) татăк *FD* татăк пулать: вара ыйту татах икĕ пĕчĕк татăксен, *EN* татăкăн тата иккĕмĕш юлашки *FD* татăкăн чи пысăк пĕрлехи виçине тупасси пулать.

Çакна малалла та çакăн пекех туса пырсан, пирĕн çакăн пек икĕ тĕслĕх пулма пултарать:

1) Темиçе хутчен хурса тухнă хыççăн нимĕнле юлашки те юлмасть е

2) йĕркерен хурса тухас процесăн вĕçĕ те пулмасть (эпир темĕн тери вĕтĕ татăксене те хурса тухма пултарнине шута илсе; анчах та, вĕтĕ татăксене теорире çеç хурса тухма май пур).

Пĕрремĕш тĕслĕхре чи кайранхи юлашкийĕ панă татăксен чи пысăк пĕрлехи виçи пулать. Панă татăксенче çак чи пысăк пĕрлехи виçе миçе хут вырнаçнине ансатрах шутласа кăларас тесе, кашни хутчен хура-хура тухнă хыççăн пулакан темиçе пĕртанлăха çырса тухăпăр. Çапла, пирĕн чертеж тăрăх, çапла пулать:

пĕрремĕш хутчен хура-хура тухнă хыççăн . . $AN = 3CD + EN$
иккĕмĕш „ „ „ „ „ . . $CD = 2EN + FD$
виççĕмĕш „ „ „ „ „ . . $EN = 4FD$.

Çак пĕртанлăхсенче аялти патĕнчен çӳлти патнелле йĕркерен куçса пырсан, акă мĕнле пулать:

$$EN = 4FD;\ CD = (4FD) \cdot 2 + FD = 9FD$$
$$AN = (9FD) \cdot 3 + 4FD = 31FD.$$

Çакăн пекех, пĕртан радиуспа çырнă икĕ пĕккĕн, икĕ кĕтесĕн тата ыттисенне те чи пысăк пĕрлехи виçине тупма пултаратпăр.

Иккĕмĕш тĕслĕхре панă татăксен пĕрлехи виçи вуçех те пулма пултараймасть. Çакна шыраса тупас тесен, калăпăр, панă AB тата CD татăксен мĕнле те пулин пĕрлехи виçе пур. Эпир малтах куртăмăр: çак виçе AB тата CD татăксем çине çеç мар, тата EN юлашки çине те, çапла вара FD юлашки çине те, виççĕмĕш, тăваттăмĕш т. ыт. юлашкисем çине те нимĕн юлмасăрах вырнаçмалла. Анчах та, çак татăксем кашни хутченех пĕчĕкленнĕçемĕн пĕчĕкленсе пынă пирки, вĕсенче кашнинчех пĕрлехи виçе малтанхинчен пĕчĕкрех хут вырнаçăнса пымалла. Калăпăр, сăмахран, EN çине пĕрлехи виçе 100 хут (кĕскенрех: m хут) вырнаçсан, FD çине вăл вара 100-тен сахалрах хут (апла-тăк, 99 хутран ытлах мар) вырнаçать; тепĕр юлашкинче унăн 99 хутран сахалрах (апла-тăк, 98 хутран ытлах мар) вырнаçать тата малалла та çаплах. Анчах та, пĕчĕкленсе пыракан целăй положительнăй числосен йĕркин: 100, 99, 98,... (пĕтĕмĕшле m, $m-1$, $m-2$,...) вĕçĕ пур (m число темĕн тери пысăк пулсан та), çавăнпа та йĕркерен хурса пырас процесăн, ăна çителĕклипех малалла туса пырсан, вĕçне çитмелле (урăхла каласан, ниепле юлашки те пулман тĕле çитме пултаратпăр). Çапла ĕнтĕ, йĕркерен хурса пырассин вĕçĕ пулмасан, вара панă татăксен ниепле пĕрлехи виçе те пулма пултараймасть.

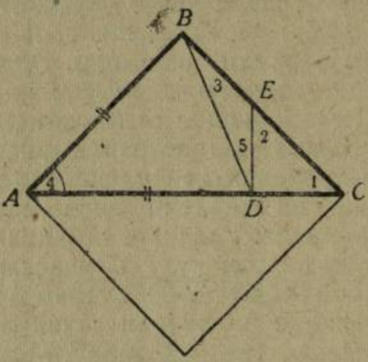
148. Виçĕнекен тата виçĕнмен татăксем. Икĕ тӳрĕ лини татăкĕн пĕрлехи виçе пулсан, вĕсене **виçĕнекен татăксем** теççĕ, вĕсен пĕрлехи виçе çук пулсан, вĕсене **виçĕнмен татăксем** теççĕ.

Практикăра виçĕнмен татăксем пуррине тĕпчесе пĕлме май çук, мĕншĕн тесен, йĕркерен хурса пынă май, эпир яланах çав тери пĕчĕк татăк тупма пултаратпăр, вара çав пĕчĕк татăка малалла хурсан, вăл тепĕр пĕчĕк татăкĕ çине целăй число хут вырнаçнăн туйăнать. Тен, çакăн пек хунă чухне кирек епле те пулин юлашки пулатех те пулĕ, анчах та, инструментсем (циркуль) тĕрĕсех мар пирки тата пирĕн сисĕм органĕсем (куç) ăна асăрхама пултарайман пирки, эпир ăна асăрхама пултараймастпăр та. Çапах та, халĕ эпир виçĕнмен татăксем чăнах та пуррине кăтартса парăпăр.

149. Теорема. ***Квадратăн диагоналĕ унăн енĕпе виçĕнмест.***

Квадратăн диагоналĕ квадрата икĕ танураллă тӳркĕтеслĕ треугольнике пайланă пирки, çак теоремăна урăх сăмахсемпе çакăн пек каласа пама пулать: ***танураллă тӳркĕтеслĕ треугольникăн гипотенузи унăн катечĕсемпе виçĕнмест.***

Малтан çакнашкал треугольникĕн çакăн пек свойствине кăтартса парăпăр: гипотенуза çинче (166 черт.) катетпа пĕртан татăк AD хурăпăр та $DE \perp AC$ тăвăпăр, вара çĕнĕрен пулнă *тӳркĕтеслĕ треугольник* DEC *пĕртан аяклă пулать*, BC *катетăн* BE *татăкĕ гипотенузăн* DC *татăкĕпе пĕртан пулать*. Çакна тĕрĕслесе ĕненес тесен, BD тӳрĕ лини хывăпăр та вара DEC тата BED треугольникĕн кĕтесĕсене пăхса тухăпăр. Анчах та, ABC танаяклă тата тӳркĕтеслĕ треугольник пулнă пирки, $\angle 1 = \angle 4$, çавӑнпа та $\angle 1 = 45°$, çавӑн пиркиех DEC тӳркӗтеслӗ треугольникре те $\angle 2 = 45°$, DEC треугольникӗн икӗ пӗртан кӗтес пур, çавӑнпа та унӑн DC тата DE енӗсем пӗртан.



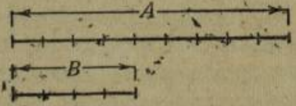
166 черт.

BDE треугольникре 3-мӗш кӗтес ABD кӗтесе кӑларнӑ тӳрӗ кӗтеспе пӗртан, 5-мӗш кӗтес ADB кӗтесе кӑларнӑ тӳрӗ ADE кӗтеспе пӗртан. Анчах та, $\angle ADB = \angle ABD$ (мӗншӗн тесен $AB = AD$) вара $\angle 3 = \angle 5$. Кунтан DBE треугольникӗ те тануралла пулмалла, çавӑнпа та $BE = ED = DC$.

Çакна асӑрхӑпӑр та AB тата AC татӑксен пӗрлехи вӑрӑмӑшне тупма тытӑнӑпӑр. Анчах та, $AC > AB$ тата $AC < AB + BC$, урӑхла каласан, $AC < 2AB$, çавӑн пирки те AB катет AC гипотенуза çине пӗр хут çеç вырнаçать те мӗнле те пулин юлашки DC юлать. Халӗ ӗнтӗ çак юлашкие AB çине (пӗр пекех BC çине те юрать) хурса тухмалла. Анчах та, кӑтартса пани тӑрӑх, BE татӑк DC татӑкпа пӗртан. Апла пулсан, DC татӑка татах тепӗр хут EC çине хурса тухмалла. Анчах EC татӑк вӑл DEC тануралла треугольникӗн гипотенузи пулать. Çапла ӗнтӗ, пӗрлехи виçене тупмашкӑн малалла хурса тухмалли процесс тануралла тӳркӗтеслӗ DEC треугольникӗн EC гипотенузи çине DC катета хурса тухасси пулать. Малалла тата пӗчӗк тануралла тӳркӗтеслӗ треугольникӑн катетне гипотенузи çине хурасси пулать тата малалла та çавӑн пекех вӗçӗмсӗрех пулса пырать. Вара çак процесс пӗтме пултараймасть пулсан, AC тата AB татӑксен пӗрлехи виçи те пулма пултараймасть.

150. Татӑксене виçесси çинчен ӑнлантарса пани. Панӑ татӑкӑн пысӑкӑшне лайӑхрах ӑнланса илес тесессӗн, ӑна тепӗр, паллӑ татӑкпа, сӑмахран, метрпа танлаштарса пӑхаççӗ (çак паллӑ татӑка, унпа ытти татӑксене танлаштараканскере, вӑрӑмӑшӗн единици теççӗ). Танлаштарса пӑхнӑ чухне икӗ тӗслӗх пулма пултарать: виçекен татӑк единицӑпа е виçӗнет, е унпа виçӗнмест.

1) *Единицӑпа виçӗнекен татӑка виçес тени вӑл—унра çак единица е унӑн кирек епле те пулин пайӗ миçе хут вырнаçнине пӗлес тени пулать.*

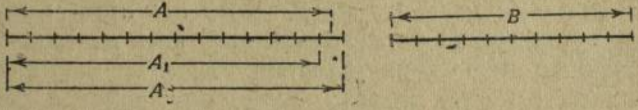


167 черт.

Сӑмахран, калӑпӑр, кирек епле те пулин A татӑка, B единицӑпа, A татӑкпа виçӗнекенскерпе, виçмелле. Вара вӗсен пӗрлехи виçине тупаççӗ те, вӑл A çине те, B çине те миçешер хут вырнаçнине пӗлеççӗ. Пӗрлехи виçе B татӑк хӑй пулсан, виçнин результачӗ целӑй число пулать. Çапла ӗнтӗ, A çине B татӑк 3 хутчен вырнаççан, вара A татӑкӑн вӑрӑмӑшӗ 3 единица пулать. Çакнашкал пӗрлехи виçе B татӑкӑн пӗр-пӗр пайӗ пулсан, виçнин результачӗ вара вак число пулать. Çапла, калӑпӑр, пӗрлехи виҫе B татӑкӑн $^1/_4$ пайӗ пулсан, вара вӑл A ҫине 9 хут вырнаҫать (167 чертежра кӑтартса панӑ пек), ҫакӑн пек чухне ӗнтӗ А татӑкӑн вӑрӑмӑшӗ $^9/_4$-пе пӗртан теҫҫӗ.

Виҫнӗ хыҫҫӑн пулнӑ числона час-часах виҫекен япалан **виҫе пысӑкӑшӗ** е **виҫи** теҫҫӗ. Целӑй тата вак числосене **рациональнӑй числосем** теҫҫӗ.

2) Панӑ A татӑк B единицӑпа виҫӗнмест, вара виҫес процеса ӑрасна майпа тӑваҫҫӗ; A татӑк вырӑнне панӑ единицӑпа виҫӗнекен икӗ татӑк илеҫҫӗ; вӗсенчен пӗрийӗ A татӑкран пӗчӗкрех, тепри—пысӑкрах пулать; вӗсем иккӗшӗ те A татӑкран кӑшт ҫеҫ уйрӑм тӑма та пултараҫҫӗ. Ҫакӑн пек виҫӗнекен пайсене тупмашкӑн ҫапла тӑваҫҫӗ: калӑпӑр, пирӗн панӑ A татӑкран B вӑрӑмӑш единицин $\frac{1}{10}$ пайӗнчен те сахалрах уйӑрӑлса тӑракан виҫӗнекен татӑк тупмалла. Вара эпир B единицӑна 10 пӗртан пая пайлатпӑр та (168 черт.) ҫакӑн пек пӗр пайне A татӑк ҫине, май



168 черт.

килнӗ таранах, хура-хура тухатпӑр. Калӑпӑр, вӑл 13 хутчен вырнаҫрӗ те татах темӗнле юлашки, B единицӑран $\frac{1}{10}$ сахалрахскер, юлчӗ. Вара пирӗн панӑ единицӑпа виҫӗнекен тата A татӑкран кӗскерех A_1 татӑк пулать. $\frac{1}{10}$ B тепӗр хут хурса тухсан, пирӗн татах панӑ единицӑпа виҫӗнекен, A татӑкран вӑрӑмрах A_2 пулать. Ку татӑк A татӑкран панӑ единицӑн $\frac{1}{10}$ пайӗнчен ытлах уйрӑм мар. A_1 тата A_2 татӑксен вӑрӑмӑшӗсене $\frac{13}{10}$ тата $\frac{14}{10}$ числосемпе палӑртаҫҫӗ. Ҫак числосене A татӑк вӑрӑмӑшӗн ҫывхартнӑ виҫи тесе шутлаҫҫӗ: пӗрремӗшӗ A татӑкӑн чӑн-чӑн вӑрӑмӑшӗнчен кӗскерех, иккӗмӗшӗ — вӑрӑмрах: Анчах та, A татӑк A_1 тата A_2 татӑксенчен единицӑн $\frac{1}{10}$ пайӗнчен те сахалрах уйӑрӑлса тӑнӑ пирки, ҫак числосенчен кашниех A татӑкӑн вӑрӑмӑшне $\frac{1}{10}$ чухлӗ тӗрӗслӗхпе кӑтартса параҫҫӗ, тесе калама йышӑннӑ.

Пӗтӗмӗшле илсен, A татӑкӑн вӑрӑмӑш виҫине $\frac{1}{n}$ чухлӗ тӗрӗслӗхпе тупас тесен, B единицӑна пӗртан n пая пайлаҫҫӗ те, вара $\frac{1}{n}$-мӗш пайӗ A ҫине миҫе хут вырнаҫнине шутласа пӗлеҫҫӗ; вӑл A ҫине m хут вырнаҫсан пӗр-пӗр юлашки, $\frac{1}{n}$ B единицӑран пӗчӗкрехскер, юлать пулсан, вара $\frac{m}{n}$ тата $\frac{m+1}{n}$ числосене A татăкăн $\frac{1}{n}$-мĕш чухлĕ тăрĕслĕхпе çывхартса тупнă виçи теççĕ; вĕсенчен пĕри A татăкран кĕскерех, тепри вăрăмрах пулать.

Çакăн пек майпа эпир виçнин çывхартнă результачĕсене виçекен A татăк B единицăпа виçĕннĕ чухне те тупма пултарнине асăрхаттарса хăварăпăр. Çакăн пек чухне çеç эпир панă татăкăн тĕрĕс виçине тупма пултаратпăр. Анчах та, панă татăк виçе единиципе виçĕнмен чухне, эпир пĕр рациональнăй числосемпе кăна тĕрĕс результат тупма пултараймастпăр.

A татăк виçе единиципе виçĕнмен чухне, A татăк вăрăмăшĕн тĕрĕс числи вырăнне йышăнма юрăхлă числона тупас тесе, çапла тăваççĕ.

A татăк вăрăмăшĕн виçине йĕркерен çителĕксĕр 0,1 тĕрĕслĕхпе шутласа кăлараççĕ, унтан çак виçинех çителĕксĕр 0,01 тĕрĕслĕхпе, унтан тата çавнах 0,001 тĕрĕслĕхпе шутласа кăлараççĕ, çапла вара A татăкăн çывхартнă вăрăмăшне йĕркерен шутласа кăларас процеса вĕçĕмсĕр, кашни хутĕнчех тĕрĕслĕхе 10-шер хут ӳстерсе малалла туса пыраççĕ. Çакăн пек процеса тунă чухне малтан пĕр вуншарлă палăллă, унтан икĕ, виçĕ палăллă вак пулса пырать, процесс мĕн тери малалла пырать, вакри вуншарлă палăсен хисепĕ те ӳссех пырать. Вуншарлă ваксене çакăнта кăтартса панă пек тăвас процеса вĕçĕмсĕрех малалла тăсни вĕçĕмсĕр периодсăр вуншарлă вака туса парать. (Çак вак периодлă пулма пултараймасть, мĕншĕн тесен вăл периодлă вак пулнă пулсан, ăна ахаль вак тума май пулнă пулĕччĕ, вара A татăк хăй те панă вăрăмăш единиципе виçĕннĕ пулĕччĕ).

Алгебрăран эпир кирек епле вĕçĕмсĕр периодлă мар вуншарлă вак мĕнле те пулин **иррациональнăй числона** пĕлтернине пĕлетпĕр. Тĕслĕхрен, çакăн пек числона квадратла кореньрен кăларнă число, унран тĕрĕс корень тухайман чухне, туса парать. Çапла ĕнтĕ, $\sqrt{2}$ вĕçĕмсĕр вуншарлă вака пĕлтерекен **иррациональнăй число** пулса тăрать[1].

$$\sqrt{2} = 1,4142....$$

Çапла ĕнтĕ, вĕçĕмсĕр вуншарлă вак B единицăпа виçĕнмен A татăка çывхартса виçнĕ чухне пулаканскер, кирек епле те пулин иррациональнăй числона пĕлтерет. Çак числона вара A татăк вăрăмăшĕн тĕрĕс виçи вырăнне шутлаççĕ.

Асăрхаттарни. A татăкăн вăрăмăшне çителексĕр мар, ытлашшипе йĕркерен 0,1; 0,01; 0,001;... тĕрĕслĕхпе çывхартса шутласа пынă чухне те çак иррациональнăй числонах тупма пулать. Чăнах та, пĕр пек вуншарлă тĕрĕслĕхпе илнĕ икĕ виçе — пĕрне çителĕксĕр, тепĕрне ытлашши илнĕ икĕ виçе пĕр-пĕринчен чи юлашки вуншарлă палăпа çеç уйрăлса тăраççĕ. Тĕрĕслĕх степеньне малалла ӳстерсе пынăçемĕн, çак юлашки вуншарлă палă запятайăран сылтăм еннелле малалла та малалла куçса пырать;

---

[1] Паллах, вĕçĕмсĕр вуншарлă вака пĕтĕмпех хут листи çине вырнаçтарма çук, мĕншĕн тесен, унăн вуншарлă палăсен хисепĕ вĕçĕмсĕр. Анчах çапах та, унăн вуншарлă кирек епле палăсене те тупмалли меле пĕлеççĕ пулсан, ăна паллă число вырăнне шутлаççĕ.

икĕ вакăн та пĕрлехи вуншарлă знакĕсем нумайланнăçемĕн нумайланса пыраççĕ. Процеса вĕçĕмсĕрех туса пырсан, çапла вара, икĕ тĕслĕхре те вуншарлă вĕçĕмсĕр пĕр ваках, урăхла каласан, пĕр иррациональнăй число пулать.

Вĕçĕмсĕр вуншарлă вакăн тĕрĕс хисепне унăн çителĕксĕр çывхартса илнĕ кирек епле хисепĕнчен те пысăкрах тата ытлашши çывхартса илнĕ кирек епле хисепĕнчен те пĕчĕкрех шутлаççĕ.

151. Вĕçĕмсĕр вуншарлă вак. Алгебрăра вĕçĕмсĕр вуншарлă ваксене çак определенисенчен вĕрентме тытăнаççĕ.

Вĕçĕмсĕр вуншарлă вака чăн-чăн число тесе калаççĕ.

Вĕçĕмсĕр вуншарлă икĕ вакăн пĕр пек вуншарлă палăсем пĕртан пулсан, вĕсене пĕртан тесе шутлаççĕ.

Вĕçĕмсĕр вуншарлă пĕртан мар икĕ вакран пĕрин пĕр пек вуншарлă палă иккĕмĕшĕннинчен пысăкрах пулсан, вара çавна чăн-чăн пысăкрах число вырăнне шутлаççĕ.

Вĕçĕмсĕр вуншарлă вакра пĕр-пĕр вуншарлă палăран пуçласа малалли палăсем пурте нульпе пĕртан пулсан, вара вака хыçалти пур нульсене те хуратса пăрахнă хыççăн пулакан хисеппе пĕртан тесе шутлаççĕ. Çапла, вĕçĕмсĕр вуншарлă вак 7,8530078000... вĕçĕмлĕ 7,8530078 вакпа пĕртан. Периодлă вĕçĕмсĕр вакăн периодĕнче 9 пулсан, ăна вара юлашки вуншарлă палăна, 9-тан уйрăмскерне, пĕр единицăна ўстерсе тата хыçалти пур тăххăрсене те хуратса пăрахса, яланах вĕçĕмлĕ вуншарлă вакпа улăштараççĕ. Çапла, 3,72999... вака вĕçĕмлĕ 3,73 вакпа улăштараççĕ.

152. Вĕçĕмсĕр вуншарлă вакăн çывхартнă хисепĕ. Панă вĕçĕмсĕр вуншарлă вака пĕр-пĕр n-мĕш палăра татсан, вара вĕçĕмлĕ вак пулать. Çак вака вара ***вĕçĕмсĕр вуншарлă вакăн*** $\frac{1}{10^n}$ ***тĕрĕслĕхпе çывхартса шутласа кăларнă çителĕксĕр хисепĕ*** теççĕ. Çак вакрах юлашки вуншарлă палла пĕр единица хушса ўстерсен, урăхла каласан, ун çумне $\frac{1}{10^n}$ хушсан, вара вĕçĕмлĕ çĕнĕ вак пулать; вара çак вака çав тĕрĕслĕхпех çывхартса шутласа кăларнă ***ытлашши хисепĕ*** теççĕ. Чăн-чăн α числон n вуншарлă палăллă çителĕксĕр хисепне α_n урлă, ытлашши хисепне α'_n урлă паллă тусан, вара $\alpha'_n = \alpha_n + \frac{1}{10^n}$. Чăн-чăн числосен танмарлăхĕн определенийĕ тăрăх, чăн-чăн числон хисепĕ хăйне кирек епле çывхартнин çителĕксĕр хисепĕнчен пысăкрах, çывхартнин ытлашши хисепĕнчен пĕчĕкрех. Çапла, тĕслĕхрен, калăпăр, $\sqrt{2} = 1,414$ палăракан чăн-чăн число панă. Унăн 0,01 тĕрĕслĕхпе шутласа тупнă çителĕксĕр хисепĕ: 1,41; ытлашши хисепĕ: 1,42; мĕншĕн тесен

$$1,41 = 1,41000\ldots$$
$$1,42 = 1,42000\ldots,$$

çавăнпа та чăн-чăн числосен танмарлăхĕн определенине кура çакăн пек пулать:

$$1,41000\ldots < 1,414\ldots < 1,42000\ldots, \text{ е } 1,41 < \sqrt{2} < 1,42.$$

153. Чăн-чăн числосемпе действисем тăвасси... (хушасси). Калăпăр, чăн-чăн икĕ число α тата β панă. Вĕсен çывхартнă хисепĕсене, кирек епле вуншарлă n палăпа, малтан çителĕксĕр, унтан ытлашши илĕпĕр. α тата β числосен çывхартнă çителĕксĕр хисепĕсене α_n тата β_n урлă паллă тăвăпăр, çывхартнă ытлашши хисепĕсене α'_n тата β'_n урлă паллă тăвăпăр. Вара çапла пулать:

$$\alpha'_n = \alpha_n + \frac{1}{10^n}, \quad \beta'_n = \beta_n + \frac{1}{10^n}. \qquad (1)$$

Халĕ ĕнтĕ $\alpha_n + \beta_n$ тата $\alpha'_n + \beta'_n$ суммăсене тăвăпăр. Вĕсенче кашнинчех n вуншарлă палăллă вуншарлă вак пур.

Суммăсенчен пĕрне γ_n тепĕрне γ'_n урлă паллă тăвăпăр:

$$\alpha_n + \beta_n = \gamma_n, \qquad \alpha'_n + \beta'_n = \gamma'_n.$$

Пĕртанлăхсене (1) уйрăм членсем тăрăх хушсан, çапла пулать:

$$\alpha'_n+\beta'_n=\alpha_n+\beta_n+\frac{2}{10^n},$$

е $\gamma'_n=\gamma_n+\frac{2}{10^n}$. Çак пĕртанлăх акă мĕне кăтартса парать: γ'_n вак γ_n вакран унăн юлашки вуншарлă палли çумне икĕ единица хушнипе пулать. Халĕ ĕнтĕ n хисепе пысăклатса пырăпăр. Вара γ_n вакран вĕçĕмсĕр вуншарлă вак пулать, ăна эпир γ урлă паллă тăвăпăр. Çак вак е периодлă, е периодсăр пулма пултарать. Калăпăр, γ вак периодсăр вак пултăр. Вара унра вуншарлă палăсем, 9-тан уйрăмскерсем, вĕçĕмсĕр пулмалла. Кунта γ вакра 9-тан уйрăм вуншарлă палăсем те, n ÿссе пынăçемĕн; ÿссех пымалла. Анчах та, γ_n вак çумне $\frac{2}{10^n}$ хушнипе унăн юлашки икĕ паллинчен сулахай еннерех тăракан вуншарлă паллисене, 9-тан уйрăмскерсене, улăштарма пултараймасть, çавăнпа та γ_n тата γ'_n ваксенче малтанхи пĕрлехи вуншарлă палăсен хисепĕ, n ÿссе пынăçемĕн, вĕçĕмсĕрех ÿссе пырать. Çапла ĕнтĕ, γ'_n вака та γ_n пĕртан вĕçĕмсĕр вуншарлă вак патнех илсе пырать. Çакăн пек чухне, малтан калани тăрăх, n кирек епле пулсан та, çапла пулать:

$$\gamma_n<\gamma<\gamma'_n. \tag{2}$$

Халĕ, калăпăр ĕнтĕ, γ вак периодлă вак. Кун пек чухне вăл кирек епле те пулин рациональнăй число пулать. Ку число та (2) танмарлăхсене килĕштернине шутласа илме йывăр мар.

Определени. (2) *танмарлăха килĕштерекен чăн-чăн числона* α *тата* β *чăн-чăн числосен сумми теççĕ.*

$$\gamma=\alpha+\beta.$$

154. Чăн-чăн числосемпе урăхла действисем тăвасси. Çакăн пек майпах чăн-чăн икĕ числон разноçне, вĕсен произведенине тата пĕр числине тепĕр число çине пайланă хыççăн пулакан частнăя тупма пулать. Çак действисен результачĕсене тĕплĕнрех тĕпчесе вĕренни акă мĕне кăтартса парать: чăн-чăн числосен çакăн пек майпа тупнă сумми тата произведенийĕ рациональнăй числосемпе тăвакан действисенчи тĕп законсенех пăхăнса пырать: хушасси—вырăнĕсене куçарассин тата ушкăнăн-ушкăнăн пухас законсене пăхăнать.

$$\alpha+\beta=\beta+\alpha,\quad(\alpha+\beta)+\gamma=\alpha+(\beta+\gamma),$$

хутласси — вырăнĕсене куçарассин, ушкăнăн-ушкăнăн пухас тата ушкăнăн-ушкăнăн пайлас законсене пăхăнать:

$$\alpha\beta=\beta\alpha,\quad(\alpha\beta)\gamma=\alpha(\beta\gamma),\quad(\alpha+\beta)\gamma=\alpha\gamma+\beta\gamma.$$

Вĕçĕмсĕр вуншарлă ваксем периодлă ваксем пулсан, çÿлĕрех каланă действисене тунă чухне вĕсем те, действие периодлă ваксене ахаль ваксене куçарнă хыççăн ахаль ваксемпе тунă пекех, пĕр пек результатсемех параççĕ.

Çапла ĕнтĕ, рациональнăй числосем вĕсем чăн-чăн числосен уйрăм тĕслĕхĕ çеç пулаççĕ.

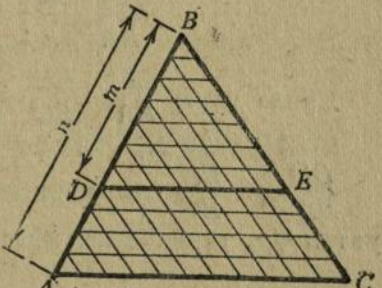
155. Икĕ татăкăн отношенийĕ. *А* татăка виçнĕ хыççăн пулнă числона татăкăн числолла виçи теççĕ. *А* татăк виçе единиципе виçĕнет пулсан, вара унăн числолла виçи рациональнăй число пулать. Вăл виçе единиципе виçĕнмест пулсан, унăн числолла виçи периодсăр вуншарлă вака пĕлтерекен иррациональнăй число пулать.

Малашне эпир татăкăн вăрăмăшĕ тесе унăн паллă виçе единиципе виçнĕ хыççăн пулнă числона калăпăр. Икĕ татăкăн отношенийĕ тесе вĕсен числолла виçисен отношенине калăпăр.

Икĕ татăкăн отношенийĕ мĕнле виçе единици суйласа илнинчен килмест. Чăнах та, сăмахран, виçен малтанах суйласа илнĕ единици вырăнне урăх, 3 хут пĕчĕкрех виçе илсен, вара çĕнĕ единица кашни татăкĕ çине, малтанхипе танлаштарсан, 3-шер хут ытларах вырнаçакан çеç пулать. Вара татăксен отношенине пĕлтерекен вакра числитель те, знаменатель те, 3-шер хут ӳсет. Çакăн пирки вакăн пысăкăшĕ улшăнмасть. Панă татăксем пĕрпĕринпе виçĕнеççĕ пулсан, вара вĕсен отношенине шутланă чухне вĕсен пĕрлехи виçине илсен ансатрах. Çакăн пек чухне вара пĕрпĕринпе виçĕнекен икĕ татăкăн отношенийĕ, вĕсен пĕрлехи виçи кашнин çине миçе хут вырнаçнине кăтартакан числосен отношенийĕ пулать.

II. ТРЕУГОЛЬНИКСЕН ПĔРЬЕВĔРЛĔХĔ.

156. **Малтанхи ăнланусем.** Пирĕн таврари пурнăçра час-часах тĕрлĕ пысăкăш, анчах пĕр формăллă фигурăсем тĕл пулаççĕ. Тĕслĕхрен, пĕр çынăн тĕрлĕ пысăкăш ӳкерсе хатĕрленĕ фотоӳкерчĕкĕсем, çуртăн е хулан тĕрлĕ пысăкăш тунă планĕсем çакăн пек пулаççĕ. Çакнашкал фигурăсене пĕрьевĕрлĕ фигурăсем тесе калама йышăннă. Татăксен вăрăмăшĕсене виçме пĕлни фигурăсен геометрилле пĕрьевĕрлĕхĕ çинчен тĕплĕн ăнланса илме тата фигурăн хăйĕн формине улăштармасăрах унăн виçине улăштарма май парать. Фигурăн формине улăштармасăрах унăн виçисене улăштарнипе тунă фигурăна пĕрьевĕрлĕ улăштарни тесе калаççĕ. Фигурăсен пĕрьевĕрлĕхне вĕренессине эпир чи ансат тĕслĕхрен, треугольниксен пĕрьевĕрлĕхĕнчен, тытăнапăр.



169 черт.

157. **Пĕр пек енĕсем.** Ку сыпăкра пĕр-пĕрин кĕтесĕсем теприн кĕтесĕсемпе пĕртан треугольниксене пăхса тухăпăр. Кун пек чухне **„пĕр пек“** енсем тесе икĕ пĕртан кĕтессем хушшинче выртакан енсене йышăнăпăр (ку енсем тата пĕртан кĕтессене хирĕçле те выртаççĕ).

158. Определени. *Икĕ треугольнике çакăн пек чухне пĕрьевĕрлĕ теççĕ:* 1) *пĕрин кĕтесĕсем теприн кĕтесĕсемпе пĕртан пулсан тата* 2) *пĕрин енĕсем теприн пĕр пек енĕсемпе пропорциллĕ пулсан.*

Çакнашкал треугольниксем пулма пултарнине çакăн пек лемма кăтартса парать.

159. Лемма[1]. ***Треугольникĕн*** (*ABC*, 169 черт.) ***пĕр-пĕр енĕпе*** (*AC*) ***параллельлĕ хывнă тӳрĕ лини*** (*DE*) ***çак панă треугольникрен унпа пĕрьевĕрлĕ треугольник татса илет.*** Калăпăр, *ABC* треугольникре *DE* тӳрĕ лини *AC* енпе параллельлĕ.

---

[1] Лемма тесе пулăшма тăвакан теоремăна калаççĕ. Ăна ун хыççăн пулакан телĕр теоремăн доказательствине тумашкăн кăтартса параççĕ.

Халĕ ĕнтĕ *DBE* треугольник *ABC* треугольникпа пĕрьевĕрлине кăтартса памалла.

Чи малтанах, кĕтесĕсем пĕртаннине, иккĕмĕшĕнчен, *ABC* тата *DBE* треугольниксен пĕр пек енĕсем пропорциллĕ пулнине кăтартса памалла.

1. Треугольниксен килĕшӳллĕ кĕтесĕсем пĕр-пĕринпе пĕртан, мĕншĕн тесен вĕсен *B* кĕтесĕ пĕрлехи кĕтес *DE* тата *AC* параллельлĕ тӳрĕ линисем, *AB* тата *CB* вĕсене татса каяканĕ пулнă пирки $\angle D = \angle A$ тата $\angle E = \angle C$.

2. Халĕ ĕнтĕ $\triangle DBE$ пĕр пек енĕсем $\triangle ABC$ енĕсемпе пропорциллĕ пулнине кăтартса парăпăр, урăхла каласан:

$$\frac{BD}{BA} = \frac{BE}{BC} = \frac{DE}{AC}.$$

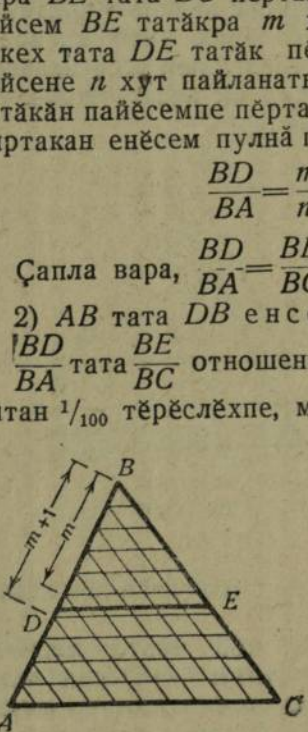
Çакна кăтартса парас тесе, уйрăмăн икĕ тĕслĕхе пăхса тухăпăр.

1) *AB* тата *DB* енĕсен пĕрлехи виçе пур. *AB* татăка çак пĕрлехи виçепе пĕртан виçесене пайлăпăр. Вара *BD* çакăн пек пайсене целăй число хут пайланать. Калăпăр, çакăн пек пайсем *DB* çине *m* хут тата *AB* çине *n* хут вырнаçаççĕ. Пайланин точкисенчен пĕр майлă *AC* енпе параллельлĕ тӳрĕ линисем тата тепĕр майлă *BC* енпе параллельлĕ тӳрĕ линисем хывса тухăпăр. Вара *BE* тата *BC* пĕртан пайсене пайланаççĕ (95 §), çакăн пек пайсем *BE* татăкра *m* хут, *BC* татăкра *n* хут пулаççĕ. Çакăн пекех тата *DE* татăк пĕртан пайсене *m* хут, *AC* татăк пĕртан пайсене *n* хут пайланать; çакăнта ĕнтĕ *DE* татăкăн пайĕсем *AC* татăкăн пайĕсемпе пĕртан пулаççĕ (параллелограмăн хире-хирĕçле выртакан енĕсем пулнă пирки). Халĕ ĕнтĕ акă мĕн курăнса тăрать

$$\frac{BD}{BA} = \frac{m}{n};\quad \frac{BE}{BC} = \frac{m}{n};\quad \frac{DE}{AC} = \frac{m}{n}.$$

Çапла вара, $\frac{BD}{BA} = \frac{BE}{BC} = \frac{DE}{AC}$.

2) *AB* тата *DB* енсен пĕрлехи виçе çук (170 черт.) $\frac{BD}{BA}$ тата $\frac{BE}{BC}$ отношенисенчен кашнинех малтан $^1/_{10}$ тĕрĕслĕхпе, унтан $^1/_{100}$ тĕрĕслĕхпе, малашне те тĕрĕслĕхе йĕркерен 10-шер хут ӳстерсе пырса, çывхартнă хисепĕсене тупăпăр.



170 черт.

Çакна тупас тесе малтан *AB* ене 10 пĕртан пая пайлăпăр та, пайланин точкисенчен *AC* енпе параллельлĕ тӳрĕ линисем хывăпăр. Вара *BC* енĕ те 10 пĕртан пая пайланать. Халĕ калăпăр, *AB* енĕн $^1/_{10}$ пайĕ *BD* çине *m* хут вырнаçать те татах теменле юлашки, *AB* енĕн $^1/_{10}$ пайĕнчен пĕчĕкрехскер, юлать. Вара *BC* енĕн $^1/_{10}$ пайĕ те *BE* татăк çине *m* хут вырнаçса *BC* енĕн $^1/_{10}$ пайĕнчен пĕчĕкрех юлашки юлни 170-мĕш чертежранах курăнса тăрать. Çапла $^1/_{10}$ тĕрĕслĕхпе шутласа кăларсан çапла пулать:

$$\frac{BD}{BA}=\frac{m}{10};\ \frac{BE}{BC}=\frac{m}{10}.$$

Малалла, AB енне 100 пӗртан пая пайлӑпӑр та AB енӗн $^1/_{100}$ пайӗ BD ҫине m_1 хут вырнаҫать тейӗпӗр. Пайланин точкисем урлӑ татах AC енпе параллельлӗ линисем хывӑпӑр та вара BC енӗн $^1/_{100}$ пайӗ BE татӑк ҫине те m_1 хут вырнаҫнине курӑпӑр. Ҫавӑнпа та $^1/_{100}$ тӗрӗслӗхпе шутласан, ҫапла пулать:

$$\frac{BD}{BA}=\frac{m_1}{100}\text{ тата }\frac{BE}{BC}=\frac{m_1}{100}.$$

Малалла, тӗрӗслӗх степеньне 10, 100, ... хут ӳстерсе пынӑҫемӗн, $\frac{BD}{BA}$ тата $\frac{BE}{BC}$ отношенисен ҫывхартнӑ хисепӗ, кирек епле, анчах пӗр пекех вуншарлӑ паласен тӗрӗслӗхӗпе шутласа кӑларнӑскер, яланах пӗртан пулнине куратпӑр. Ҫапла ӗнтӗ, ҫак отношенисен тӗрӗс хисепӗ яланах вӗҫӗмсӗр вуншарлӑ пӗр вак пулать; ҫапла:

$$\frac{BD}{BA}=\frac{BE}{BC}.$$

Ҫакӑн пекех, AB ене пайланин точкисем урлӑ BC енпе параллельлӗ тӳрӗ линисем хывсан та ҫаплах пулать:

$$\frac{BD}{BA}=\frac{DE}{AC}.$$

Ҫапла вара, ку тӗслӗхре ҫакӑн пек пулать:

$$\frac{BD}{BA}=\frac{BE}{BC}=\frac{DE}{AC}.$$

160. Асӑрхаттарни. 1) Тин ҫеҫ кӑтартса панӑ отношенисем виҫӗ пропорци пулса тӑраҫҫӗ:

$$\frac{BD}{BA}=\frac{BE}{BC};\ \frac{BD}{BA}=\frac{DE}{AC};\ \frac{BE}{BC}=\frac{DE}{AC}.$$

Вӗсен варринчи членӗсене куҫарса лартсан, ҫакӑн пек пулать:

$$\frac{BD}{BE}=\frac{BA}{BC};\ \frac{BD}{DE}=\frac{BA}{AC};\ \frac{BE}{DE}=\frac{BC}{AC}.$$

Ҫапла ӗнтӗ, *треугольниксенче енсем пропорциллӗ пулсан, вара пӗр треугольникӗн кирек хӑш икӗ енӗн отношенийӗ те тепӗр треугольникӗн пӗр пек икӗ енӗн отношенийӗпе пӗртан пулать.*

2) Хӑш чухне фигурӑсен пӗрьевӗрлӗхне $\backsim$ паллӑпа кӑтартса параҫҫӗ.

Треугольниксен пӗрьевӗрлӗхӗн виҫӗ паллӑлӑхӗ.

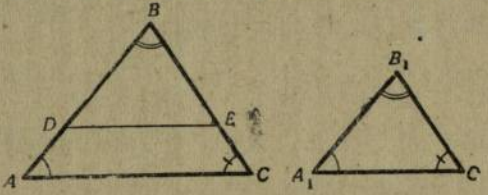
161. Теоремӑсем. ***Икӗ треугольникре:***

1) ***пӗрин икӗ кӗтесӗ теприн килӗшӳллӗ икӗ кӗтесӗпе пӗртан пулсан;*** е

2) ***пĕрин икĕ енĕ теприн икĕ енĕпе пропорциллĕ тата çак енсем хушшинчи кĕтес пĕртан пулсан;*** е

3) ***пĕрин виçĕ енĕ теприн виçĕ енĕпе пропорциллĕ пулсан, вара вĕсем пĕрьевĕрлĕ пулаççĕ.***

1) Калăпăр, ABC тата $A_1B_1C_1$ икĕ треугольникĕн (171 черт.) $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$, вара $\angle C = \angle C_1$.



171 черт.

Çакăн пек треугольниксем пĕрьевĕрлине кăтартса памалла.

AB ен çине A_1B_1 енпе пĕртан BD татăка хурăпăр та $DE \parallel AC$ тăвăпăр.

Вара пулăшакан $\triangle DBE$ тăватпăр; ку треугольник маларах кăтартса панă лемма тăрăх, ABC треугольникпе пĕрьевĕрлĕ. Тепĕр енчен тата $\triangle DBE = \triangle A_1B_1C_1$, мĕншĕн тесен вĕсен: $DB = A_1B_1$ (чертежа туни тăрăх), $\angle B = \angle B_1$ (услови тăрăх) тата $\angle D = \angle A_1$ (мĕншĕн тесен $\angle D = \angle A_1$ тата $\angle A = \angle A_1$). Анчах та, икĕ пĕртан треугольниксенчен пĕри виççĕмĕш треугольникпе пĕрьевĕрлĕ пулсан, вара тепри те унпа пĕрьевĕрлех пулать; çавăнпа та ĕнтĕ:

$$\triangle A_1B_1C_1 \backsim \triangle ABC.$$

2) Калăпăр, ABC тата $A_1B_1C_1$ треугольниксенче (172 черт.) панă:

$$\angle B = \angle B_1 \text{ тата } \frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1}. \qquad (1)$$

Çакăн пек треугольниксем пĕрьевĕрлине кăтартса памалла.

Татах AB ен çине A_1B_1 енпе пĕртан BD татăка хурăпăр та $DE \parallel AC$ тăвăпăр. Вара пулăшакан $\triangle BDE$, ABC треугольникпе пĕрьевĕрлĕскер, тăватпăр. Халĕ ĕнтĕ вăл $\triangle A_1B_1C_1$ пĕртаннине кăтартса парăпăр. ABC тата DBE треугольниксем пĕрьевĕрлĕхĕнчен акă мĕн тухса тăрать:

$$\frac{AB}{DB} = \frac{BC}{BE}. \qquad (2)$$

Çак пропорцие панă (1) пропорципе танлаштарса пăхсан, икĕ пропорцин те малтанхи отношенийĕсем пĕр пеккине куратпăр ($DB = A_1B_1$ чертежа тунă тăрăх); çапла вара, çак пропорцисен ытти отношенийĕсем те пĕртанах, урăхла каласан:

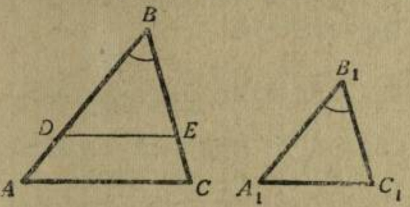
$$\frac{BC}{B_1C_1} = \frac{BC}{BE}.$$

Анчах та, пропорцире малтанхи членĕсем пĕртан пулсан, вĕсен хыçри членĕсем те пĕртанах пулмалла; вара:

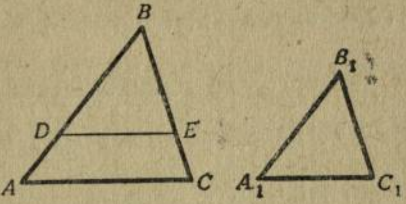
$$B_1C_1 = BE.$$

Халĕ ĕнтĕ DBE тата $A_1B_1C_1$ треугольниксен пĕртан енсем хушшинчи пĕртан кĕтессем ($\angle B = \angle B_1$) пурри курăнсах тăрать;

вара çак треугольниксем пӗртан. Анчах та, *DBE* треугольникпе $\triangle ABC$ пӗрьевӗрлӗ, çавӑнпа та, $\triangle A_1B_1C_1$ тата $\triangle ABC$ пӗрьевӗрлӗ.



172 черт.



173 черт.

3) Калӑпӑр, *ABC* тата $A_1B_1C_1$ треугольниксенче (173 черт.) панӑ:

$$\frac{AB}{A_1B_1}=\frac{BC}{B_1C_1}=\frac{AC}{A_1C_1}. \tag{1}$$

Çакӑн пек треугольниксем пӗрьевӗрлине кӑтартса памалла.

Чертежсене малтанхи пекех туса, $\triangle DBE=\triangle A_1B_1C_1$ кӑтартса парӑпӑр. Вара *ABC* тата *DBE* треугольниксенчен çакӑн пек пулать:

$$\frac{AB}{DB}=\frac{BC}{BE}=\frac{AC}{DE}. \tag{2}$$

Отношенисен çак йӗркине панӑ отношенисен (1) йӗркипе танлаштарсан, вӗсен малтанхи отношенийӗсем пӗртаннине куратпӑр, вара вӗсен ытти отношенийӗсем те пӗртанах пулмалла, çавӑнпа та:

$$\frac{BC}{B_1C_1}=\frac{BC}{BE},$$

çакӑнтан ӗнтӗ

$$B_1C_1=BE$$

тата

$$\frac{AC}{A_1C_1}=\frac{AC}{DE},$$

çакӑнтан

$$A_1C_1=DE.$$

Халӗ ӗнтӗ *DBE* тата $A_1B_1C_1$ треугольниксен виçшер пӗртан енсем пуррине куратпӑр; çавӑнпа треугольниксем пӗртан пулаççӗ. Анчах вӗсенчен пӗрийӗ, *DBE* треугольник *ABC* треугольникпе пӗрьевӗрлӗ; çапла вара, тепри те $\triangle A_1B_1C_1$ тата $\triangle ABC$ пӗрьевӗрлӗ пулаççӗ.

162. Доказательствӑн меслечӗ тӗлӗшпе асӑрхаттарни. Маларах кӑтартса панӑ виçӗ теоремӑра та доказательствӑн меслечӗ пӗр пекех пулса пынине асӑрхани усӑллӑ. Ку меслет акӑ мӗнле: малтан пысӑк треугольникӗн енӗ çине пӗчӗккин пӗр пек енне хуратпӑр та пысӑк треугольникӗн тепӗр енӗпе параллельлӗ тӳрӗ лини хыватпӑр, вара пирӗн панӑ пысӑк треугольникпе пӗрьевӗрлӗ пулӑшакан пӗчӗк треугольник пулать. Çакӑн хыççӑн кӑтартса панă теоремăсем тăрăх тата пĕрьевĕрлĕ треугольниксен свойствисем тăрăх, эпир пулăшакан треугольник панă пĕчĕк треугольникпе пĕртаннине тупатпăр, юлашкинчен вара панă треугольниксем пĕрьевĕрлине кăтартса паратпăр.

Тӳркĕтеслĕ треугольниксен пĕрьевĕрлĕхĕн паллăлăхĕсем.

163. Ăраснах кăтартса пама кирлех те мар икĕ паллăлăх. Тӳрĕ кĕтессем пĕр-пĕринпе яланах пĕртан пулнă пирки тата треугольниксем пĕрьевĕрлин паллăлăхĕсене кăтартса пани тăрăх, эпир акă мĕн калама пултаратпăр:

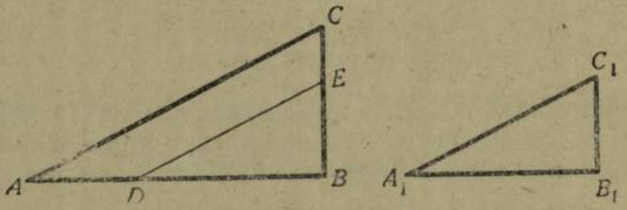
Тӳркĕтеслĕ икĕ треугольникре:

1) ***пĕрин шĕвĕр кĕтесĕ теприн шĕвĕр кĕтесĕпе пĕртан пулсан,*** е

2) ***пĕрин катечĕсем теприн катечĕсемпе пропорциллĕ пулсан, вара çакăн пек треугольниксем пĕрьевĕрлĕ пулаççĕ.***

164. Ăрасна доказательство ыйтакан паллăлăх.

Теорема. ***Пĕр треугольникĕн гипотенузипе катечĕ теприн гипотенузипе катетне пропорциллĕ пулсан, вара çакăн пек треугольниксем пĕрьевĕрлĕ.***



174 черт.

Калăпăр, ABC тата $A_1B_1C_1$ икĕ треугольник (174 черт.), вĕсен B тата B_1 кĕтесĕсем тӳрĕ кĕтессем тата

$$\frac{AB}{A_1B_1}=\frac{AC}{A_1C_1}. \tag{1}$$

Халĕ ĕнтĕ çакăн пек треугольниксем пĕрьевĕрлине кăтартса памалла.

Доказательствăна тунă чухне эпир маларах усă курнă меслетсемпех усă курăпăр. AB ен çине $BD=A_1B_1$ хурăпăр та, $DE \parallel AC$ тăвăпăр. Вара пулăшакан $\triangle DBE$, $\triangle ABC$ пĕрьеверлĕскер, пулать. Халĕ ĕнтĕ çак треугольник тата $\triangle A_1B_1C_1$ пĕртаннине кăтартса парăпăр. ABC тата DBE треугольниксем пĕрьевĕрлинчен акă мĕн пулать:

$$\frac{AB}{DB}=\frac{AC}{DE}. \tag{2}$$

Çак пропорцие панă (1) пропорципе танлаштарса пăхсан, вĕсен малтанхи отношенийĕсем пĕр пеккине куратпăр; çапла вара, вĕсен иккĕмĕш отношенийĕсем те пĕртан, урăхла каласан:

$$\frac{AC}{DE}=\frac{AC}{A_1C_1},$$

кунтан

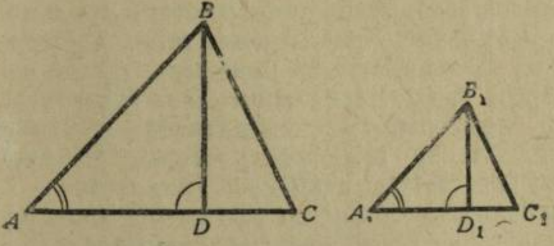
$$DE=A_1C_1.$$

DBE тата $A_1B_1C_1$ треугольниксен пĕртан гипотенузăсем тата пĕртан катетсем пур; çапла вара вĕсем хăйсем те пĕртан; анчах та вĕсенчен пĕрийĕ ABC треугольникпе пĕрьевĕрлĕ пирки, унпа вара тепĕр треугольникĕ те пĕрьевĕрлĕ.

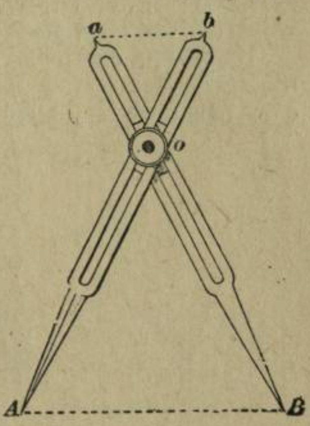
165. Теорема (çӳллĕшсен отношенийĕ тĕлĕшĕпе). ***Пĕрьевĕрлĕ треугольниксенче пĕр пек енĕсем пĕр пек çӳллĕшĕсемпе пропорциллĕ***, урăхла каласан, пĕр пек енĕсем çине антарнă çӳллĕшĕсемпе пропорциллĕ.

Чăнах та, ABC тата $A_1B_1C_1$ треугольниксем (175 черт.) пĕрьевĕрлĕ пулсан, вара тӳркĕтеслĕ BAD тата $B_1A_1D_1$ треугольниксем те пĕрьевĕрлĕ ($\angle A=\angle A_1$ тата $\angle D=\angle D_1$) çавăнпа та:

$$\frac{BD}{B_1D_1}=\frac{AB}{A_1B_1}=\frac{BC}{B_1C_1}=\frac{AC}{A_1C_1}.$$



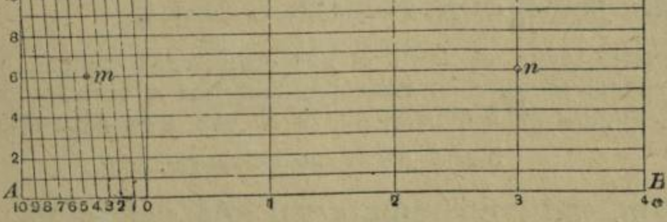
175 черт.



176 черт.

166. Пайламалли циркуль. Пайламалли циркульпе усă курасси треугольниксен пĕрьевĕрлĕхĕ çинче никĕсленсе тăрать. Унпа усă курса панă пысăк мар кирек епле татăка та темĕн чухлĕ пĕртан пайсене пайлама пулать.

Çак прибор (176 черт.) вĕçĕсене шĕвĕртнĕ икĕ пĕр пек Ab тата Ba ураран тăрать. Урисене тăрăхла май хушăксем тунă, çак хушăксем тăрăх винта хускатса çӳреме тата ăна ура çине кирлĕ вырăна çирĕплетсе лартма пулать. Урисене винт тавра çавăрка-



177 черт.

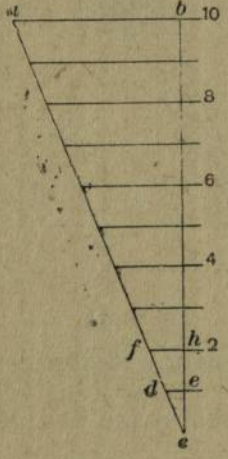
ласа сарма та, ансăрлатма та пулать. Калăпăр, AB татăка виçĕ пĕртан пая пайламалла. Çакна тăвас тесе, винта AO хушă Ob хушăран 3 хут вăрăмрах пулмалла O точкăра çирĕплетсе лартăпăр (çакна тума йывăр мар, мĕншĕн тесен хушăкăн хĕрринче пайланă йĕрсем тата цифрăсем пур). Унтан циркуле саратпăр та ăна чертежра кăтартнă пек вырнаçтарса лартăпăр. Вара a тата b вĕçĕсен хушши AB вăрăмăшĕн $^1/_3$ чухлĕ пулать, мĕншĕн тесен AOB тата aOb треугольниксен пĕрьевĕрлĕхĕнчен акă мĕн тухса тăрать:

$$ab:AB=Ob:OA=1:3.$$

Вара циркуле тепĕр майлă çавăрса çак тепĕр пуçĕпе AB татăк çине ab татăка 3 хут хурса çеç тухмалла.

167. Урлăлла масштаб. Треугольниксен пĕрьевĕрлĕхĕн свойствисене кура тата урлăлла масштаба тăвасси те никĕсленсе тăрать. Урлăлла масштаба 177 чертежра кăтартса панă.

Калăпăр, AB линие шултăран пайлани пĕчĕклетнĕ метрсем пулаççĕ. Вара вĕтĕ пайланисем дециметрсем пулаççĕ. Сантиметрсем тăвас тесен, вĕтĕ пайсене татах 10-шар пĕртан пая пайлама тивет; паллах, линиллĕ масштабра (урăхла каласан, AB лини çинче хăйĕнче) çак пайсем ытлашши вĕтĕ пулнă пирки вĕсене тума май килмен пулĕччĕ. Урлăлла масштаб сантиметрсене те шутласа илме май парать. Çакна ăнлантарса парас тесе, эпир çав тӳркĕтеслĕ ансăр треугольнике пысăклатса уйрăмăн ӳкерсе илĕпĕр (178 черт.). Пирĕн 177 чертежра ăна сылтăм енче туса кăтартнă.



178 черт.

Параллельлĕ линисем çак треугольникрен пĕрьевĕрлĕ треугольниксем тата-тата илеççĕ, çавăнпа та эпир çакăн пек пропорцисем çырса тухма пултаратпăр:

$$de:ab=ce:cb=1:10;$$

$$fh:ab=ch:cb=2:10,$$ малалла та çаплах;

çавăнпа,

$$de=\frac{1}{10}ab;\ fh=\frac{2}{10}ab$$ тата малалла та çаплах.

Халĕ ĕнтĕ, эпир пĕр-пĕр татăка циркульпе виçсе илсе ăна хамăрăн масштаб çине m точкăран пуçласа n точкăна çити вырнаçтарса хурсан (177 черт.) çак татăк акă мĕн вăрăмăш пулать:

$$3\ м\ 4\ дм\ 6\ см=3{,}46\ см.$$

III. МНОГОУГОЛЬНИКСЕН ПĔРЬЕВĔРЛĔХĔ.

168. Определени. Пĕр ятлă икĕ многоугольникрен[1] пĕрин кĕтесĕсем теприн кĕтесĕсемпе пĕртан пулсан, тата çак пĕртан

---

[1] Многоугольниксен пĕртан хисеп кĕтессем, çапла вара, пĕртан хисеп енсем те пулсан, вĕсене вара пĕр ятлă теççĕ.

кӗтессене хупласа тăракан енсем пропорциллӗ пулсан, çакăн пек многоугольниксене вара **пӗрьевӗрлӗ** теççӗ. Çапла ӗнтӗ, $ABCDE$ многоугольник $A_1B_1C_1D_1E_1$ многоугольникпе пӗрьевӗрлӗ (180 черт.) пулсан, $\angle A=\angle A_1$, $\angle B=\angle B_1$, $\angle C=\angle C_1$, $\angle D=\angle D_1$, $\angle E=\angle E_1$ тата

$$\frac{AB}{A_1B_1}=\frac{BC}{B_1C_1}=\frac{CD}{C_1D_1}=\frac{DE}{D_1E_1}=\frac{EA}{E_1A_1}.$$

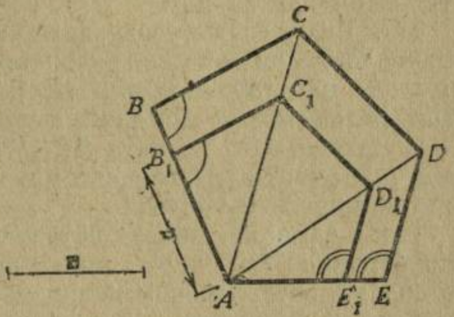
Çакăн пек чухне многоугольниксен AB тата A_1B_1, BC тата B_1C_1, CD тата C_1D_1 т. ыт. те **пӗр пек енсем** теççӗ.

Çавăн йышши многоугольниксем пулма пултарнине малашнехи задачăран куратпăр.

169. Задача. *$ABCDE$ многоугольник тата a татăк панă. Панă многоугольникпе пӗрьевӗрлӗ тепӗр многоугольник тумалла; çӗнӗ многоугольникӗн панă многоугольникӗн AB енӗпе пӗр пек енӗ панă a татăкпа пӗртан пултăр* (179 черт.).

Çак задачăна акă мӗнле майпа тума ансатрах. AB ен çине $AB_1=a$ хурăпăр. ($a>AB$ пулсан, вара B_1 точка AB ене малалла тăсна пайӗ çинче пулать). Унтан A точкăран мӗнпур диагональсене хывăпăр та $B_1C_1 \parallel BC$ тата $C_1D_1 \parallel CD$, $D_1E_1 \parallel DE$ тăвăпăр.

Вара $ABCDE$ многоугольникпе пӗрьевӗрлӗ $A_1B_1C_1D_1E_1$ многоугольник пулать.



179 черт.

Чăнах та, чи малтанах, вӗсенчен пӗрин кӗтесӗсем теприн килӗшӳллӗ кӗтесӗсемпе пӗртан; вӗсен A кӗтесӗ пӗрлехи кӗтес $\angle B=\angle B_1$ тата $\angle E_1=\angle E$ (параллельлӗ тӳрӗ линисен пӗр пек кӗтесӗсем пулнă пирки); $\angle C_1=\angle C$ тата $\angle D_1=\angle D$, мӗншӗн тесен ку кӗтессем пӗр-пӗринпе пӗртан пайсенчен тăраççӗ.

Иккӗмӗшӗнчен, пирӗн тата пропорци пулать: AB_1C_1 тата ABC треугольниксен пӗрьевӗрлӗхӗнчен:

$$\frac{AB_1}{AB}=\frac{B_1C_1}{BC}=\frac{AC_1}{AC};$$

$\triangle AC_1D_1$ тата $\triangle ACD$ пӗрьевӗрлӗхӗнчен:

$$\frac{AC_1}{AC}=\frac{C_1D_1}{CD}=\frac{AD_1}{AD};$$

$\triangle AD_1E_1$ тата $\triangle ADE$ пӗрьевӗрлӗхӗнчен:

$$\frac{AD_1}{AD}=\frac{D_1E_1}{DE}=\frac{AE_1}{AE}.$$

Анчах та, пӗрремӗш йӗркери виççӗмӗш отношени иккӗмӗш йӗркери пӗрремӗш отношенипе, тата иккӗмӗш йӗркери виççӗмӗш отношени виççӗмӗш йӗркери пӗрремӗш отношенипе пӗртан пулнă пирки, çак 9 отношенийĕ те пĕр-пĕринпе пĕртан. Вĕсенчен диагональсем кĕрекен отношенисене кăларса пăрахăпăр та вара çапла çырма пултаратпăр:

$$\frac{AB_1}{AB}=\frac{B_1C_1}{BC}=\frac{C_1D_1}{CD}=\frac{D_1E_1}{DE}=\frac{AE_1}{AE}.$$

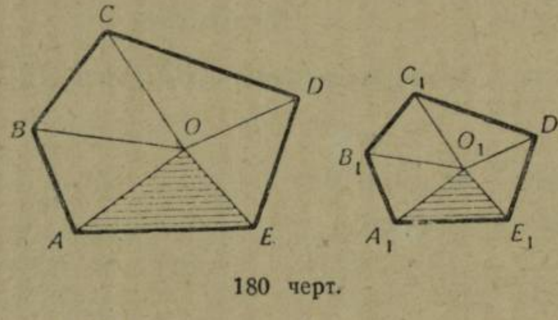
Çапла ĕнтĕ, пĕр ятлă $ABCDE$ тата $A_1B_1C_1D_1E_1$ многоугольниксен килĕшÿллĕ кĕтесĕсем пĕртан тата пĕр пек енĕсем пропорциллĕ пулнине куратпăр; çапла вара çак многоугольниксем пĕрьевĕрлĕ пулаççĕ.

170. Асăрхаттарни. Треугольниксен кĕтесĕсем пĕртан пулсан, енĕсем пропорциллĕ пулнине, е тепĕр майлă, енĕсем пропорциллĕ пулсан, кĕтесĕсем пĕртан пулнине куртăмăр (161 §); çакăн пирки те ĕнтĕ треугольниксемшĕн кĕтессем пĕртан пулни çеç те, е тата енĕсем пропорциллĕ пулни çеç те пĕрьевĕрлĕхе кăтартса пама çителĕклĕ паллăлăхсем пулаççĕ. Многоугольниксемшĕн, вĕсен пĕрьевĕрлĕхне кăтартса пама, кĕтессем пĕртан пулни çеç, е тата енĕсем пропорциллĕ пулни çеç çителĕксĕр; тĕслĕхрен, квадратпа прямоугольникĕн кĕтесĕсем пĕртан, анчах енĕсем пропорциллĕ мар; квадратпа ромбăн енĕсем пропорциллĕ, анчах кĕтесĕсем пĕртан мар.

171. Теорема (пĕрьевĕрлĕ многоугольниксене пĕрьевĕрлĕ треугольниксем çине пайласси çинчен). ***Пĕрьевĕрлĕ многоугольниксене пĕрьевĕрлĕ тата пĕр пекех вырнаçнă пĕртан хисеп треугольниксене пайлама пулать.***

Сăмахран, $ABCDE$ тата $AB_1C_1D_1E$ пĕрьевĕрлĕ многоугольниксене (179 черт.) диагональсемпе пĕр пек вырнаçнă пĕрьевĕрлĕ треугольниксене пайланă.

Татах çакăн пек тĕслĕх кăтартса парăпăр. $ABCDE$ многоугольник варринче (180 черт.) кирек епле те пулин O точка илĕпĕр те ăна многоугольникĕн мĕнпур тăррисемпе пĕрлештерĕпĕр. Вара $ABCDE$ многоугольник хăйĕнчи енсен хисепĕ чухлĕ треугольнике пайланать. Вĕсенчен пĕрне, сăмахран, ADE треугольнике (чертеж çинче урлă-урлă йĕрсемпе хуратнăскере) илĕпĕр те тепĕр многоугольникĕн пĕр пек енĕ çинче $O_1A_1E_1$ тата $O_1E_1A_1$ кĕтессем, OAE тата OEA кĕтессемпе пĕртанскерсене, тăвăпăр; линисем пĕрлешнĕ O_1 точкăна $A_1B_1C_1D_1E_1$ многоугольникĕн ытти тăррисемпе пĕрлештерĕпĕр. Вара çак многоугольник та малтанхи многоугольникри чухлех треугольниксене пайланать. Халĕ ĕнтĕ малтанхи многоугольникри треугольниксем тепĕр многоугольникри килĕшÿллĕ треугольниксемпе пĕрьевĕрлине кăтартса парăпăр. $\triangle AOE$, чертежа тунă тăрăхах, $\triangle A_1O_1E_1$ пĕрьевĕрлĕ.



180 черт.

Юнашар ABO тата $A_1B_1O_1$ треугольниксем пӗрьевӗрлине кӑтартса парас тесен, многоугольниксен пӗрьевӗрлӗхӗнчен ҫакӑн пек пулмаллине асра тытӑпӑр:

$$\angle BAE = \angle B_1A_1E_1 \text{ тата } \frac{BA}{B_1A_1} = \frac{AE}{A_1E_1}, \qquad (1)$$

AOE тата $A_1O_1E_1$ треугольниксем пӗрьевӗрлӗхӗнчен акӑ мӗнле пулать:

$$\angle OAE = \angle O_1A_1E_1 \text{ тата } \frac{AO}{A_1O_1} = \frac{AE}{A_1E_1}. \qquad (2)$$

(1) тата (2) пӗртанлӑхсенчен акӑ мӗн пулать:

$$\angle BAO = \angle B_1A_1O_1 \text{ тата } \frac{BA}{B_1A_1} = \frac{AO}{A_1O_1}.$$

Халӗ ӗнтӗ, ABO тата $A_1B_1O_1$ треугольниксен пропорциллӗ енӗсем хушшинчи пӗртан кӗтессем пуррине куратпӑр: ҫавӑнпа вӗсем пӗрьевӗрлӗ пулаҫҫӗ.

Ҫакӑн пек майпах BCO тата $B_1C_1O_1$ треугольниксен пӗрьевӗрлӗхне унтан COD тата $C_1O_1D_1$ т. ыт. треугольниксен пӗрьевӗрлӗхне кӑтартса парӑпӑр. Кунта икӗ многоугольниксенче пӗрьевӗрлӗ треугольниксем пӗр пекех вырнаҫса тӑнине куратпӑр.

172. Теорема (пӗрьевӗрлӗ многоугольниксен периметрӗ тӗлӗшӗпе). ***Пӗрьевӗрлӗ многоугольниксен периметрӗсен отношенийӗ пӗр пек енӗсен отношенийӗпе пӗртан.***

Калӑпӑр, $ABCDE$ тата $A_1B_1C_1D_1E_1$ многоугольниксем (180 черт.) пӗрьевӗрлӗ; вара определени тӑрӑх:

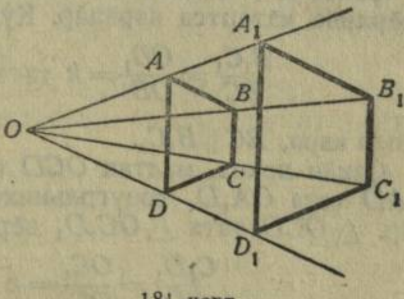
$$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{CD}{C_1D_1} = \frac{DE}{D_1E_1} = \frac{EA}{E_1A_1}.$$

Пӗртан отношенисен йӗрки пулсан, вара малти мӗнпур членӗсен суммийӗпе хыҫалти мӗнпур членӗсен суммин отношенийӗ кирек хӑш малти членӗпе хыҫалти членӗн отношенийӗпе пӗртан, ҫавӑнпа та

$$\frac{AB+BC+CD+DE+EA}{A_1B_1+B_1C_1+C_1D_1+D_1E_1+E_1A_1} = \frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \ldots$$

173. Пӗрьевӗрлӗхӗн коэфициенчӗ. Икӗ пӗрьевӗрлӗ многоугольникӗн (е треугольникӗн) пӗр пек енӗсен отношенине ҫак многоугольниксен (е треугольниксен) **пӗрьевӗрлӗх коэфициенчӗ** теҫҫӗ.

174. Многоугольниксене пӗрьевӗрлӗн улӑштарасси. Пӗрьевӗрлӗхӗн панӑ коэфициенчӗ тӑрӑх, панӑ многоугольникпе пӗрьевӗрлӗ многоугольник тӑвассине панӑ многоугольника пӗрьевӗрлӗн улӑштарасси теҫҫӗ.



181 черт.

Панă многоугольникрен ăна пĕрьевĕрлĕ многоугольник тăвасси çинчен 169 § каласа панă тĕслĕх пĕрьевĕрлĕ улăштарассин ăрасна тĕслĕхĕ çеç пулать. Çакăн пек улăштарассин кирек хăçан та юрăхлă меточĕ акă мĕнле. Калăпăр, пирĕн $ABCD$ четырехугольнике, пĕрьевĕрлĕхĕн коэфициенчĕ k пулнă чухне, пĕрьевĕрлĕ улăштармалла (181 черт.). Тӳремçи çинче мĕнле те пулин O точкăна илĕпĕр те ăна панă четырехугольникĕн тăррисемпе пĕрлештерĕпĕр, вара OA, OB, OC тата OD тӳрĕ линисем пулаççĕ. OA тӳрĕ лини çине O точкăран пуçласа A еннелле OA_1 татăка, $k \cdot OA$ пĕртанскере, хурăпăр, вара $OA_1 = k \cdot OA$ $\left(\text{чертеж çинче } k = \frac{5}{3}\right)$.

OB тӳрĕ линие малалла тăсăпăр та ун çине O точкăран пуçласа B еннелле OB_1 татăка, $k \cdot OB$ пĕртанскере, хурăпăр, вара $OB_1 = k \cdot OB$.

OC тата OD тӳрĕ линисемпе те çакăн пекех тăвăпăр. Вара вĕсем çинче C_1 тата D_1 точкăсем тупатпăр, кунта $OC_1 = k \cdot OC$ тата $OD_1 = k \cdot OD$. Унтан A_1, B_1, C_1 тата D_1 точкăсене йĕркерен пĕрлештерĕпĕр те, пирĕн вара шыракан $A_1B_1C_1D_1$ четырехугольник пулать. Чăнах та, $OA_1 = k \cdot OA$, $OB_1 = k \cdot OB$, $OC_1 = k \cdot OC$, тата $OD_1 = k \cdot OD$ пĕртанлăхсенчен акă мĕнле пулать:

$$\frac{OA_1}{OA} = \frac{OB_1}{OB} = \frac{OC_1}{OC} = \frac{OD_1}{OD} = k.$$

OAB тата OA_1B_1 треугольниксене танлаштарса пăхăпăр. Вĕсен тăрринче пĕрлехи кĕтес O пур, кунсăр пуçне тата

$$\frac{OA_1}{OA} = \frac{OB_1}{OB},$$

çапла ĕнтĕ, çак треугольниксем пĕрьевĕрлĕ (161 §, 2-мĕш тĕслĕх). Вĕсен пĕрьевĕрлĕхĕнчен акă мĕнле пулать:

$$\frac{A_1B_1}{AB} = \frac{OA_1}{OA} = k \text{ тата } \angle OAB = \angle OA_1B_1, \tag{1}$$

çапла вара, $AB \parallel A_1B_1$ (73 §).

Çакăн пек майпах, OBC тата OB_1C_1 треугольниксем те пĕрьевĕрлине кăтартса парăпăр. Кунтан акă мĕнле пулать:

$$\frac{B_1C_1}{BC} = \frac{OB_1}{OB} = k \text{ тата } \angle OBC = \angle OB_1C_1, \tag{2}$$

çапла вара, $BC \parallel B_1C_1$.

Çакăн пекех, малтан OCD тата OC_1D_1 треугольниксен, унтан OAD тата OA_1D_1 треугольниксен пĕрьевĕрлĕхне кăтартса парăпăр. $\triangle OCD$ тата $\triangle OC_1D_1$ пĕрьевĕрлĕхĕнчен:

$$\frac{C_1D_1}{CD} = \frac{OC_1}{OC} = k \text{ тата } CD \parallel C_1D_1. \tag{3}$$

$\triangle OAD$ тата $\triangle OA_1D_1$ пĕрьевĕрлĕхĕнчен:

$$\frac{A_1D_1}{AD}=\frac{OD_1}{OD}=k \text{ тата } AD \parallel A_1D_1. \qquad (4)$$

Çак (1), (2), (3) тата (4) пĕртанлăхсенчен акă мĕн пулать:

$$\frac{A_1B_1}{AB}=\frac{B_1C_1}{BC}=\frac{C_1D_1}{CD}=\frac{A_1D_1}{AD}=k.$$

Кунсăр пуçне, $\angle DAB=\angle D_1A_1B_1$ (параллельлĕ енĕсен кĕтесĕсем пулнă пирки) (79 §).

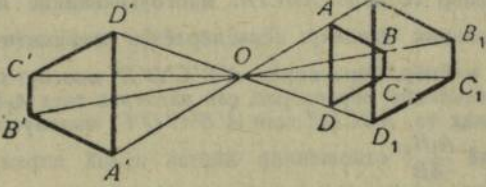
Çак сăлтав пиркиех кĕтессем те пĕртан пулаççĕ:

$$\angle ABC=\angle A_1B_1C_1,$$
$$\angle BCD=\angle B_1C_1D_1,$$
$$\angle CDA=\angle C_1D_1A_1.$$

Çапла ĕнтĕ, $ABCD$ тата $A_1B_1C_1D_1$ четырехугольниксен килĕшӳллĕ кĕтесĕсем пĕртан тата пĕр пек енĕсем пропорциллĕ пулнине куратпăр; çавăнпа çак четырехугольниксем пĕрьевĕрлĕ, вĕсен пĕрьевĕрлĕхĕн коэфициенчĕ k пулать.

175. Пĕрьевĕрлĕхĕн центрĕ. Многоугольнике 174 § каласа панă пек пĕрьевĕрлĕ улăштарнă чухне O точкăна икĕ многоугольникăн **пĕрьевĕрлĕхĕн центрĕ** теççĕ.

Многоугольниксене пĕрьевĕрлĕ тата урăхла майпа та улăштарма пулать. O точкăна илĕпĕр те ăна $ABCD$ четырехугольникăн тăррисемпе пĕрлештерсе. OA, OB... тӳрĕ линие O хыçнелле малалла тăсăпăр; унтан вара OA тӳрĕ лини çине O точкăран пуçласа A точкăна хирĕçле еннелле OA' татăка, $k \cdot OA$ пĕртанскере, хурăпăр. Çакăн пекех OB, OC,... тӳрĕ линисен малалла тăснă пайĕсем çине те, O точкăран пуçласа OB', OC',... татăксене, пĕр пек $k \cdot OB, k \cdot OC$,... пĕртанскерсене, хурăпăр (182 черт.); вара A', B', C' тата D' точкăсене йĕркерен пĕрлештерсе, $A'B'D'C'$ четырехугольник тăватпăр; ку четырехугольник, O точкăпа илсен, $A_1B_1C_1D_1$ четырехугольникпе симметриллĕ пулать. Çапла ĕнтĕ, $A'B'C'D'$ тата $A_1B_1C_1D_1$ четырехугольниксем пĕртан, вара $ABCD$ тата $A'B'C'D'$ четырехугольниксем пĕрьевĕрлĕ, вĕсен пĕрьевĕрлĕхĕн коэфициенчĕ k пулать. Малтанхи майпа улăштарсан, O точкăна многоугольниксен пĕрьевĕрлĕхĕн **тулашĕнчи центрĕ** (181 черт); иккĕмĕш майпа улăштарсан, вĕсен пĕрьевĕрлĕхĕн **шалти центрĕ** (182 черт.) теççĕ.

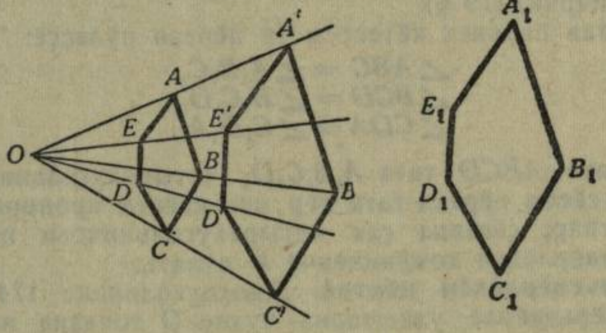


182 черт.

Асăрхаттарни. Многоугольниксене пĕрьевĕрлĕ улăштарнă чухне тулашĕнчи центрпа та, шалти центрпа та усă курма юрать. Икĕ тĕрлĕ центра та кирек епле те суйласа илме пулать. Тĕслĕхрен, многоугольникĕн пĕр-пĕр тăррине пĕрьевĕрлĕхĕн тулашĕнчи центрĕ вырăнне суйласа илсе многоугольнике пĕрьевĕрлĕ улăштарсан, вара эпир многоугольниксене пĕрьевĕрлĕ улăштарассин 169 § каласа панă меле тупатпăр.

176. Пĕрьевĕрлĕ многоугольниксене перспективăра вырнаçтарса тухасси. $ABCD$ тата $A_1B_1C_1D_1$ икĕ многоугольнике 181 чертежри пек вырнаçтарнин, $ABCD$ тата $A'B'C'D'$ многоугольниксене 182 чертежри пек вырнаçтарнин çакăн пек свойствăсем пур: 1) икĕ многоугольникĕн те пĕр пек енĕсем параллельлĕ; 2) пĕр пек тăррисене пĕрлештерекен тӳрĕ линисем пĕр точкăра пĕрлешеççĕ.

Икĕ многоугольнике çакăн пек вырнаçтарнине **перспективăра вырнаçтарни** теççĕ. Халĕ ĕнтĕ пĕрьевĕрлĕ кирек епле икĕ многоугольнике те çакăн пек вырнаçтарма май килнине кăтартса парăпăр.



183 черт.

Калăпăр, пĕрьевĕрлĕ икĕ многоугольник $ABCDE$ тата $A_1B_1C_1D_1E_1$ панă (183 черт.). Кирек епле те пулин O точкăна пĕрьевĕрлĕхĕн центрĕ вырăнне илĕпĕр те панă $ABCDE$ многоугольникпе перспективăра пĕрьевĕрлĕ многоугольник тăвăпăр; пĕрьевĕрлĕхĕн коэфициентне $\frac{A_1B_1}{AB}$ отношенипе пĕртан хисепе илĕпĕр. Вара пирĕн $A'B'C'D'E'$ многоугольник пулать; Вăл $ABCDE$ многоугольникпе пĕрьевĕрлĕ, çав вăхăтрах тата $A_1B_1C_1D_1E_1$ многоугольникпе пĕртан. Чăнах та, $ABCDE$ тата $A'B'C'D'E'$ многоугольниксен пĕрьевĕрлĕхĕн коэфициенчĕ $\frac{A_1B_1}{AB}$ отношенипе пĕртан пулнă пирки, вара $\frac{A'B'}{AB}=\frac{A_1B_1}{AB}$, кунтан ĕнтĕ $A'B'=A_1B_1$. $A_1B_1C_1D_1E_1$ тата $A'B'C'D'E'$ многоугольниксем пĕр-пĕринпе пĕрьевĕрлĕ, çапла вара:

$$\frac{A'B'}{A_1B_1}=\frac{B'C'}{B_1C_1}=\frac{C'D'}{C_1D_1}=\frac{D'E'}{D_1E_1}=\frac{A'E'}{A_1E_1}.$$

Çавăнпа та, $A'B'=A_1B_1$ пĕртанлăхран акă мĕн тухса тăрать: $B'C'=B_1C_1$, $C'D'=C_1D_1$, $D'E'=D_1E_1$, $A'E'=A_1E_1$. Кунсăр пуçне, $A_1B_1C_1D_1E_1$ многоугольникĕн кĕтесĕсем $A'B'C'D'E'$ многоугольникăн килĕшӳллĕ кĕтесĕсемпе пĕртан, çавăнпа çак многоугольниксем те пĕр-пĕринпе пĕртан. $A_1B_1C_1D_1E_1$ многоугольнике $A'B'C'D'E'$ многоугольник çине хурсан, вĕсем пĕр-пĕрин çине вырнаçăннă пулĕççĕ, вара $A_1B_1C_1D_1E_1$ многоугольник $ABCDE$ многоугольникпе перспективăра вырнаçнă пулĕччĕ.

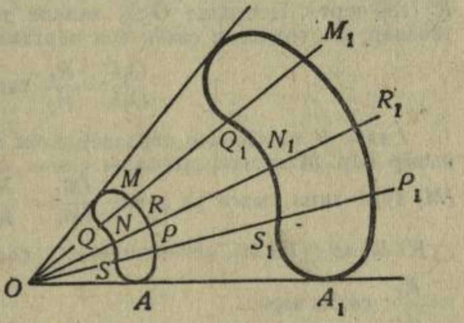
IV. КИРЕК ЕПЛЕ ФОРМĂЛЛĂ ФИГУРĂСЕН ТЕ ПĔРЬЕВĔРЛĔХĔ.

177. Многоугольниксене пĕрьевĕрлĕ улăштарассин майĕ, çӳлерех каласа панăскер, фигурăна кукăр линисемпе тунă чухнехи пĕрьевĕрлĕхĕн тĕслĕхне ăнлантарма та май парать. Чăнах та, çакăн пек майпа усă курса, панă кирек епле фигурăна та пĕрьевĕрлĕ фигура тума пулать. Калăпăр, тĕслĕхрен, тӳремçи çинче ирĕклĕн суйласа илнĕ A фигурăна панă (184 черт.).

Çак фигурăн тӳремçийĕ çинче O точкăна суйласа илĕпĕр те ăна панă A фигурăн тĕрлĕ точкисемпе M, N, P.... пĕрлештерĕпĕр. Çапла майпа тунă OM, ON, OP.... кашни тӳрĕ лини çинех пропорциллĕ кĕскетсе е вăрăмлатса OM_1, ON_1, OP_1,... татăксем хурăпăр.

Вара: $\frac{OM_1}{OM}=\frac{ON_1}{ON}=\frac{OP_1}{OP}=\dots$ малалла та çаплах.

$M_1, N_1, P_1, \dots$ точкăсем çĕнĕ A_1 фигура çинче пулаççĕ. Эпир A фигура çинче $M, N, P, \dots$ точкăсене мĕн чухлĕ ытларах илетпĕр, A_1 фигура çинче эпир çавăн чухлĕ ытларах точкăсем тупатпăр.



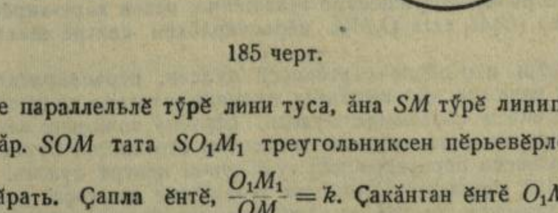
184 черт.

Мĕнпур A_1 фигурăна тăвас тесен, O точкăран A фигурăн мĕнпур точкисем патнелле тӳрĕ линисем хывмалла та çав тӳрĕ линисем çинче вара A_1 фигурăн килĕшӳллĕ точкисене тумалла. Çапла майпа тунă A_1 фигурăна A фигурăпа пĕрьевĕрлĕ фигура теççĕ. Ăрасна тĕслĕхсенче, A_1 фигурăна тăвас тесен, A фигурăн мĕнпур точкисем патнелле тӳрĕ линисем хывма кирлех те мар, унăн темиçе точкине тумалла та унтан, A фигурăн ăрасна свойствисемпе усă курса, пĕтĕм A_1 фигурăна туса лартмалла. Çапла A фигура многоугольник пулнă чухне, O точкăна çак многоугольникăн тăррисемпе пĕрлештерсе пĕрьевĕрлĕ многоугольникăн тăррисене тунă хыççăн çак тăррисене тӳрĕ линин татăкĕсемпе пĕрлештерни те çителĕклĕ. A фигурăран A_1 фигура патне çакăн пек куçнине A фигурăна пĕрьевĕрлĕ улăштарни теççĕ. Фигурăсене çакăн пек улăштарни геометрилле улăштарусен питĕ паха тĕслĕхĕ, практикăра анлăн усă куракан тĕслĕхĕ пулса тăрать. Кинора экран çинче кăтартакан картина пленка çине ӳкерсе илнĕ картинăпа пĕрьевĕрлĕ; çурт-йĕрпе вĕсен фасачĕн планĕсен технически чертежĕсем, вырăнăн планĕсем, хуласен планĕсем т. ыт. те чăн-чăн япаласене пĕрьевĕрлĕ улăштарса ӳкернĕ пирки пулаççĕ.

178. Çавракăшсен пĕрьевĕрлĕхĕ. Çавракăшпа пĕрьевĕрлĕ фигура хăй те çавракăш пулнине кăтартса парăпăр.

Теорема. ***Çавракăшăн точкисене пĕр-пĕр точкăпа пĕрлештерекен пайăркасен татăкĕсене панă отношенипе пайлакан геометрилле вырăн çавракăш пулать.***

Калăпăр, центрне O точкăра туса R радиуслă çавракăш панă (185 черт.). Кирек епле те пулин S точка суйласа илĕпĕр те, ăна O точкăпа пĕрлештерсе SO татăка O_1 точкăра пĕр-пĕр $\frac{SO_1}{SO}=k$ отношенипе пайлăпăр.



185 черт.

Панă çавракăш çинчи пĕр-пĕр M точкăна S точкăпа пĕрлештерĕпĕр. SM татăк çинче M_1 точкăна, $\frac{SM_1}{SM}=\frac{SO_1}{SO}=k$ пулмалласкере, тупăпăр. Çакна тупас тесе, O_1 точкăран OM тӳрĕ линие параллельлĕ тӳрĕ лини туса, ăна SM тӳрĕ линипе пĕрлешиччен малалла тăсăпăр. SOM тата SO_1M_1 треугольниксен пĕрьевĕрлĕхĕнчен $\frac{O_1M_1}{OM}=\frac{SO_1}{SO}$ тухса тăрать. Çапла ĕнтĕ, $\frac{O_1M_1}{OM}=k$. Çакăнтан ĕнтĕ O_1M_1 татăкăн вăрăмăшне тупатпăр: $O_1M_1=k\cdot OM$, е $O_1M_1=k\cdot R$.

Халĕ ĕнтĕ, O_1M_1 хисеп M точка панă çавракăш çинче хăш вырăнта пулнинчен килмен, яланхи хисеп пулни курăнсах тăрать. Çапла ĕнтĕ, M точка çавракăш çинче куçса çӳрет пулсан, вара M_1 точка та тӳремçи çинче куçса çӳресе O_1 центр тавра kR радиуспа çавракăш çырса çаврăнать.

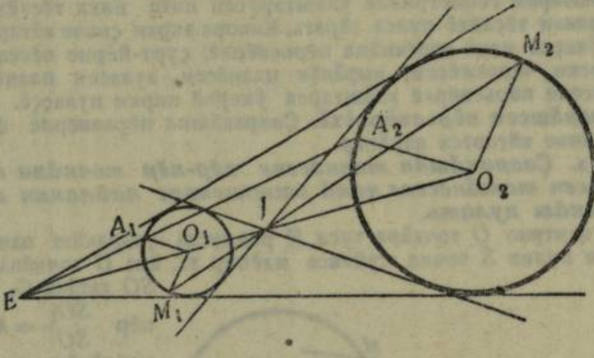
179. Теорема. ***Тӳремçи çинчи икĕ çавракăша яланах перспективăри пĕрьевĕрлĕ фигурăсем çине пăхнă пек пăхма пулать; вĕсен пĕрьевĕрлĕхĕн икĕ центр: пĕри тулашĕнчи, тепри шалти центр пулать.*** Калăпăр, икĕ çавракăш панă; вĕсен центрĕсем O_1 тата O_2, радиусĕсем R_1 тата R_2 (186 черт.). Центрсен O_1O_2 линине тăвăпăр та ун çинче икĕ точка I тата E тăвăпăр; çак точкăсем çакăн пек пĕртанлăхсемпе палăраççĕ:

$$\frac{O_1I}{O_2I}=\frac{R_1}{R_2} \text{ тата } \frac{O_1E}{O_2E}=\frac{R_1}{R_2}.$$

I тата E точкăсенче пĕрьевĕрлĕхĕн центрĕсен свойствисем пуррине асăрхама йывăр мар. Малтанхи çавракăш çинче мĕнле те пулин M_1 точкăна илĕпĕр те IM_1 тӳрĕ лини хывса ун çинче $\frac{IM_1}{IM_2}=\frac{R_1}{R_2}$ пулмалла палăртса IM_2 татăк хурăпăр. $\triangle IO_1M_1 \infty \triangle IO_2M_2$, мĕншĕн тесен: $\angle O_1IM_1=\angle O_2IM_2$, $\frac{IM_1}{IM_2}=\frac{R_1}{R_2}$ тата $\frac{O_1I}{O_2I}=$ $=\frac{R_1}{R_2}$; çапла вара,

$$\frac{O_1M_1}{O_2M_2}=\frac{R_1}{R_2}, \text{ анчах та } O_1M_1=R_1, \text{ çавăнпа та } O_2M_2=R_2.$$

Çакă ĕнтĕ, M_2 точка иккĕмĕш çавракăш çинче выртнине пĕлтерет. Çапла вара, I точка панă çавракăшсен пĕрьевĕрлĕхĕн шалти центрĕ пулать. Çакăн пек майпах E точка пĕрьевĕрлĕхĕн тулашĕнчи центрĕ пулнине те кăтартса пама пулать.



186 черт.

I тата E точкăсене çапла майпа тума пулать: панă çавракăшсенче пĕр-пĕринпе параллельлĕ мĕнле те пулин икĕ радиус тăватпăр та вĕсен вĕçĕсене пĕрлештеретпĕр, вара çакăн пек майпа тунă тӳрĕ лини центрсен линийĕ урлă пĕрьевĕрлĕхĕн центрĕнче каçса каять. Çакăнта, радиуссем пĕр еннелле выртаççĕ пулсан (186 черт.) (O_1A_1 тата O_2A_2), пĕрьевĕрлĕхĕн центрĕ тулашĕнче; вĕсем хире-хирĕçле выртаççĕ пулсан (186 черт.) (O_1M_1 тата O_2M_2), пĕрьевĕрлĕхĕн центрĕ шалта пулать.

Малалла тата икĕ çавракăш пĕр-пĕрне сĕртĕнеççĕ пулсан, пĕрьевĕрлĕхĕн центрĕсенчен пĕрийĕ сĕртĕнӳ точкипе пĕр вырăнтах пулнине асăрхама та йывăр мар. Кунта, çавракăшсем тул енчен сĕртĕнеççĕ пулсан, сĕртĕнӳ точкинче вара пĕрьевĕрлĕхĕн шалти центрĕ пулать, çавракăшсем шал енчен сĕртĕнеççĕ пулсан, сĕртĕнӳ точкинче вара çавракăшсен пĕрьевĕрлĕхĕн тулашĕнчи центрĕ пулать.

Упражненисем. 1. Икĕ çавракăш пĕр-пĕрин тулашĕнче выртаççĕ пулсан, вĕсен пĕрьевĕрлĕхĕн тулашĕнчи центрĕ тулашĕнчен сĕртĕнекен пĕрлехи тӳрĕ линисем пĕр-пĕрне касса кайнă точкăра пулнине, тата пĕрьевĕрлĕхĕн шалти центрĕ шалтан сĕртĕнекен пĕрлехи тӳрĕ линисем пĕр-пĕрне касса кайнă точкăра пулнине кăтартса парăр.

2. Икĕ çавракăшăн пĕрьевĕрлĕхĕн тулашĕнчипе шалти центрĕсем пĕр точкăрах пулччăр тесен, тӳремçи çинче вĕсен мĕнле положени йышăнса тăмалла?

Ответ. Çавракăшсем концентрически пулмалла.

180. Пантограф. Фигурăсене пĕрьевĕрлĕ улăштарассине ăрасна приборпа усă курса, ахаль механически майпах тума пулать. Çакнашкал прибора Христофор Шейнер 1603 ç. шухăшласа кăларнă. Ăна вăл пантограф тесе ят панă.

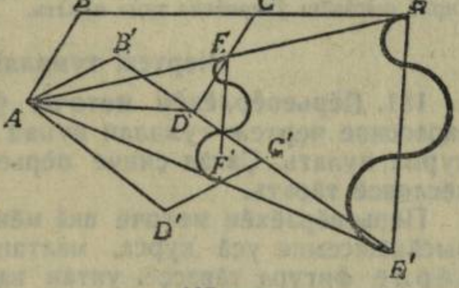
Калăпăр, $ABCD$ параллелограмăн (187 черт.) енĕсене пĕр-пĕр металран тунă; вĕсем ăрасна шарнирсем çинче хăйсен тăррисем тавра çаврăнкалама пултараççĕ. A тăррине хускалмалла мар вырнаçтарса лартăпăр, BC енĕн малалли пайĕ çинче пĕр-пĕр E точка илĕпĕр те, çак точкăна вара мĕнле те пулин EE' лини çыртарăпăр. Калăпăр, F точка AE тата CD тÿрĕ линисен çĕнĕ вырăнта пĕрлешнин точки тата $AB'C'D'$ пирĕн шарнирлă параллелограмăн çĕнĕ положенийĕ. Анчах та, E точкăн вырăнне улăштарнипе параллелограмăн енĕсен вăрăмăшĕ те, CE тата CF татăкăн вăрăмăшĕсем те улшăнмарĕç, çавăнпа та эпир йĕркерен çакăн пек пропорцисем çырма пултаратпăр:

$$\frac{AD}{CE}=\frac{DF}{FC}=\frac{AF}{FE}\ \text{(мĕншĕн тесен } \triangle ADF \backsim \triangle ECF);\ \frac{AD'}{C'E'}=\frac{D'F'}{F'C'}.$$

Çакăнтан, $\triangle A'DF' \backsim \triangle E'C'F$ пулать; çапла ĕнтĕ, $\angle AF'D' = \angle E'F'C'$, урăхла каласан, A, F' тата E' точкăсем пĕр тÿрĕ лини çинче выртаççĕ. Малалла, çав треугольниксен пĕрьевĕрлĕхĕнчен акă мĕн пулать: $\frac{AF'}{F'E'}=\frac{D'F'}{F'C'}$, анчах та,

$$\frac{D'F'}{F'C'}=\frac{DF}{FC}=\frac{AF}{FE};$$

çапла ĕнтĕ, $\frac{AF'}{F'E'}=\frac{AF}{FE}$.



187 черт.

Çакăнтан ĕнтĕ, AEE' тата AFF' треугольниксем пĕрьевĕрлĕ пулни курăнсах тăрать, çавăнпа та, $\angle AFF' = \angle AEE'$ тата $EE' \parallel FF'$.

Малалла, чертежран акă мĕн тупатпăр:

$$\frac{AF}{FE}=\frac{BC}{CE}\ \text{тата}\ \frac{AF'}{F'E'}=\frac{B'C'}{C'E'}.$$

Производнăй пропорцисем тунă хыççăн, çапла çырма пултаратпăр:

$$\frac{AF+FE}{AF}=\frac{BC+CE}{BC}\ \text{тата}\ \frac{AF'+F'E'}{AF'}=\frac{B'C'+C'E'}{B'E'},$$

е

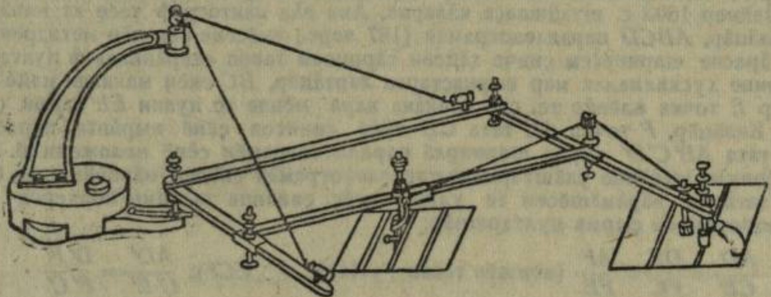
$$\frac{AE}{AF}=\frac{BE}{BC}\ \text{тата}\ \frac{AE'}{AF'}=\frac{B'E'}{B'C'};$$

анчах $BE=B'E'$ тата $BC=B'C'$; çапла вара.

$$\frac{AE}{AF}=\frac{AE'}{AF'}=\frac{BE}{BC}.$$

Çак пĕртанлăх акă мĕне кăтартать: E точка мĕнле те пулин фигурăна çырнă чухне, F точка та çавăн пек фигура çырать, çак фигурăсен пĕрьевĕрлĕхĕн коэфициенчĕ $\frac{BE}{BC}$ пулать. E точкăра йĕп вĕçĕ, F точкăра шĕвĕр карандаш вырнаçтарса лартсан, фигура контурне йĕп вĕçĕпе чĕрсе тухсан, карандаш вара хут çине çав фигурăпа пĕрьевĕрлĕ фигурăн контурне ÿкерсе илет. Пĕрьевĕрлĕхĕн коэфициентне улăштарас тесен, E точкăна BC тÿрĕ лини тăрăх икĕ еннелле те куçарса çÿреме пулать. Шарнирлă параллелограмăн çакăн пек свойствисене кура тунă та ĕнтĕ пантографа. Ăна пĕтĕмĕшпе 188 чертежра ÿкерсе кăтартнă. Çак приборпа плансен масштабне улăштарса ÿкерсе илнĕ чухне усă кураççĕ.

Пысăках мар тата ансат формăллă фигурăсене пĕрьевĕрлĕ улăштарнă чухне çавăн пекех тата пайламалли циркульпе те усă курма юрать (166 §). Çакна тăвас тесен, циркулĕн хускалакан винтне урисен мĕнпур вăрăмăшне пĕрьевĕрлĕхĕн панă коэфициенчĕпе пайламалла вырнаçтарса лартаççĕ те, унтан вара



187 черт.

пĕрьевĕрлĕхĕн центрне суйласа илсе, ана тĕп фигурăн точкисемпе пĕрлештереççĕ. Пайăркан кашни тўрĕ линийĕ çинчех пĕрьевĕрлĕхĕн центрĕпе фигурăн точки хушшине циркуле пĕрре уçнипех виçсе илмелле те, вара циркуле тепĕр майлă çавăрса, çав лини çинчех пĕрьевĕрлĕхĕн центрĕпе çĕнĕ фигурăн хушшине хумалла. Çапла майпа панă фигурăн мĕнпур тĕп точкисене палăртма тата унăн кирлĕ пысăкăш ўкерчĕкне тума пулать.

Чертеж тумалли задачăсем.

181. Пĕрьевĕрлĕхĕн меточĕ. Фигурăсене пĕрьевĕрлĕ улăштарассипе чертеж тумалли нумай задачăсене шутланă чухне усă курма пулать. Çакăн çинче пĕрьевĕрлĕхĕн меточĕ текенни никĕсленсе тăрать.

Пĕрьевĕрлĕхĕн меточĕ акă мĕнле вăл: задачăра панă хăшпĕр пысăкăшсемпе усă курса, малтан шыракан фигурăпа пĕрьевĕрлĕ фигура тăваççĕ, унтан вара шыракан фигура çине куçаççĕ. Задачăра панисенчен пĕрийĕ вăрăмăшĕ, ыттисем пурте кĕтессем, е линисен отношенийĕ пулсан, çак методпа усă курасси ăраснах ансат пулса пырать; тĕслĕхрен, панă кĕтес, енĕ тата тепĕр икĕ енĕн отношенийĕ тăрăх, е икĕ кĕтеспе пĕр-пĕр татăк (çўллĕшĕ, медиана, биссектриса т. ыт. те) тăрăх треугольник тăвасси; квадратăн диагоналĕпе енĕн панă сумми е разноçĕ тăрăх квадрат тăвас т. ыт. задачăсем те çакăн пек пулаççĕ ĕнтĕ.

Сăмахран, çакăн пек задачăна шутлăпăр:

1-мĕш задача. *Треугольникĕн кĕтесĕсенчен пĕрне С кĕтесе, çак кĕтесе тăвакан енсен AC : BC отношени е тата çак кĕтесрен хирĕçле енĕ çине антарнă h çўллĕшне панă* (189 черт.), *треугольнике тăвăр.*

189 черт.

Калăпăр, $AC : BC = m : n$, кунта m тата n панă икĕ татăк е панă икĕ число. C кĕтесе тăвăпăр та унăн енĕсем çинче m тата n хисепсемпе пропорциллĕ CA_1 тата CB_1 татăксене хурăпăр. m тата n татăксем пулсан, вара тўрех $CA_1 = m$, тата $CB_1 = n$ илетпĕр. m тата n числосем пулсан—вара ирĕклĕн l татăк илсе, $CA_1 = ml$ тата $CB_1 = nl$ татăксене тăватпăр.

Икĕ тĕслĕхре те пĕр пекех пулать: $CA_1 : CB_1 = m : n$.

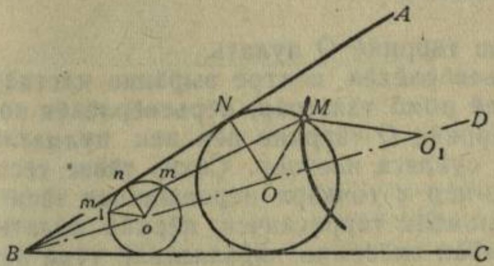
CA_1B_1 треугольник шыракан треугольникпе пĕрьевĕрлĕ пулни курăнсах тăрать.

Шыракан треугольнике тупас тесен, CA_1B_1 треугольникре CD_1 çӳллĕшне тăватпăр та ăна h_1 урлă паллă тăватпăр. Халĕ ĕнтĕ ирĕклĕн пĕрьевĕрлĕхĕн центрне суйласа илĕпĕр те пĕрьевĕрлĕхĕн коэфициенчĕ $\frac{h}{h_1}$ отношенипе тан пулмалла, A_1B_1C треугольникпе пĕрьевĕрлĕ çĕнĕ треугольник тăвăпăр; кунта h—шыракан треугольникĕн çӳллĕшĕ пулать ĕнтĕ. Çапла майпа пулнă треугольник шыракан треугольник пулать.

Пĕрьевĕрлĕхĕн центрне C точкăна суйласа илсен ансатрах пулать. Кун пек чухне вара шыракан треугольнике тума питех те ансат пулать (189 черт.) A_1B_1C треугольникĕн CD_1 çӳллĕшне малалла тăсăпăр та ун çинче $CD = h$ хурăпăр, вара A_1B_1 татăкпа параллельлĕ AB тӳрĕ лини хывăпăр.

$\triangle ABC$ шыракан треугольник пулать.

Çакнашкал задачăсенче шыракан фигурăн положенийĕ кирек епле те пулма пултарать; анчах та нумай чухне фигурăна панă точкăсемпе е линисемпе илсен паллă вырăн йышăнмалла ыйтулартаççĕ. Кунта тата çакăн пек те пулма пултарать: условинчи пĕр-пĕр положение шута илмесен, пирĕн шыракан фигурăпа пĕрьевĕрлĕ темĕн чухлĕ фигура пулма пултарать. Çакăн пек чухне пĕрьевĕрлĕхĕн меточĕпе усă курни юрăхлă пулать. Тĕслĕхсем туса кăтартар.



190 черт.

2-мĕш задача. *Панă ABC кĕтесе çавракăш çырăр, вăл панă M точка урлă кайтăр* (190 черт.).

Вăхăтлăха çавракăш M точка урлă кайма ыйтнине пăрахăçлăпăр. Вара панă условие темĕн чухлĕ çавракăшсем те килĕштереççĕ, вĕсен пурин те центрĕсем BD биссектриса çинче выртаççĕ. Çакнашкал çавракăшсенчен пĕрне, сăмахран, o центрлăскерне, тăвăпăр. Ун çинче m точкăна, M точкăпа килĕшӳллĕскерне, урăхла каласан, MB пайăрка çинче выртаканскерне, илĕпĕр те mo радиус тăвăпăр. Халĕ ĕнтĕ $MO \parallel mo$ тусан, вара O точка шыракан çавракăшăн центрĕ пулать. Чăнах та, AB енĕ çине ON тата on перпендикулярсене тусан, эпир вара пĕрьевĕрлĕ MBO тата mBo, NBO тата nBo треугольниксем тăватпăр; вĕсенчен эпир акă мĕн тупатпăр:

$$MO : mo = BO : Bo; \quad NO : no = BO : Bo,$$

çакăнтан

$$MO : mo = NO : no.$$

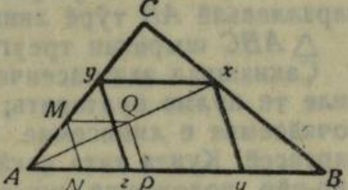
Анчах та, $mo = no$; çапла вара, $MO = NO$, урăхла каласан, OM радиуспа O центр тавра шала çырнă çавракăш AB ене сĕртĕнсе тăрать; унăн центрĕ кĕтесĕн биссектриси çинче пулнă пирки, вăл BC ене те сĕртĕнсе тăрать.

Пĕр пек точка вырăнне MB пайăрка o çавракăш урлă каçса каякан тепĕр m_1 точкăна илсен, вара шыракан çавракăшăн тепĕр O_1 центрне тупатпăр. Çапла вара, задачăн икĕ ответ пулать.

3-мĕш задача. *Панă ABC треугольник ăшне панă шĕвĕр кĕтеслĕ ромб çырăр; унан пĕр енĕ ABC треугольникĕн AB тĕпĕ çинче, икĕ тăррийĕ аякри AC тата BC енĕсем çинче пулччăр* (191 черт.).

Малтанлăха ромбăн тăррисенчен пĕрийĕ BC ен çинче выртмалли ыйтăва вăхăтлăха пăрахăçлăпăр. Вара задачăн ытти условийĕсене килĕштерекен темĕн чухлĕ ромб тума пулать. Вĕсенчен пĕрне тăвăпăр.

AC ен çинче ирĕклĕн M точка илĕпĕр. Çак точкăра панă кĕтеспе пĕртан кĕтеслĕ тăрă тăватпăр, унăн пĕр енĕ AB тĕпĕпе параллельлĕ пулать, тепĕр енĕ AB тĕпĕ урлă пĕр-пĕр N точкăра каçса каять. AB енĕ çинче, N точкăран пуçласа, MN татăкпа, пĕртан NP татăка хуратпăр та, вара MN тата NP енсемпе ромб тăватпăр.



191 черт.

Калăпăр, унăн тăваттăмĕш тăррийĕ Q пулать.

Малалла, A тăррине пĕрьевĕрлĕхĕн центрĕ вырăнне илетпĕр те $MNPQ$ ромбпа пĕрьевĕрлĕ ромб тăватпăр; пĕрьевĕрлĕхĕн показательне çĕнĕ ромбăн тăррийĕ Q тăррипе пĕр пек пулмалла тата BC ен çинче пулмалла суйласа илетпĕр. Çакна тăвас тесе, AQ тӳрĕ линие BC енпе пĕр-пĕр x точкăра пĕрлешиччен тăсатпăр. Çак x точка шыракан ромбăн тăррисенчен пĕрийĕ пулать.

Çак точкăран $MNPQ$ ромбăн енĕсемпе параллельлĕ тӳрĕ линисем хывса шыракан $xyzu$ ромба тупатпăр.

Пĕрьевĕрлĕхĕн меточĕпе усă курса вĕренекенсене хăйсене шутлама çак задачăсене паратпăр:

1. Треугольникĕн икĕ кĕтесне тата ун тавра тула çырнă çавракăшăн радиусне пĕлни тăрăх треугольник тăвăр.
2. Çӳллĕшĕпе тĕпĕн отношенийĕ, тăрринчи кĕтесĕ тата айăккинчи енĕн медиани тăрăх треугольник тăвăр.
3. $\angle AOB$ тата унăн ăшĕнче C точка панă. OB енĕ çинче M точкăна, OA енрен те тата C точкăран та пĕртанах аякра тăракансkере, тупăр.

V. ПРОПОРЦИЛЛĔ ТАТĂКСЕМ ÇИНЧЕН КАЛАКАН ХĂШПĔР ТЕОРЕМĂСЕМ.

182. Теорема. (ABC) ***кĕтесĕн енĕсем урлă каçса каякан пĕр-пĕринпе параллельлĕ тӳрĕ линисем*** (DD_1, EE_1, FF_1,...) ***кĕтесĕн енĕсенчен пропорциллĕ татăксем тата-тата илеççĕ*** (192 черт.).

Теоремăн доказательствине тупмалла:

$$\frac{BD}{BD_1}=\frac{DE}{D_1E_1}=\frac{EF}{E_1F_1};$$

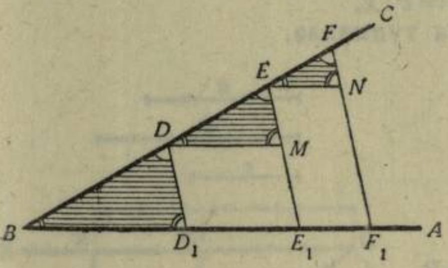
е

$$BD:DE=BD_1:D_1E_1;$$
$$DE:EF=D_1E_1:E_1F_1$$ тата малалла та çаплах.

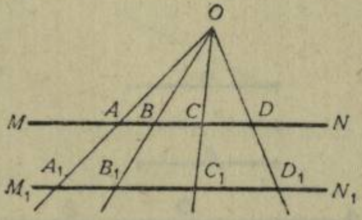
BA линипе параллельлĕ *DM*, *EN* т. ыт. пулăшакан тӳрĕ линисене тусан, пирĕн BDD_1, *DEM*, *EFN* т. ыт. треугольниксем пулаççĕ; вĕсем пурте пĕр-пĕринпе пĕрьевĕрлĕ, мĕншĕн тесен вĕсен (тӳрĕ линисем параллельлĕ пулнă пирки) кĕтесĕсем пĕртан. Вĕсен пĕрьевĕрлĕхĕнчен акă мĕн пулать:

$$\frac{BD}{BD_1}=\frac{DE}{DM}=\frac{EF}{EN}=\ldots$$ тата малалла та çаплах.

Çак пĕртан отношенисен йĕркинче *DM* татăка D_1E татăкпа, *EN* татăка E_1F_1 татăкпа тата ыттисене те (параллелограмăн хире-хирĕçле енĕсене пĕртан) улăштарсан, вара эпир шăпах мĕн кăтартса памаллине тупатпăр.



192 черт.



193 черт.

183. Теорема. ***Пĕр-пĕринпе параллельлĕ икĕ тӳрĕ лини урлă*** (*MN* тата M_1N_1), ***пĕр точкăран*** (*O*) ***тухакан тӳрĕ линисем каçса каяççĕ пулсан, çак линисем вĕсене пропорциллĕ пайсене пайлаççĕ*** (193 черт.).

MN тӳрĕ лини çинчи *AB*, *BC*, *CD*,... татăксем M_1N_1 тӳрĕ лини çинчи A_1B_1, B_1C_1, C_1D_1,... татăксемпе пропорциллĕ пулнине кăтартса памалла.

OAB тата OA_1B_1 треугольниксем (159 §) тата *OBC* тата OB_1C_1 треугольниксем пĕрьевĕрлĕхĕнчен акă мĕн тупатпăр:

$$\frac{AB}{A_1B_1}=\frac{BO}{B_1O}\text{ тата }\frac{BO}{B_1O}=\frac{BC}{B_1C_1},$$

çакăнтан

$$\frac{AB}{A_1B_1}=\frac{BC}{B_1C_1}.$$

Ытти татăксем пропорциллĕ пулнине те çакăн пек майпах кăтартса параççĕ.

184. Задача. *Тӳрĕ линин AB татăкне* (194 черт.) *виçĕ пая $m:n:p$ отношенипе пайлăр; кунта m, n тата p панă татăксем е панă числосем.*

AB çумне кирек епле ирĕклĕ кĕтеспе AC пайăрка тăвăпăр та ун çине A точкăран пуçласа m, n тата p татăксемпе пĕртан татăксем хурăпăр. F точкăна, p татăкăн вĕçне, B точкăпа тӳрĕ линипе пĕрлештерĕпĕр те хунă татăксен G тата H вĕçĕсем урлă BF линипе параллельлĕ GD тата HE тӳрĕ линисем тăвăпăр. Вара AB татăк D тата E точкăсенче $m:n:p$ пропорциллĕ пайсене пайланать.

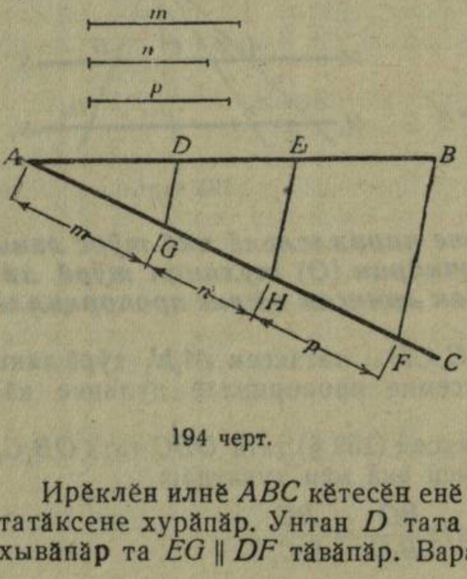
m, n тата p мĕнле те пулин числосене, тĕслĕхрен, 2, 5, 3 пĕлтereççĕ пулсан та, чертежа çакăн пекех тăваççĕ, пĕтĕм ăрасналăх та кунта AC тӳрĕ лини çинче ирĕклĕн илнĕ вăрăмăш единицин 2, 5 тата 3 хут илнĕ пайĕсемпе пĕртан татăксене хурса тухни çеç пулать.

Паллах, чертежа çакăн пек тăвасси татăка виçĕ пая пайланă чухне çеç мар, ăна кирек мĕн чухлĕ пая пайланă чухне те усă курма юрăхлă.

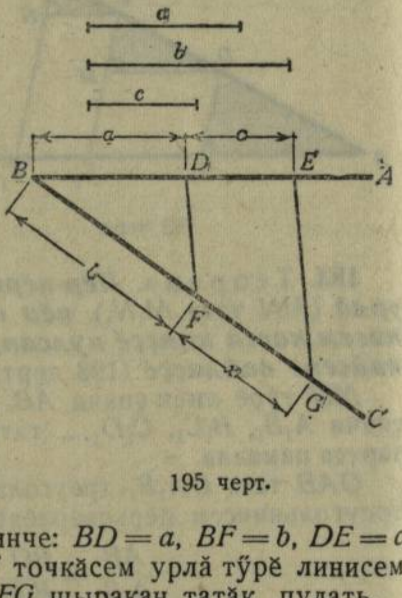
185. Задача. ***Панă виçĕ a, b тата c татăксене валли тăваттăмĕш пропорциллĕ татăка тупăр*** (195 черт.). урăхла каласан, x татăка:

$$a:b=c:x.$$

пропорцие килĕштерекен татăка тупмалла.



194 черт.



195 черт.

Ирĕклĕн илнĕ ABC кĕтесĕн енĕ çинче: $BD=a$, $BF=b$, $DE=c$ татăксене хурăпăр. Унтан D тата F точкăсем урлă тӳрĕ линисем хывăпăр та $EG \parallel DF$ тăвăпăр. Вара FG шыракан татăк пулать.

Треугольникри кĕтес биссектрисин свойстви.

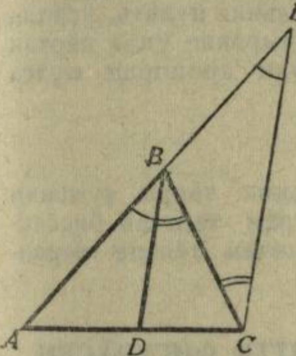
186. Теорема. ***ABC треугольникĕн кирек хăш кĕтесĕн биссектриси те*** (BD, 196 черт.) ***çав кĕтесе хирĕç выртакан ене хăйĕн ик енче выртакан енĕсемпе пропорциллĕ пайсене*** (AD тата DC) ***уйăрать.***

Çакна кăтартса памалла: $\angle ABD=\angle DBC$ пулсан, вара $AD:DC=AB:BC$ пулать.

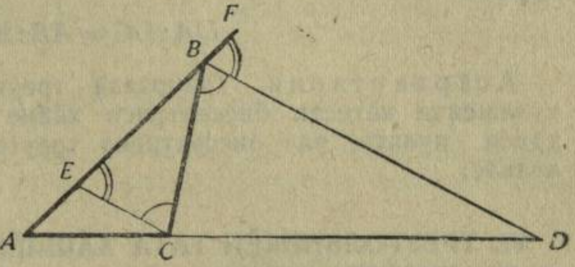
BD биссектрисăпа параллельлĕ CE татăк туртар ($CE \parallel BD$) CE татăк треугольникĕн AB енĕ тăсăмне E точкăра касса иртет. Ун чухне вара, 182 §-ри теорема тăрăх, акă çакăн пек пропорци пулса тăрать:

$$AD:DC = AB:BE.$$

Ку пропорцирен тĕрĕслĕхне кăтартмалли пропорци патне куçас тесен, çакна палăртсан та çитет: $BE = BC$, урăхла каласан, $\triangle BCE$ тануралла треугольник пулать. Ку треугольникре $\angle E = \angle ABD$ (параллельлĕ тӳрĕ линисем çумĕнчи килĕшӳллĕ кĕтессем пĕр-пĕринпе пĕртан) тата $\angle BCE = \angle DBC$ (çав параллельлĕ тӳрĕ линисем çумĕнчи хире-хирĕç выртакан кĕтессем пĕртан).



196 черт.



197 черт.

Услови тăрăх $\angle ABC = \angle DBC$; апла пулсан, $\angle E = \angle BCE$ пулать, çавăнпа та пĕртан кĕтессене хирĕç выртакан BC тата BE енсем те пĕр-пĕринпе пĕртан пулаççĕ. Халь ĕнтĕ çӳлте çырнă пропорцири BE вырăнне BC лартатпăр та, тĕрĕслĕхне кăтартмалли пропорци пулса тăрать.

Числолла тĕслĕх. $AB = 10$, $BC = 7$ тата $AC = 6$ пулчăр. Ун чух вара, AD вырăнне x лартсан, çакăн пек пропорци çырса хума пултаратпăр:

$$x:(6-x) = 10:7.$$

Кунтан çакна тупатпăр:

$$7x = 60 - 10x;\ 7x + 10x = 60,\ 17x = 60.$$

$$x = \frac{60}{17} = 3\frac{9}{17} \text{ пулать.}$$

Çавăнпа,

$$DC = 6 - x = 6 - 3\frac{9}{17} = 2\frac{8}{17} \text{ пулать.}$$

187. Теорема (треугольникĕн тулашĕнчи кĕтесĕн биссектриси свойстви çинчен калаканскер). *ABC треугольникĕн тулашĕнчи кĕтесĕн* (CBF) *биссектриси* (BD, 197 черт.) *çав кĕтесе*

хирĕç выртакан AC ен тăсăмне D точкăра касса иртет; çак точкăпа треугольникĕн AC енĕ вĕçĕсем хушши AC енĕн икĕ айккинче выртакан енĕсемпе (AB тата AC) ***пропорциллĕ.*** Çак тĕрĕссине кăтартмалла: $\angle CBD = \angle FBD$ пулсан, $DA:DC = AB:BC$ пулать.

BD биссектрисăпа параллельлĕ татăк CE ($CE \parallel BD$) туртсан, çакăн пек пропорци пулса тăрать:

$$DA:DC = BA:BE.$$

$\angle BEC = \angle FBD$ (килĕшӳллĕ кĕтессем пĕр-пĕринпе пĕртан), $\angle BCE = \angle CBD$ (параллельлĕ тӳрĕ линисем çумĕнчи хире-хирĕç выртакан кĕтессем пĕр-пĕринпе пĕртан). FBD тата CBD кĕтессем услови тăрăх пĕр-пĕринпе пĕртан пулсан, вара $\angle BEC = \angle BCE$ пулать, апла пулсан, BCE тануралла треугольник пулать, урăхла каласан, $BE = BC$ пулать. Пропорцире BE вырăнне унпа пĕртан BC татăка лартсан, тĕрĕслĕхне кăтартмалли пропорци пулса тăрать:

$$DA:DC = AB:BC.$$

Асăрхаттарни. Тануралла треугольник тăрри çумĕнчи тулашĕнчи кĕтесĕн биссектриси хăйне уйрăм тăракан биссектриса пулать, вăл биссектриса треугольникĕн тĕпĕпе параллельлĕ.

VI. ТРЕУГОЛЬНИКĔН ТАТА ХĂШПĔР ЫТТИ ФИГУРĂСЕН ЭЛЕМЕНЧĔСЕМ ХУШШИНЧИ МЕТРИЧЕСКИ ÇЫХĂНУСЕМ.

188. Теорема. ***Тӳркĕтеслĕ треугольникĕн тӳрĕ кĕтесĕ тăрринчен гипотенуза çине перпендикуляр антарсан, перпендикуляр хăйĕн тĕпĕ уйăракан татăксем хушшинче вăтам пропорциллĕ пысăкăш пулса тăрать, кашни катет гипотенуза тата гипотенузăн çав катет çумĕнче выртакан татăк хушшинче вăтам пропорциллĕ пысăкăш пулса тăрать.***

AD татăк (198 черт.) A тӳрĕ кĕтесĕн тăрринчен BC гипотенуза çине антарнă перпендикуляр пултăр. Çак виçĕ пропорци тĕрĕссине кăтартмалла:

$$1)\ \frac{BD}{AD} = \frac{AD}{DC};\quad 2)\ \frac{BC}{AB} = \frac{AB}{BD};\quad \frac{BC}{AC} = \frac{AC}{DC}.$$

Пĕрремĕш пропорци тĕрĕссине ABD тата ADC треугольниксен пĕрьевĕрлĕхĕпе усă курса кăтартăпăр. Ку треугольниксем пĕрьевĕрлĕ, мĕншĕн тесен

$$\angle 1 = \angle 4 \text{ тата } \angle 2 = \angle 3;$$

ку кĕтессен енĕсем пĕр-пĕринпе перпендикулярлă (§ 80), çавăн пирки вĕсем пĕртан. ABD треугольникĕн BD тата AD енĕсен отношенийĕ тĕрĕслĕхне кăтартмалли пропорцин пĕрремĕш отношенийĕ пулать; ADC треугольникре килĕшӳллĕ енсем AD тата DC[1] пулаççĕ, çавăнпа

$$BD:AD=AD:DC \text{ пулать.}$$

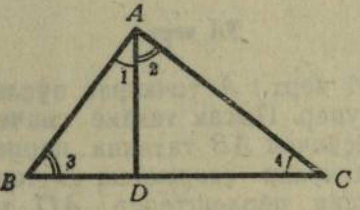
Иккĕмĕш пропорци тĕрĕссине ABC тата ABD треугольниксен пĕрьевĕрлĕхĕпе усă курса кăтартса пама пулать. Ку треугольниксем пĕрьевĕрлĕ, мĕншĕн тесен вĕсем тӳркĕтеслĕ треугольниксем, тата вĕсен B шĕвĕр кĕтесĕ — пĕрлехи кĕтес. ABC треугольникĕн BC тата AB енĕсене илер, вăл енсем тĕрĕслĕхе кăтартмалли пропорцин пĕрремĕш отношенине тăваççĕ; ABD треугольникре AB тата BD килĕшӳллĕ енсем пулаççĕ, çавăнпа

$$BC:AB=AB:BD.$$

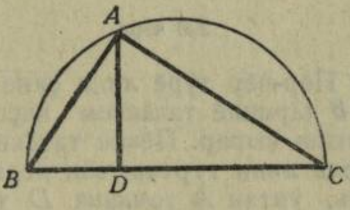
Виççĕмĕш пропорци тĕрĕссине ABC тата ADC треугольниксен пĕрьевĕрлĕхĕпе усă курса кăтартăпăр. Ку треугольниксем — пĕрьевĕрлĕ треугольниксем, мĕншĕн тесен вĕсем иккĕшĕ те — тӳркĕтеслĕ треугольниксем, тата вĕсен C шĕвĕр кĕтесĕ — пĕрлехи кĕтес. ABC треугольникĕн BC тата AC енĕсене илер; вăл енсемпе килĕшӳллĕ енсем ADC треугольникре AC тата DC енсем пулаççĕ, çавăнпа

$$BC:AC=AC:DC \text{ пулать.}$$

189. Следстви. A точка (199 черт.) BC диаметр çине çырнă çавракăшăн пĕр-пĕр точки пултăр. Диаметр вĕçĕсене çак точкăпа пĕрлештерсен, ABC тӳркĕтеслĕ треугольник пулса тăрать, унăн гипотенузи — диаметр; катетсем хордăсем пулса тăраççĕ. Ку треугольник тĕлĕшĕнчен, тĕрĕслĕхне кăтартнă теоремăпа усă курса, çакăн пек заключени тума пулать.



198 черт.



199 черт.

Çавракăшăн пĕр-пĕр точкинчен диаметр çине перпендикуляр антарсан, унăн тĕпĕ диаметра икĕ татăка уйăрать. Çак пер-

---

[1] Треугольникĕн хăш енĕсем пĕр-пĕрин хушшинче килĕшӳллĕ енĕсем пулнине пĕр йăнăшмасăр палласа илес тесен, çаксене пĕлсе тăни усăллă:

1) пĕр треугольникĕн илнĕ енĕсене хирĕç выртакан кĕтессене кăтартмалла.
2) вĕсемпе пĕртан кĕтессене тепĕр треугольникре тупмалла;
3) вĕсене хирĕç выртакан енсене илмелле.

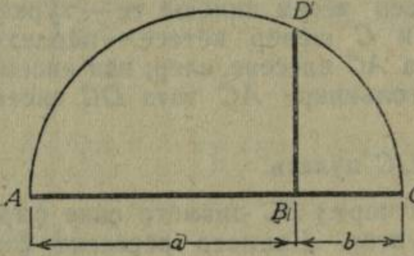
Сăмахран, ABD тата ABC треугольниксем тĕлĕшĕнчен çакăн пек калатпăр: ABD треугольникре BD тата AD енсем 1-мĕшпе 3-мĕш кĕтессене хирĕç выртаççĕ; ADC треугольникре çак кĕтессемпе 4-мĕшпе 2-мĕш кĕтессем пĕртан; вĕсене хирĕç AD тата DC енсем выртаççĕ. Апла пулсан AD тата DC енсем, BD тата AD енсем пĕр-пĕринпе килĕшӳллĕ пулаççĕ.

пендикуляр диаметр татăкĕсем хушшинче вăтам пропорциллĕ пысăкăш пулса тăрать, çак точкăна диаметр вĕçĕпе пĕрлештерекен хорда диаметрпа тата хорда çумĕнче выртакан диаметр татăкĕ хушшинче вăтам пропорциллĕ пысăкăш пулса тăрать.

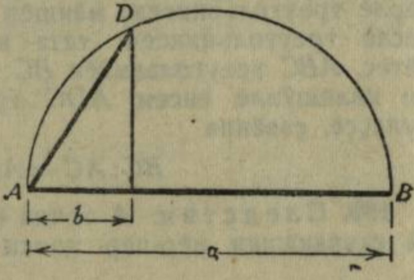
190. Задача. *Икĕ татăк a тата b хушшине вăтам пропорциллĕ татăк тумалла.*

Ку задачăна икĕ мелпе шутласа кăларма пулать:

1) Пĕр-пĕр тӳрĕ лини çине (200 черт.) a тăршшĕ AB тата b тăршшĕ BC татăксем виçсе хурар; AC тӳрĕ лини çинче, ăна диаметр туса, çурçавракăш çырар; B точкăран çавракăш патне çитиччен BD перпендикуляр тăратар. Çак перпендикуляр вара AB тата BC хушшинче эпир шыракан вăтам пропорциллĕ пысăкăш пулса тăрать.



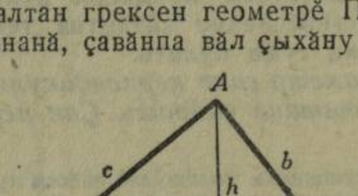
200 черт.



201 черт.

2) Пĕр-пĕр тӳрĕ лини çине (201 черт.) A точкăран пуçласа a тата b тăршшĕ татăксем виçсе хурар. Пысăк татăкĕ çинче çур çавракăш çырар. Пĕчĕк татăкĕ вĕçĕнчен AB татăкпа перпендикулярлă лини туртар, вăл перпендикуляр çавракăша D точкăра касать, унтан A точкăна D точкăпа пĕрлештерер, AD хорда a-па b хушшинче вăтам пропорциллĕ пысăкăш пулса тăрать.

191. **Пифагор теореми**. Тĕрĕслĕхне маларах кăтартнă теоремăсем кирек хăш тӳркĕтеслĕ треугольникĕн те енĕсен хушшинчи питĕ паллă çыхăнăвне кăтартса тăраççĕ. Çак çыхăнăва чи малтан грексен геометрĕ Пифагор (пирĕн эрăчченхи VI ĕмĕрте) сăнанă, çавăнпа вăл çыхăну унăн ячĕпе çӳрет — ăна Пифагор теореми теççĕ.



202 черт.

Тӳркĕтеслĕ треугольникĕн енĕсене пĕр единицăпах виçнĕ пулсан, гипотенуза тăршшĕн квадрачĕ катетсен тăршшĕсен квадрачĕсен суммипе пĕртан.

ABC тӳркĕтеслĕ треугольник пултăр (202 черт.), AD—тӳрĕ кĕтес тăрринчен гипотенуза çине антарнă перпендикуляр пултăр. Треугольник енĕсене тата гипотенуза татăкĕсене пĕр единицăпах виçнĕ хыççăн a, b, c, c' тата b' числосем пулнă пулччăр (треугольник енĕсен тăршшĕсене пĕчĕк саспаллисемпе, вĕсене хирĕç выртакан кĕтессене çав саспаллисемпех, анчах пысăк саспаллисемпе çырса паллă тăваççĕ). 188 §-ри теоремăпа усă курса, çакăн пек пропорцисем çырма пулать:

$$a:c=c:c' \text{ тата } a:b=b:b',$$

çакăнтан шутласан,

$$ac'=c^2 \text{ тата } ab'=b^2 \text{ пулать.}$$

Çак пĕртанлăхсене членсерен хушсан, çакна тупатпăр:

$$ac'+ab'=c^2+b^2, \text{ е } a(c'+b')=c^2+b^2.$$

Анчах $$c'+b'=a,$$

çавăнпа та $$a^2=c^2+b^2 \text{ пулать.}$$

Çак теоремăна кĕскен çапла калаççĕ: ***гипотенуза квадрачĕ катетсен квадрачĕсен суммипе пĕртан.***

Тĕслĕх. Тӳркĕтеслĕ треугольникĕн пĕр-пĕр линейлă единицăпа виçнĕ катечĕсем 3 тата 4 единица пулччăр; ун чух вара гипотенуза çав виçе единиципех x число пулать; x число уравнени çырма çителĕклĕ: $x^2=3^2+4^2=9+16=25$; çакăнтан шутласан $x=\sqrt{25}=5$ пулать.

Асăрхаттарни. 3, 4 тата 5 единицăпа виçнĕ енлĕ тӳркĕтеслĕ треугольнике **египетла** треугольник теççĕ, мĕншĕн тесен вăл треугольнике египетри авалхи çынсемех пĕлнĕ. Сăмахран, Египетри землемерсем, çĕр çинче тӳрĕ кĕтес тунă чух, çакăн пек мелпе усă курнă: вĕсем кантăрана тĕвĕлесе 12 пĕртан пая уйăрнă; унтан унăн вĕçĕсене çыхнă та (шальçасем çапса) çĕр çинче карăнтарса кантраран треугольник тунă: треугольникĕн пĕр енне 3 пай (тӳлем), тепĕрне 4 пай (тӳлем); виççĕмĕшне 5 пай (тӳлем) янă; ун чух вара 3 тата 4 тӳлемлĕ енĕсен хушшинчи кĕтесĕ тӳрĕ кĕтес пулса тăнă[1].

Пифагор теоремин тепĕр формулировка пур, ăна Пифагор хăй тунă, вăл формулировкăпа эпир каярах паллашăпăр (257 §).

192. Следстви. *Катетсен çумĕнчи гипотенуза татăкĕсем хушшинче мĕнле отношени пур, катет квадрачĕсем хушшинче те çавăн пек отношениех пур:*

$$c^2:b^2=ac':ab'=c':b' \text{ пулать.}$$

193. Асăрхаттарни. 1. Малта кăтартнă виçĕ пĕртанлăх çумне:

$$1)\ ac'=c^2,\ 2)\ ab'=b^2 \text{ тата } 3)\ a^2=b^2+c^2,$$

тата икĕ пĕртанлăх хушма пулать:

---

[1] Енĕсем тулли числосемпе виçĕнекен тӳркĕтеслĕ треугольниксене **Пифагор треугольникĕсем** теççĕ. Çак тĕрĕссине кăтартма пулать: çакăн пек треугольниксен x тата y катечĕсене тата z гипотенузине çакăн пек формулăсемпе çырса хума пулать:

$$x=2ab,\ y=a^2-b^2,\ z=a^2+b^2,$$

кунта $a>b$ пулсан, вĕсем пĕр-пĕр тулли числосем пулмалла.

4) $b'+c'=a$ тата 5) $h^2=b'c'$ (h саспаллипе AD ҫӳллӗш тӑршшӗне паллӑ тусан).

Ҫак пӗртанлӑхсенчен виҫҫӗмӗшӗ малтанхи икӗ тата тӑваттӑмӗш пӗртанлӑхсен следствийӗ пулать, ҫавӑнпа пилӗк пӗртанлӑхран тӑваттӑшӗ кӑна ирӗклӗ пӗртанлӑхсем пулсӑ тӑраҫҫӗ; ҫавӑнпа ӗнтӗултӑ числоран иккӗшне парсан, ытти тӑваттӑшне те тупма пулать.

Сӑмахран, пире гипотенузӑн татӑкӗсене панӑ пултӑр: $b'=5$ *м* тата $c'=7$ *м* пултӑр; ун чух вара

$$a=b'+c'=12;\ c=\sqrt{ab'}=\sqrt{12\cdot 7}=\sqrt{84}=9{,}165\ldots,$$

$$b=\sqrt{ab'}=\sqrt{12\cdot 5}=\sqrt{60}=7{,}745\ldots,$$

$$h=\sqrt{b'c'}=\sqrt{5\cdot 7}=\sqrt{35}=5{,}916\ldots$$

Асӑрхаттарни. 2. Малалли теоремӑсенче эпир кӗскен ҫапла калӑпӑр: ен тӑршшӗне кӑтартакан число квадрачӗ тесе калас вырӑнне „ен квадрачӗ“, е: „татӑкӗсен тӑршшӗне кӑтартакан числосен произведенийӗ“ тесе калас вырӑнне „татӑксен произведенийӗ“ тейӗпӗр. Ҫапла каланӑ чухне татӑксене пӗр единицӑпах виҫнине астуса тӑмалла.

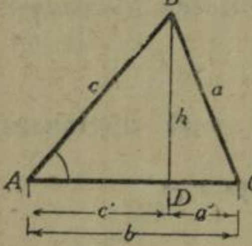
194. Теорема. ***Кирек хӑш треугольникӗн те шӗвӗр кӗтесне хирӗҫ выртакан енӗн квадрачӗ ытти икӗ енӗн квадрачӗсен сумминчен треугольникӗн ҫак икӗ енӗнчен пӗр енӗпе унӑн шӗвӗр кӗтесӗ тӑрринчен антарнӑ ҫӳллӗшӗ патне ҫитекен татӑкӗн произведенине икӗ хут илсе кӑларнипе пулать.***

BC — ABC треугольникӗн (203 тата 204 черт.) A шӗвӗр кӗтесне хирӗҫ выртакан енӗ пултӑр, тата BD ытти енӗсенчен пӗрин ҫине, сӑмахран, AC (е AC тӑсӑмӗ) ҫине, антарнӑ ҫӳллӗш пултӑр. Ҫак тӗрӗссине кӑтартмалла:

$$BC^2=AB^2+AC^2-2\,AC\cdot AD,$$

е линисен тӑршшӗсене, чертеж ҫинче кӑтартнӑ пек, пӗчӗк саспаллипе паллӑ тусан, ҫак пӗртанлӑх тӗрӗссине кӑтартмалла:

$$a^2=b^2+c^2-2bc'.$$



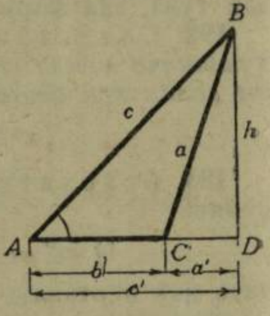
203 черт.

BDC тӳркӗтеслӗ треугольникрен ҫакна тупатпӑр:

$$a^2=h^2+(a')^2.\quad (1)$$

h^2 тата $(a')^2$ кашнине шутласа кӑларар. BAD тӳркӗтеслӗ треугольникрен ҫакна тупатпӑр:

$$h^2=c^2-(c')^2.\quad (2)$$



204 черт.

Тепӗр енчен, $a'=b-c'$ (203 черт.) е $a'=c'-b$ (204 черт.). Иккӗшӗнче те $(a')^2$ валли пӗр выражениех пулса тӑрать:

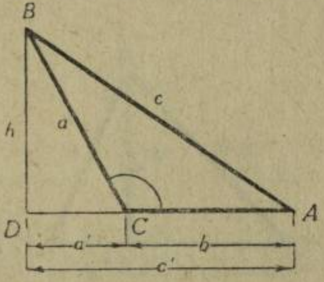
$$(a')^2=(b-c')^2=b^2-2bc'+(c')^2;\ (a')^2=(c'-b)^2=(c')^2-2bc'+b^2.\quad (3)$$

Халь (1) пĕртанлăха çĕнĕрен çапла çырма пулать:

$$a^2=c^2-(c')^2+b^2-2bc'+(c')^2=c^2+b^2-2bc'.$$

195. Теорема. ***Пуклак кĕтеслĕ треугольникĕн пуклак кĕтесне хирĕç выртакан енĕн квадрачĕ ытти икĕ енĕн квадрачĕсен сумми çумне треугольникĕн çак икĕ енĕнчен пĕр енĕпе унăн пуклак кĕтесĕ тăрринчен антарнă çуллĕшĕ патне çитекен тăсăмĕ татăкĕн произведенине икĕ хут илсе хушсан пулать.***

AB татăк ABC треугольникĕн (205 черт.) пуклак кĕтесне хирĕç выртакан енĕ пултăр, BD ытти енĕсенчен пĕрин тăсăмĕ çине, сăмахран, AC тăсăмĕ çине, антарнă çуллĕшĕ пултăр. Çак тĕрĕссине кăтартмалла:



205 черт.

$$AB^2=AC^2+BC^2+2AC\cdot CD,$$

е чертеж çинче кăтартнă пек кĕскен çапла çырса хурар:

$$c^2=a^2+b^2+2ba'.$$

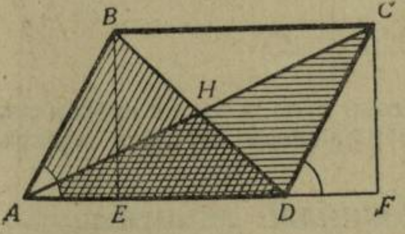
ABD тата CBD треугольниксенчен çаксене тупатпăр:

$$c^2=h^2+(c')^2=a^2-(a')^2+(a'+b)^2=$$
$$=a^2-(a')^2+(a')^2+2ba'+b^2=$$
$$=a^2+b^2+2ba' \text{ пулать,}$$

çакă ĕнтĕ теорема тĕрĕссине кăтартни пулать.

196. Следстви. Юлашки виçĕ теоремăран çакăн пек вывод тăватпăр: *треугольник енĕн квадрачĕ, унăн çав енне хирĕç выртакан кĕтесĕ тӳрĕ, шĕвĕр е пуклак пулнине кура, ытти икĕ енĕн квадрачĕсен суммипе пĕртан, е унран пĕчĕкрех е пысăкрах пулать*; çакăнтан тӳртĕн предложени тухса тăрать.

Треугольникĕн кĕтесне хирĕç выртакан енĕн квадрачĕ ытти икĕ енĕн квадрачĕсен суммипе е пĕртан, е унран пĕчĕкрех, е пысăкрах пулнине кура, вăл кĕтес е тӳрĕ, е шĕвĕр, е пуклак пулать.



206 черт.

197. Теорема. ***Параллелограм диагоналĕсен квадрачĕсен сумми унăн енĕсен квадрачĕсен суммипе пĕртан*** (206 черт.).

$ABCD$ параллелограмăн B тата C тăррисенчен AD тĕпĕ çине BE тата CF перпендикуляр антарар. Ун чух ABD тата ACD треугольниксенчен çаксене тупатпăр:

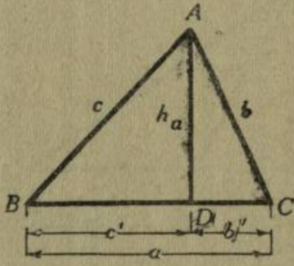
$$BD^2=AB^2+AD^2-2AD\cdot AE;$$
$$AC^2=AD^2+CD^2+2AD\cdot DF.$$

ABE тата DCF тӳркĕteслĕ треугольниксем пĕр-пĕринпе пĕртан, мĕншĕн тесен вĕсен пĕрер тан гипотенуза тата пĕрер тан шĕвĕр кĕтес пур; çавăнпа $AE = DF$ пулать. Çакна астуса, маларах кăтартнă пек, пĕртанлăха членăн-членăн хушар, ун чух вара $2AD \cdot AE$ тата $2AD \cdot DF$ пĕр-пĕрне пĕтерсе лартаççĕ те çакă пулса тăрать:

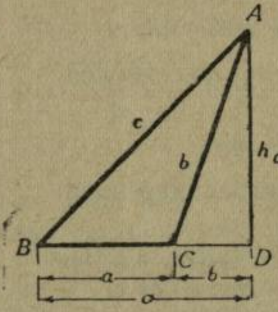
$$BD^2 + AC^2 = AB^2 + AD^2 + AD^2 + CD^2 = AB^2 + BC^2 + DC^2 + AD^2.$$

198. Треугольникĕн вичĕ енĕ тăрăх çӳллĕшне шутласа кăларни. ABC треугольникĕн $BC = a$ енĕ çине антарнă h_a çӳллĕшне шутласа кăларар (207 тата 208 черт).

Треугольникĕн a енĕ татăкĕсене (C кĕтес пуклак пулсан, вăл енне малалла тăсма тивет, 208 черт.) акă çапла паллă тăваççĕ: C енĕ çумĕнче выртакан BD татăка C' саспаллипе паллă тăваççĕ; b татăк çумĕнче выртакан DC татăка b' саспаллипе паллă тăваççĕ. Треугольникĕн шĕвĕр кĕтесне хирĕç выртакан енĕн квадрачĕ çинчен калакан теоремăпа усă курса, эпир çапла çырма пултаратпăр:



207 черт.



208 черт.

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac' \text{ пулать.}$$

Ку уравнениреН c' татăка шутласа кăларатпăр:

$$c' = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2a} \text{ пулать.}$$

Кун хыççăн ABD треугольникĕн катет пулса тăракан çӳллĕшне шутласа кăларатпăр:

$$h_a = \sqrt{c^2 - \left(\frac{a^2 + c^2 - b^2}{2a}\right)^2}.$$

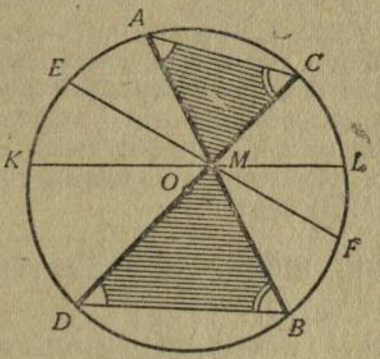
Çак майпах, треугольникĕн енĕсене кура, b тата c енĕсем çине антарнă h_b тата h_c çӳллĕшсен тăршшĕсене шутласа кăларма пулать.

VII. ÇАВРАШКАРИ ПРОПОРЦИЛЛĔ ЛИНИСЕМ.

199. Çаврашкари хăшпĕр пропорциллĕ линисем çинчен эпир малта каланăччĕ (189 §); халь тата урăххисем çинчен калар.

Теорема. ***Çаврашка ăшĕнчи точка*** (M, 209 черт.) ***урлă пĕр-пĕр хорда*** (AB) ***тата диаметр*** (CD) ***туртнă пулсан, хорда татăкĕсен произведенийĕ*** ($AM \cdot MB$) ***диаметр татăкĕсен произведенийĕпе*** ($MD \cdot MC$) ***пĕртан.***

Икĕ пулăшакан хордăсем (AC тата BD) туртсан, икĕ треугольник (AMC тата MBD, чертеж çинче вĕсене штрихленĕ) пулса тӑрать; вӗсем — пӗрьевӗрлӗ треугольниксем, мӗншӗн тесен вӗсен A тата D кӗтессем ҫаврашка ӑшне ҫырнӑ кӗтессем пулнӑран, иккӗшӗ те пӗр AD пӗкӗ ҫине пусса тӑраҫҫӗ. Треугольниксен пӗрьевӗрлӗхӗнчен ҫакӑн пек вывод тӑватпӑр:



209 черт.

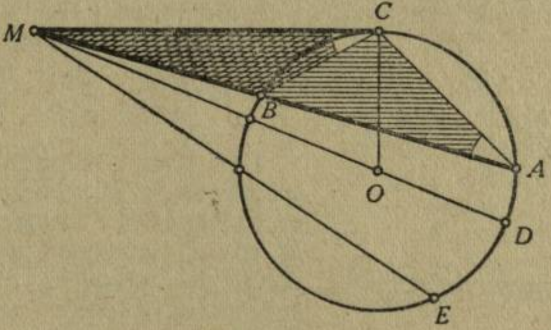
$$AM:MD=MC:MB,$$

ҫакӑнтан шутласан,

$$AM\cdot MB=MD\cdot MC$$ пулать.

200. Следстви. *Ҫаврашка ӑшӗнчи точка урлӑ* (*M*, 209 черт.) *кирек мӗн чухлӗ хорда туртсан та* (*AB*, *EF*, *KL*, ...) *кашни хорда татӑкӗсен произведенийӗ — пӗр хордӑсем тӗлӗшӗнчен те улӑшӑнми число*, мӗншӗн тесен ку произведени кашни хорда тӗлӗшӗнчен M точка урлӑ иртекен CD диаметр татӑкӗсен произведенийӗпе пӗртан.

201. Теорема. ***Ҫаврашка тулашӗнче тӑракан точкӑран*** (*M*, 210 черт.) ***пӗр-пӗр касакан лини*** (*MA*) ***тата сӗртӗнекен лини*** (*MC*) ***туртсан, касакан линипе унӑн ҫаврашка тулашӗнчи пайӗн произведенийӗ сӗртӗнекен линин квадрачӗпе пӗртан*** (касакан лини каснӑ тӗлти иккӗмӗш точкӑпа пӳлӗнет, сӗртӗнекен лини сӗртӗннӗ тӗлти точкӑпа пӳлӗнет).



210 черт.

Пулӑшакан AC тата BC хордӑсем туртсан, икӗ треугольник (*MAC* тата *MBC*, чертеж ҫинче вӗсене штрихленӗ) пулса тӑрать; вӑл треугольниксем пӗрьевӗрлӗ треугольниксем, мӗншӗн тесен вӗсен M кӗтесӗ — пӗрлехи кӗтес тата MCB кӗтеспе CAB кӗтес — пӗртан кӗтессем, мӗншӗн тесен вӗсене кашнине BC пӗккӗн ҫуррипе виҫеҫҫӗ. MAC треугольникре MA тата MC енсене илер; вӗсемпе килӗшсе тӑракан енсем MBC треугольникре MC тата MB енсем пулаҫҫӗ; ҫавӑнпа

$$MA:MC=MC:MB,$$

ҫакӑнтан шутласан,

$$MA \cdot MB = MC^2$$ пулать.

202. Следстви. *Çаврашка тулашĕнчи точкăран* (M, 210 черт.) *кирек мĕн чухлĕ касакан лини* (MA, MD, $ME, \ldots$) *туртсан та, кашни касакан линипе унăн çаврашка тулашĕнчи пайĕн произведенийĕ — пур касакан линисем тĕлĕшĕнчен те улăшăнми число,* мĕншĕн тесен ку произведени кашни касакан лини тĕлĕшĕнчен M точкăран туртнă сĕртĕнекен линин квадрачĕпе (MC^2) пĕртан.

VIII. ШĔВĔР КĔТЕСĔН ТРИГОНОМЕТРИЛЛЕ ФУНКЦИЙĔСЕМ.

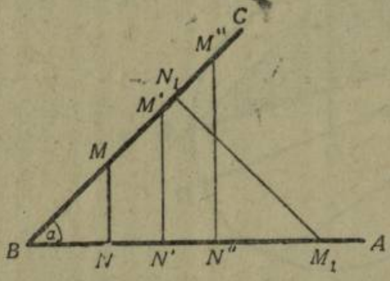
203. Определенисем. Пĕчĕк α саспалли — пĕр-пĕр шĕвĕр кĕтес пултăр (211 черт.) Унăн пĕр енĕ çинче пĕр-пĕр M точка илер, çав точкăран кĕтесĕн тепĕр енĕ çине MN перпендикуляр антарар. Ун чух вара тӳркĕтеслĕ треугольник (BMN) пулса тăрать. Çак треугольник енĕсен отношенийĕсене мăшăрăн-мăшăрăн илер, тӳрех каласан, çаксене илер:

$\frac{MN}{BM}$, урăхла каласан, кĕтесе хирĕç выртакан катетпа гипотенуза отношенине илер;

$\frac{BN}{BM}$, урăхла каласан, α кĕтес çумĕнче выртакан катетпа гипотенуза отношенине илер;

$\frac{MN}{BN}$, урăхла каласан, α кĕтесе хирĕç выртакан катетпа кĕтес çумĕнче выртакан тепĕр катет отношенине илер; унтан çак виçĕ тӳртĕн отношенисене илер:

$$\frac{BM}{MN}, \quad \frac{BM}{BN}, \quad \frac{BN}{MN}.$$



211 черт.

Çак ултă отношенисен пысăкăшĕ пĕрин те M точкăн BC ен çинчи вырăнĕнчен килмест. Чăнах та, M точка вырăнне урăх M', $M'', \ldots$ точкăсем илер те $M'N'$, $M''N'' \ldots$ перпендикулярсем антарар, вара BMN треугольникпе пĕрьевĕрлĕ $BM'N'$, $BM''N''$ треугольниксем пулса тăраççĕ, мĕншĕн тесен вĕсен килĕшӳллĕ кĕтесĕсем пĕр пек. Пĕрьевĕрлĕ треугольниксенче килĕшӳллĕ енсем пĕр-пĕринпе пропорциллĕ, çаванпа

$$\frac{MN}{BN} = \frac{M'N'}{BN'} = \frac{M''N''}{BN''} = \ldots$$

$$\frac{BN}{MN} = \frac{BN'}{M'N'} = \frac{BN''}{M''N''} = \ldots \text{ т. ыт. те.}$$

Çаплах тата эпир илнĕ отношенисен кашнин пысăкăшĕ M точка кĕтесĕн хăш енĕ çинче выртнинчен те килмест.

Сӑмахран, M_1 точкӑна (чертеж ҫавах) BA ен ҫинче илер те BC енне перпендикулярлӑ M_1N_1 туртар: $M_1N_1 \perp BC$, ун чух вара BM_1N_1 треугольник те BMN треугольникпе пӗрьевӗрлӗ пулать, мӗншӗн тесен вӗсен 2-шер пӗртан кӗтесӗсем пур, тӳрех каласан, пӗрер тӳрӗ кӗтес тата пӗрер шӗвӗр кӗтес (α) пур; α кӗтес икӗ треугольникне те кӗрет; ҫавӑнпа:

$$\frac{M_1N_1}{BM_1}=\frac{MN}{BM}=\dots \text{ пулать.}$$

Ҫапла вара, M точка α кӗтесӗн е пӗр енӗ ҫинче е тепӗр енӗ ҫинче хӑй тӑракан вырӑнне улӑштарнипе эпир илнӗ отношенисем улшӑнмаҫҫӗ; анчах кӗтес пысӑкӑшӗ улӑшӑнсан, паллах, вӗсем те улшӑнаҫҫӗ.

Кӗтесӗн кашни пысӑкӑшӗ валли ҫак отношенисен кашнин хӑйне уйрӑм число пур.

Ҫавӑнпа ҫапла калама пулать: кашни отношени кӗтесӗн анчах **функцийӗ** пулать, тата вӑл ҫак кӗтесӗн пысӑкӑшне кӑтартать.

Ҫакӑнта кӑтартнӑ пур отношенисене те **кӗтесӗн тригонометрилле функцийӗсем** теҫҫӗ.

Ҫак 6 отношенирен пуринчен ытла 4-шӗ час-час тӗл пулаҫҫӗ, вӗсене хӑйсене уйрӑм ятсем панӑ тата вӗсене уйрӑм паллӑсемпе ҫырса хураҫҫӗ:

α кӗтесе хирӗҫ выртакан катетпа гипотенуза отношенине α кӗтесӗн **синусӗ** теҫҫӗ тата ӑна акӑ ҫапла ҫырса хураҫҫӗ: $\sin\alpha$;

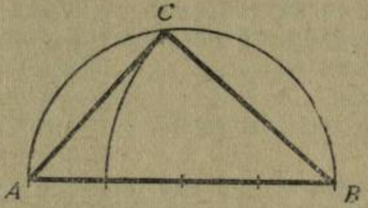
α кӗтес ҫумӗнче выртакан катетпа гипотенуза отношенине α кӗтесӗн **косинусӗ** теҫҫӗ тата ӑна акӑ ҫапла ҫырса хураҫҫӗ: $\cos\alpha$;

α кӗтесе хирӗҫ выртакан катетпа ҫак кӗтес ҫумӗнче выртакан тепӗр катет отношенине α кӗтесӗн **тангенсӗ** теҫҫӗ тата ӑна акӑ ҫапла ҫырса хураҫҫӗ: $\operatorname{tg}\alpha$;

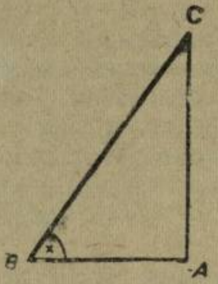
α кӗтес ҫумӗнче выртакан катетпа ӑна хирӗҫ выртакан катет отношенине (урӑхла каласан, тангенса тӳртӗн тӑракан отношение) α кӗтесӗн **котангенсӗ** теҫҫӗ тата ӑна акӑ ҫапла ҫырса хураҫҫӗ: $\operatorname{ctg}\alpha$.

Кашни катет гипотенузӑран пӗчӗкрех, ҫавӑнпа кирек хӑш кӗтесӗн синусӗпе косинусӗ единицӑран пӗчӗкрех число пулать; пӗр катет тепӗр катетран е пӗчӗкрех, пысӑкрах, е унпа пӗртан пулма пултарать, ҫавӑнпа тангенс та, котангенс та единицӑран пысӑкрах е пӗчӗкрех число е единицӑпа пӗртан пулма пултараҫҫӗ.

204. Тригонометрилле функцин панӑ пӗр пысӑкӑшӗнчен кӗтес туни. 1) Кӗтес чертежне тумалла, унӑн синусӗ $^3/_4$ число пултӑр. Тӳркӗтеслӗ треугольник тӑвар, унӑн пӗр катечӗпе гипотенузин отношенийӗ $^3/_4$ число пултӑр. Ку треугольникӗн шӗвӗр кӗтесӗнчен ҫак катета хирӗҫ выртакан кӗтесне илер. Ҫакӑн пек треугольник тӑвас тесен, пӗр-пӗр пысӑк мар татӑк илер; ҫав татӑк ҫине AB татӑк виҫсе хурар (212 черт.). AB татӑк пысӑк мар татӑкран 4 хут вӑрӑмрах пулмалла. AB ҫине ҫурҫавракӑш ҫырар, унтан гипотенузӑн $^3/_4$ пайӗпе пӗртан радиуспа B центртан пӗкӗ ҫырар, вӑл пӗкӗ ҫурҫавракӑша C точкӑра касса иртет. C точкӑна A тата B точкӑсемпе пӗрлештерсен, тӳркӗтеслӗ треугольник пулать; ҫав треугольникре A кӗтесӗн синусӗ шӑпах $^3/_4$ число пулать.



212 черт.



213 черт.

2) Çак уравнение панӑ: $\cos x = 0,7$, x кӗтес тумалла. Ку задачӑна та 1-мӗш задачӑна шутланӑ пекех шутламалла: AB татӑка (çав чертежах) гипотенуза вырӑнне илер, вӑл татӑк пӗр-пӗр 10 пӗртан пайлӑ пултӑр, x кӗтес çумӗнче выртакан AC катетра çавӑн пек пайсемех 7 пулччӑр; ун чух вара çак катет çумӗнче выртакан A кӗтес эпир шыракан кӗтес пулса тӑрать.

3) Панӑ: $\operatorname{tg} x = 1\frac{1}{2}$, x кӗтесӗн чертежне тумалла. Тӳркӗтеслӗ треугольник тумалла, унӑн пӗр катечӗ тепӗр катечӗнчен $1\frac{1}{2}$ хут пысӑкрах пулмалла. Тӳрӗ кӗтес туса (213 черт.), унӑн пӗр енӗ çине пӗр-пӗр AB татӑк хурар, тепӗр енӗ çине AC татӑк хурар, AC татӑк AB татӑкран $1\frac{1}{2}$ хут пысӑкрах пулмалла. B тата C точкӑсене пӗрлештерер те, B кӗтес пулса тӑрать, унӑн тангенсӗ $1\frac{1}{2}$ числопа пӗртан пулать.

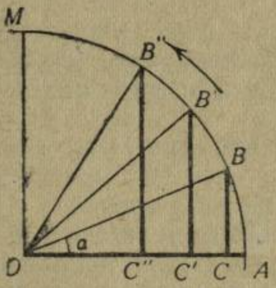
Панӑ котангенс тӑрӑх кӗтес тумалла пулсан та, çакӑн пек чертежах тума тивет; анчах ун чух эпир шыракан кӗтес AC катет çумӗнче тӑракан кӗтес пулать.

205. Кӗтес 0°-ран пуçланса 90° çитиччен улӑшӑннӑ чух тригонометрилле функцисем епле улӑшӑнни. Кӗтес улшӑннӑ чух синуспа косинус улӑшӑннине сӑнаса пыма авантарах пултӑр тесе, эпир çакна каласа хурар: çапла улӑшӑннӑ чух гипотенуза тӑршшӗ улӑшӑнмасть, вӑл вӑрӑмӑш виçин единиципе пӗртан пулса юлать, катетсем анчах улшӑнаççӗ. Вӑрӑмӑш виçин пӗр-пӗр единиципе пӗртан радиуспа (OA, 214 черт.) чӗрӗк çавракӑш (AM) çырар та унӑн центрӗнче тӑракан пӗр-пӗр кӗтес ($AOB = \alpha$) илер. B точкӑран OA радиус çине BC перпендикуляр антарсан, çаксем пулса тӑраççӗ:

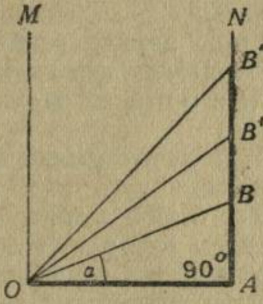
$$\sin \alpha = \frac{BC}{OB} = \frac{BC}{1} = BC \text{ енӗн числоллӑ пысӑкӑшӗ пулать.}$$

$$\cos \alpha = \frac{OC}{OB} = \frac{OC}{1} = OC \text{ енӗн числоллӑ пысӑкӑшӗ пулать.}$$

Халь ӗнтӗ çапла тӑвар: OB радиуса O центр тавра OA-ран пуçланса OM патне çитиччен çавӑрар; хӑш енне çавӑрмаллине чертеж çинче стрелкăпа кăтартнă. Ун чух вара α кĕтес 0°-ран 90°-а çитиччен пысăкланса пырать. (α кĕтес чертеж çинче



214 черт.



215 черт.

кăтартнă AOB, AOB', AOB'' т. ыт. пĕлтерĕшĕсем урлă иртет); α кĕтесе хирĕç выртакан BC катетăн числоллă пысăкăшĕ 0-рен ($\alpha=0°$ чух) пуçланса 1-е çитиччен ($\alpha=90°$ чух) ÿссе пырать; α кĕтес çумĕнче выртакан OC катетăн числоллă пысăкăшĕ 1-рен ($\alpha=0°$ чух) пуçланса 0-е çитиччен ($\alpha=90°$ чух) чакса пырать. Çапла вара, кĕтес **0°-рен 90°-а çитиччен пысăкланса пынă чух, унăн синусĕ 0-рен 1-е çитиччен пысăкланса пырать, косинус 1-рен 0-е çитиччен чакса пырать.**

Халь ĕнтĕ тангенс улăшăннине сăнар. Тангенс вăл кĕтесе хирĕç выртакан катетпа кĕтес çумĕнче выртакан катетăн отношенийĕ пулать, çавăнпа кунта çапла каласа хурсан авантарах пулĕ: шĕвĕр кĕтес улшăннă чух, ун çумĕнче выртакан катета улăштармăпăр, вăл вăрăмăш виçин единиципе пĕртан пулса юлать, тепĕр катечĕ улшăнать. OA татăка илер, вăл вăрăмăш виçин единиципе пĕртан (215 черт.), ăна AOB треугольникĕн улăшăнман катечĕ вырăнне йышăнар; çак треугольникĕн шĕвĕр кĕтесне ($AOB=\alpha$) улăштарма тытăнар.

Определени тăрăх, $\operatorname{tg}\alpha=\frac{AB}{OA}=\frac{AB}{1}=AB$ енĕн числоллă пысăкăшĕ пулать.

Халь ĕнтĕ A точкăран пуçласа B точкăна AN тăрăх B', B'',... точкăсем урлă çÿлтен çÿле куçарса пырар; ун чух вара, чертеж çинче кăтартнă пек, α кĕтеспе унăн тангенсĕ пысăкланнăçемĕн пысăкланса пыраççĕ; куçакан B точка A точка çине вырнаçсан, α кĕтес 0° пулсан, унăн тангенсĕ те O пулать. B точка AN лини тăрăх çÿлтен çÿле куçса, α кĕтес $AOM=90°$ кĕтес патне çывăхарса пысăкланнăçемĕн пысăкланнă чух, тангенсăн числоллă пысăкăшĕ те пысăкланнăçемĕн пысăкланать; вăл, паллах, кирек епле пысăк числоран та пысăкрах пулма пултарать (вĕçĕмсĕр пысăкланать). Апла пулсан, **кĕтес 0°-ран 90° таранччен пысăкланса пынă чух, унăн тангенсĕ те 0-рен тапранса чикĕсĕр пысăкланать.**

Çакна палăртса хăварар: пĕр-пĕр улшăнакан пысăкăш чикĕсĕр ÿссе пырать тесе калас вырăнне урăхла, вĕçĕмсĕр ÿссе пырать теççĕ; „вĕçĕмсĕрлĕх“ сăмаха çырура ∞ паллăпа çыраççĕ; сăмахран, тангенс улăшăннине çапла çырса хума пулать: кĕтес 0°-ран 90° таранччен пысăкланса пынă чух, ун тангенсĕ 0-рен ∞ таран пысăкланать.

Котангенс определенийĕнчен (203 §) çакă тухса тăрать: котангенс—тангенса тӳртĕн тăракан пысăкăш пулать ($\operatorname{ctg} \alpha = 1 : \operatorname{tg} \alpha$), çавăнпа $\operatorname{tg} \alpha$ 0-рен ∞ таран пысăкланнă чух, $\operatorname{ctg} \alpha$ ∞-рен 0 таран пĕчĕкленет.

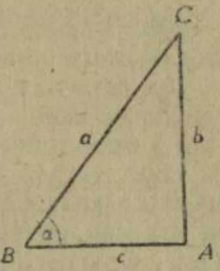
206. Тригонометрилле функцисен таблици. Çак кĕнеке вĕçĕнче таблица пур, вăл таблицăра 1°-ран 90° çитиччен тулли (тĕрĕслĕхне 5-мĕш вуншарлă палла çитернĕ) числоллă градуслă пур кĕтессем валли те тригонометрилле функцисем çырса хунă. Таблицăн пайĕсене çапла вырнаçтарнă: сулахайри пĕрремĕш юпинче (тăррине „градуссем“ тесе çырнă) градуссен числисене 1-рен 45 çитиччен вырнаçтарнă; иккĕмĕш юпинче (тăррине „синуссем“ тесе çырнă) пĕрремĕш юпинче кăтартнă кĕтессен тивĕçлĕ синусĕсен пысăкăшĕсем тăраççĕ; виççĕмĕш юпинче косинуссен, унтан тангенссен тата малалла котангенссен пысăкăшĕсене вырнаçтарнă. Юлашки, 6-мĕш юпинче каллех градус числисене 90°-ран 45° çитиччен вырнаçтарнă. Кăна (вырăн сахалтарах йышăнмалла пултăр тесе) акă мĕншĕн çапла тунă: синуспа косинус определенийĕнчен (203 §) çакă пулса тăрать: $\sin \alpha = \cos (90° - \alpha)$, $\cos \alpha = \sin (90° - \alpha)$ т. ыт.; апла пулсан, $\sin 1° = \cos 89°$, $\sin 2° = \cos 88°$ пулать т. ыт. Çавăнпа çӳле синуссем тесе çырнă юпа айне „косинуссем“ тесе çырнă, çӳле „косинуссем“ тесе паллă тунă юпа айне (сулахай енче виççĕмĕшĕ) „синуссем“ тесе çырнă т. ыт. Çапла ĕнтĕ 1°-ран 45° çитекен кĕтессем валли градуссен числисене сулахайран 1-мĕш юпара пăхмалла, тригонометрилле функцисен ячĕсене юпасен тăрринче çырнинчен пĕлмелле; 45°-ран 89° çитекен кĕтессем валли градуссен числисене сылтăмри юлашки юпаран илмелле, функцисен ячĕсене юпасен айĕнче çырнинчен пĕлмелле. Сăмахран, таблицăра çаксене тупар: $\operatorname{tg} 35° = 0{,}70021$, $\cos 53° = 0{,}60182$, $\operatorname{tg} 72° = 3{,}07768$ т. ыт. те.

Çак таблица пулăшнипе эпир кĕтесĕн тригонометрилле функцийĕсене кăна мар тупма пултаратпăр, паллă мар кĕтесĕн панă функцийĕ тăрăх кĕтесне хăйне те (çывăхартса) тупма пултаратпăр. Сăмахран, çакна панă пултăр: $\sin x = 0{,}61523$, x кĕтесе тупмалла. Синуссен юпинче 0,61523 çывăх тăракан число тупар; ун пек число 0,61566 пулать, вăл $\sin 38°$ пĕлтерет. $0{,}61523 < 0{,}61566$, çавăнпа $x < 38°$ пулать. Анчах тепĕр енчен, $0{,}61523 > 0{,}60182$ (юлашки число таблицăра 0,61566 числоран çӳлерех тăрать, вăл $\sin 37°$ пĕлтерет); çавăнпа $x > 37°$ пулать. Çапла ĕнтĕ эпир икĕ кĕтес шыраса тупрăмăр: пĕри 37°-лă, тепĕри 38°-лă, вĕсен хушшинче x кĕтес тăрать. Апла пулсан, x вырăнне 37°-лă кĕтес йышăнсан, эпир x-ăн çителĕксĕр илсе çывăхартнă пĕлтерĕшне тупатпăр; 38°-лă кĕтесе йышăнсан, x-ăн ытлашши илсе çывăхартнă пĕлтерĕшне тупатпăр; ку кĕтессене иккĕшне те 1° таран тĕрĕслĕхпе шутласа кăларнă. Икĕ кĕтесрен çак кĕтесне йышăнмалла: хăш кĕтесĕн синусĕ панă синуса çывăхарах тăрать, çав кĕтесе йышăнмалла (кунта 38°-лă кĕтесе йышăнсан, авантарах пулать).

Тата x кĕтесе çак уравнени тăрăх тупмалла пултăр: $\operatorname{ctg} x = 0{,}7826$. Котангенссен юпинче çаксене тупатпăр: $0{,}78129 = \operatorname{ctg} 52°$; $0{,}80978 = \operatorname{ctg} 51°$.

$0{,}80978 > 0{,}7826 > 0{,}78129$ пулнă пирки $51° < x < 52°$, x кĕтес 52°-а çывăхрах тăрать, çавăнпа та $x = 52°$ (1° таран тĕрĕслĕхпе) йышăнсан авантарах пулать.

207. Тӳркĕтеслĕ треугольникĕн енĕсемпе кĕтесĕсен хушшинчи çыхăну. 1) Тӳркĕтеслĕ треугольникрен (ABC, 216 черт.) çакна тупатпăр:



216 черт.

$$\frac{b}{a} = \sin B; \ \frac{c}{a} = \cos B;$$

çакăнтан шутласан:

$$b = a \sin B, \ c = a \cos B \text{ пулаççĕ.}$$

$B = 90° - C$, çавăнпа $\sin B = \cos C$ тата $\cos B = \sin C$ пулать; апла пулсан, малта тăракан пĕртанлăх çумне çакна хушма пулать:

$$b = a \sin B = a \cos C;$$

$$c = a \cos B = a \sin C.$$

Çапла ĕнтĕ, **тӳркĕтеслĕ треугольникĕн катечĕ хăйне хирĕç выртакан кĕтес синусĕ çине, е çав катет çумĕнче выртакан кĕтес косинусĕ çине ӳстернĕ гипотенузăпа пĕртан.**

2) Çак треугольникренех çакна тупатпăр:

$$\frac{b}{c} = \operatorname{tg} B, \ \frac{c}{b} = \operatorname{ctg} B;$$

çакăнтан шутласан:

$$b = \operatorname{ctg} B, \ c = b \operatorname{ctg} B \text{ пулаççĕ.}$$

Анчах $\operatorname{tg} B = \operatorname{ctg}(90° - B) = \operatorname{ctg} C$ тата $\operatorname{ctg} B = \operatorname{tg}(90° - B) = \operatorname{tg} C$ çавăнпа çапла çырма пулать:

$$b = c \operatorname{tg} B = c \operatorname{ctg} C; \ c = b \operatorname{ctg} B = b \operatorname{tg} C,$$

урăхла каласан, **пĕр катет хăйне хирĕç выртакан кĕтес тангенсĕ çине е çав катет çумĕнче выртакан кĕтес котангенсĕ çине ӳстернĕ тепĕр катетпа пĕртан.**

208. Тӳркĕтеслĕ треугольниксене шутлани. Малта кăтартнă çыхăнусем тӳркĕтеслĕ треугольниксене шутлама май параççĕ, урăхла каласан, хăшпĕр панă элементсем тăрăх треугольникĕн ытти элеменчĕсене шутлама пулать. Тĕслĕх илсе кăтартар.

Тĕслĕх. Тӳркĕтеслĕ треугольникĕн çак элеменчĕсене панă: гипотенуза $a = 4{,}5$; кĕтес $C = 42°$. Катетсене тата B кĕтесе тупмалла;

$$b = a \cos C = 4{,}5 \cdot \cos 42°; \ c = a \sin C = 4{,}5 \cdot \sin 42°.$$

Таблицăран (тăватă вуншарлă палă илсе) çакна тупатпăр:

$$\sin 42° = 0{,}6691, \ \cos 42° = 0{,}7431.$$

Апла пулсан, $b=4,5\cdot 0,7431=3,34395$; $c=4,5\cdot 0,6691=3,01095$. $B=90^\circ-C=48^\circ$.

IX. ГЕОМЕТРИРЕ АЛГЕБРӐПА УСӐ КУРАССИ ҪИНЧЕН ӐНЛАНТАРНИ.

209. Задача. *Панӑ татӑка вӑтам тата хӗрринчи отношениллӗ туса пайламалла.*

Ку задачӑна ҫапла ӑнланмалла: панӑ татӑка икӗ пая уйӑрмалла, пысӑкрах пайӗ пӗтӗм татӑкпа унӑн пӗчӗкрех пайӗ хушшинче вӑтам пропорциллӗ пысӑкӑш пулмалла.

Панӑ татӑка уйӑрмалли икӗ пайран пӗр пайне тупсан, задача шутласа кӑларнӑ пулать. Ҫавӑнпа ӗнтӗ пысӑк пайне тупар, урӑхла каласан, пӗтӗм татӑкпа унӑн пӗчӗкрех пайӗ хушшинче вӑтам пропорциллӗ пысӑкӑш пулса тӑракан пайне тупар. Малтан ҫапла каласа хурар: ҫак пайламалли татӑкӑн пысӑк пайӗн чертежне тупмасӑрах, унӑн тӑршшӗне кӑна шутласа кӑларар. Ун чух вара задачӑна алгебрӑлла ҫапла шутламалла: панӑ татӑкӑн тӑршшӗне a саспаллипе, пысӑкрах пайӗн тӑршшӗне x саспаллипе паллӑ тусан, пӗчӗкрех пайӗ вара $a-x$ пулать: унтан, задача ыйтнипе килӗшсе, эпир ҫакӑн пек пропорци ҫыратпӑр:

$$a:x=x:(a-x).$$

ҫакӑнтан шутласан,

$$x^2=a(a-x),\ \text{е}\ x^2+ax-a^2=0\ \text{пулать.}$$

Ку квадратла уравнение шутласан, ҫакна тупатпӑр:

$$x_1=-\frac{a}{2}+\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2+a^2};\quad x_2=-\frac{a}{2}-\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2+a^2}.$$

Иккӗмӗш решени — отрицательнӑй решени, ӑна йышӑнмастпӑр; пӗррӗмӗш решени — положительнӑй решени; ӑна йышӑнатпӑр та ҫапла ҫырса хуратпӑр.

$$x_1=\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2+a^2}-\frac{a}{2}=\sqrt{\frac{a^2}{4}+a^2}-\frac{a}{2}=\sqrt{\frac{5a^2}{4}}-\frac{a}{2}=$$

$$=\frac{a}{2}\sqrt{5}-\frac{a}{2}=\frac{a(\sqrt{5}-1)}{2}=a\cdot 0,61803\ \text{пулать}\dots.$$

Ҫапла ӗнтӗ кун пек задача кирек хӑҫан та пулма пултарать, тата унӑн пӗр решени кӑна пулать.

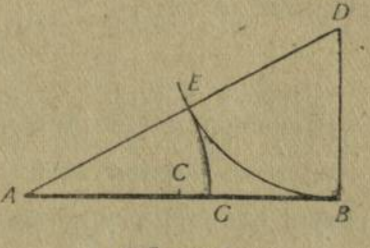
Тӳрӗ лини татӑкӗн чертежне тӑвас пулсан, тата ун тӑршшӗне тупнӑ формула тӑрӑх числопа кӑтартса ҫырас пулсан, эпир, вӑл татӑка панӑ татӑк ҫине хурса, вӑтам тата хӗрринчи отношениллӗ туса пайлӑттӑмӑрччӗ. Апла пулсан, вара тупнӑ формулӑн чертежне тумалла пулать. Вӑл чертежа тӑвас тесен, формулине ҫӑмӑллатичченхи тӗспе илсен авантарах пулать, урӑхла каласан, ҫакна илмелле:

$$x_1=\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2+a^2}-\frac{a}{2}.$$

$\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + a^2}$ выражение хӑйне уйрӑм илсе пӑхсан, вӑл тӳркӗтеслӗ треугольникӗн гипотенузи тӑршшӗне кӑтартакан выражени пулни паллӑ: вӑл треугольникӗн пӗр катечӗ a, тепри $\frac{a}{2}$ пулаҫҫӗ. Ҫакӑн пек треугольник тусан, $\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + a^2}$ формулӑпа ҫырнӑ татӑка та тупма пулать. Унтан x_1 татӑка тупас тесен, тунӑ треугольникӗн гипотенузинчен $\frac{a}{2}$ кӑлармалла. Ҫапла вара чертежа акӑ епле тумалла пулать:

Панӑ $AB = a$ татӑка (217 черт.) C точкӑра ҫурмаран уйӑратпӑр. Татӑкӑн B вӗҫӗнчен перпендикуляр тӑрататпӑр та ун ҫине BC тӑршшӗ BD виҫсе хуратпӑр. A точкӑна D точкӑпа пӗрлештерсен, тӳркӗтеслӗ $\triangle ABD$ пулса тӑрать; унӑн пӗр катечӗ $AB = a$, тепӗр катечӗ $BD = \frac{a}{2}$. Ҫавӑнпа унӑн AD гипотенузи $\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + a^2}$ выраженипе пӗртан пулать. Гипотенузӑран $\frac{a}{2}$ татӑк тӑршшӗне кӑларас тесе, D точкӑна центр туса, $BD = \frac{a}{2}$ радиуспа пӗкӗ ҫырар. Ун чух вара AE татӑк $\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + a^2} - \frac{a}{2}$ выраженипе пӗртан пулать, урӑхла каласан, x-па пӗртан пулать. AE татӑка AB ҫине, (A точкӑран пуҫласа G точка таран) виҫсе хурсан G точка пулса тӑрать. Ҫак G точкӑра AB татӑк, вӑтам тата хӗрринчи отношенилле пулса, икӗ пая уйӑлать.

Асӑрхаттарни. Геометрире татӑка вӑтам тата хӗрринчи отношенилле туса пайлани панӑ ҫаврашка ӑшне ҫырнӑ тӗрӗс 10-угольник чертежне тума кирлӗ пулать[1].



217 черт.

210. Геометрилле задачӑсене алгебрӑлла мелпе шутлани. Тума панӑ задачӑна эпир геометрире алгебрӑпа усӑ курнипе шутласа кӑлартӑмӑр. Ку мелпе задачӑна ҫапла тӑваҫҫӗ: задачӑна шутлама май пултӑр тесе, чи малтан мӗнле лини татӑкӗ тупмаллине пӗлеҫҫӗ. Унтан, панӑ татӑкӑн тӑршшӗсене $a, b, c, \ldots$ саспаллисемпе, тупмалли татӑка x саспаллипе паллӑ туса, задача условийӗсемпе тата вӗреннӗ теоремӑсемпе усӑ курса, уравнени ҫыраҫҫӗ; вӑл уравнение алгебра правилисем тӑрӑх шутласа кӑлараҫҫӗ. Тупнӑ формулӑна тӗпчесе сӑнаҫҫӗ, урӑхла каласан, ҫаксене пӗлеҫҫӗ: вӑл формула кирек хӑҫан та пулма пултаракан решенисем парать-и е хӑш-хӑш чухне

---

[1] Татӑка вӑтам тата хӗрринчи отношенилле туса пайланине **ылттӑнла касу** теҫҫӗ.

кăна пулакан решенисем парать-и, тата е пĕр решени пулать-и, е темиçе-и? Унтан формула тăваççĕ, урăхла каласан, тӳрĕ лини татăкĕн чертежне туса, çав татăкăн числоллă пысăкăшне хатĕр формулăпа çырса хураççĕ.

Çапла вара, геометри задачисене алгебра мелĕпе шутласа кăларасси, пĕтĕмлетсе каласан, тăватă пайлă пулать: 1) уравнени çырасси, 2) ăна шутласа кăларасси, 3) тупнă формулăна тĕпчесе сăнасси тата 4) çав формула тăрăх чертеж тăвасси.

Задачăра ыйтнипе хăш чух темиçе татăк тупмалла пулать. Ун чух вара, вĕсем числоллă пысăкăшĕсене x, $y, \ldots$ саспаллисемпе паллă туса, уравненисем çыраççĕ: миçе татăк тупмалла, çавăн чухлĕ уравнени çыраççĕ.

211. Çăмăл формулăсен чертежĕсене тăвасси. Циркульпе тата линейкăпа тума юракан чертежсен çăмăл формулисене кăтартса парар. Малтанах çакна каласа хурар: a, b, $c, \ldots$ саспаллисем панă татăксен тăршшĕсене пĕлтереççĕ, x саспалли тупмалли татăкăн тăршшĕне пĕлтерет. Чертежĕсене тума çăмăлтарах формулăсем:

$$x = a + b + c,\ x = a - b,\ x = 2a,\ 3a, \ldots,$$

вĕсем çинче чарăнса тăмасăрах, йывăртарах формулăсем çине куçар, акă вĕсем:

1) Çак формулăсен $x = \frac{a}{2}, \frac{a}{3}, \ldots\ x = \frac{2}{3}a, \ldots$ т. ыт. чертежĕсене a татăка пĕр пек пайсене уйăрса тăваççĕ; унтан, кирлĕ пулсан, кашни пайне 2, 3,… хут илеççĕ.

2) $x = \frac{ab}{c}$ формула c, a тата b татăксем тĕлĕшĕнчен тăваттăмĕш пропорциллĕ татăка кăтартса тăрать. Чăнах та, ку пĕртанлăхран çакăн пек вывод тума пулать:

$$cx = ab,$$

çакăнтан шутласан,

$$c : a = b : x \text{ пулать.}$$

Çавăнпа x татăка тăваттăмĕш пропорциллĕ татăк чертежне тумалли мелпе (185 §) тупаççĕ.

3) $x = \frac{a^2}{b}$ формула b, a тата a татăксем тĕлĕшĕнчен тăваттăмĕш пропорциллĕ татăка кăтартса тăрать е тата вăл формула çинчен çапла калаççĕ: $x = \frac{a^2}{b}$ формула b тата a татăксем тĕлĕшĕнчен виççĕмĕш пропорциллĕ татăка кăтартса тăрать, теççĕ. Чăнах та, панă пĕртанлăхран çакăн пек вывод тума пулать:

$$bx = a^2,$$

çакăнтан шутласан,

$$b : a = a : x \text{ пулать.}$$

Çавăнпа x татăка тăваттăмĕш пропорциллĕ татăка шыраса тупакан мелпех тупаççĕ (анчах a татăка икĕ хут виççе хума тивет).

4) $x=\sqrt{ab}$ формула a тата b хушшинче вăтам пропорциллĕ пысăкăша кăтартать. Чăнах та, ку формулăран çакăн пек вывод тума пулать:

$$x^2=ab,$$

çакăнтан шутласан,

$$a:x=x:b \text{ пулать.}$$

Çавăнпа x пысăкăша вăтам пропорциллĕ татăк чертежне тумалли малта кăтартнă мелпе (190 §) тупаççĕ.

5) $x=\sqrt{a^2+b^2}$ формула тўркĕтеслĕ треугольникĕн гипотенузине кăтартать, унăн катечĕсем a тата b пулаççĕ.

6) $x=\sqrt{a^2-b^2}$ формула тўркĕтеслĕ треугольникĕн катетне кăтартать, унăн гипотенузи a, тепĕр катечĕ b пулаççĕ.

Çак формулăн чертежне 126 §-ра кăтартнă пек тума авантарах пулать.

Кунта кăтартнă формулăсем тĕп формулăсем пулаççĕ. Вĕсем пулăшнипе йывăртарах формулăсен чертежĕсене тăваççĕ. Сăмахран:

7) $x=a\sqrt{\frac{2}{3}}$ пысăкăша радикал айне кĕртсен, çакă пулса тăрать:

$$x=\sqrt{\frac{2}{3}a^2}=\sqrt{a\,.\,\frac{2}{3}a}.$$

Кунтан x татăк a тата $\frac{2}{3}$ a тўрĕ линисем хушшинче вăтам пропорциллĕ пысăкăш пулни курăнса тăрать.

8) $x=\sqrt{a^2+b^2-c^2+d^2}$. Малтан çакна каласа хурар: a^2+ $+b^2=k^2$. Ун чух вара k татăка тўркĕтеслĕ треугольникĕн гипотенузине тупнă пек шыраса тупаççĕ; унăн катечĕсем a тата b пулаççĕ. k татăк чертежне тăвар та çапла калар: $k^2+d^2=l^2$. Ун чухне вара l татăка тўркĕтеслĕ треугольникĕн гипотенузине тупнă пек шыраса тупаççĕ, унăн катечĕсем k тата d пулаççĕ. l чертежне тăвар та çакă пулса тăрать: $x=\sqrt{l^2-c^2}$. Çавăнпа x татăк l гипотенузăллă треугольникĕн пĕр катечĕ, c тепĕр катечĕ пулать.

Урăх тĕслĕхсем илсе кăтартмăпăр, кусем те çитĕç. Малалла çапла калăпăр: алгебрăлла формулăсен чертежĕсене тумалли мелсене тĕпĕ-йĕрĕпе пăхса тухнă хыççăн, çакăн пек питĕ кирлĕ вывод тумалла пулать.

Линейкăпа тата циркульпе çакăн пек алгебрăлла выраженисен чертежĕсене кăна тума май пур: вăл выраженисем рациональнăй операцисен вĕçĕмлĕ числисемпе усă курнипе тата квадрат тĕпĕсене тупассипе усӑ курнипе паллӑ пысӑкӑшсенчен пулма пултараҫҫӗ.

УПРАЖНЕНИСЕМ.

Теоремӑсем тӗрӗссине кӑтартмалла.

1. Трапеци тӗпӗсен варрисем урлӑ туртнӑ тӳрӗ лини трапецин параллельлӗ мар енӗсем пӗр-пӗрне касса иртекен точка урлӑ тата диагоналӗсем пӗр-пӗрне касса иртекен точка урлӑ иртет.

2. Треугольникӗн танмар енӗсем хушшинче выртакан кӗтес тӑрринчен биссектрисӑпа медиана туртсан, биссектриси медианинчен кӗскерех пулать.

3. Икӗ ҫаврашка тул енчен сӗртӗнеҫҫӗ пулсан, вӗсен тулашӗнчен сӗртӗнсе иртекен пӗрлехи линин сӗртӗннӗ тӗлти точкисен хушшинчи пайӗ ҫаврашкасен диаметрӗсен хушшинче вӑтам пропорциллӗ татӑк пулса тӑрать.

4. Кӗтес енӗсем ҫине ун тӑрринчен пуҫласа пропорциллӗ татӑксем виҫсе хурсан, вӗсен тивӗҫлӗ вӗҫӗсене пӗрлештерекен тӳрӗ линисем пӗр-пӗринпе параллельлӗ пулаҫҫӗ

5. Тӳркӗреслӗ треугольникӗн (ABC) ӑшне $DEFG$ квадрат ҫырсан, унӑн DE енӗ BC гипотенуза ҫинче выртать пулсан, ҫак DE ен гипотенузӑн BD тата BC татӑкӗсен хушшинче вӑтам пропорциллӗ татӑк пулса тӑрать (гипотенуза ҫинчи точкӑсем B, D, E, C йӗркепе тӑраҫҫӗ).

6. Икӗ татӑк (AB тата CD е вӗсен тӑсӑмӗсем) пӗр-пӗрне E точкӑра касса иртеҫҫӗ пулсан, тата $BE \cdot EA = EC \cdot ED$ пулсан, A, B, C, D точкӑсем пӗр ҫавракӑш ҫинче выртаҫҫӗ (200, 202 §-ри теоремӑсен тӳртӗн теореми).

7. Панӑ: O ҫавракӑш тата икӗ точка A тата B. Ҫак точкӑсем урлӑ темиҫе ҫавракӑш туртнӑ, вӗсем O ҫавракӑша касса е сӗртӗнсе иртеҫҫӗ. Ҫак тӗрӗссине кӑтартмалла: ҫак ҫавракӑшсем O ҫавракӑша касса иртнӗ тӗлти точкӑсене пӗрлештерекен пур хордӑсем те, ҫавӑн пекех тата вӗсене сӗртӗнсе иртекен пӗрлехи линисем те (вӗсене малалла тӑснӑ чух) AB татӑкӑн тӑсӑмӗ ҫинче выртакан пӗр точка ҫине пуҫтарӑнаҫҫӗ.

8. Ҫакӑн ҫине никӗсленсе, панӑ икӗ точка (A тата B) урлӑ иртекен тата панӑ O ҫавракӑша сӗртӗнекен ҫавракӑш чертежне тумалли мел тупмалла.

9. Тӳремҫи ҫинче выртакан пӗр-пӗр икӗ ҫаврашка панӑ пултӑр. Ҫак ҫаврашкасен икӗ радиусӗ пӗр-пӗринпе параллельлӗ куҫса пырсан, вӗсен вӗҫӗсем урлӑ иртекен тӳрӗ лини центрсен линине кирек хӑҫан та пӗр точкӑра (икӗ ҫаврашка пӗрьевӗрлӗх центрӗнче) касса каять.

10. Треугольник ӑшӗнче унӑн медиани касакан енӗпе параллельлӗ тӳрӗ линисем туртнӑ пулсан, ҫав медиана ҫак линисене пурне те ҫурмаран уйӑрать.

11. Пӗр точкӑран тухакан виҫӗ тӳрӗ лини панӑ. Ҫак линисенчен пӗрин тӑрӑх пӗрер точка куҫса пырсан, ҫав точкӑпа ытти икӗ тӳрӗ линисен хушшин кирек хӑҫан та пӗр отношени пулать

12. Икӗ ҫавракӑш концентрически пулсан, вӗсенчен пӗр ҫавракӑшӗ ҫинчен илнӗ кирек хӑш точкӑна та тепӗр ҫавракӑшӑн кирек хӑш диаметрӗ вӗҫӗсене пӗрлештерекен татӑксен квадрачӗсен сумми улӑшӑнман пысӑкӑш пулать (197 §).

13. Пӗр-пӗр треугольникӗн виҫӗ ҫӳллӗшӗн тӗпӗсене тӳрӗ линисемпе пӗрлештерсен, ҫак треугольникӗн тӑррисем патӗнче пулса тӑнӑ виҫӗ треугольник панӑ треугольникпе пӗрьевӗрлӗ пулаҫҫӗ. Панӑ треугольникӗн ҫӳллӗшӗн тӗпӗсене пӗрлештернипе пулакан треугольникре панӑ треугольникӗн ҫӳллӗшӗсем биссектриса пулса тӑнине кӑтартмалла.

14. Панӑ ҫавракӑшӑн AB диаметрне B точка хыҫне тӑснӑ. Ҫак тӑсӑм ҫинчи пӗр-пӗр C точка урлӑ AB патне паллӑ мар перпендикуляр туртнӑ ($CD \perp AB$). Ҫак перпендикулярӑн пӗр-пӗр M точкипе A точкӑна тӳрӗ линипе пӗрлештерсен, $AM \cdot AA_1$ произведени (ҫак тӳрӗ лини ҫавракӑша касса иртекен иккӗмӗш точкӑна A_1 саспаллипе паллӑ тунӑ) кирек хӑш M точка тӗлӗшӗнчен те улӑшӑнми пысӑкӑш пулать.

Геометрилле вырӑнсене тупмалла:

15. Ҫавракӑшӑн панӑ точки урлӑ иртекен пур хордӑсен те варрисен геометрилле вырӑнне тупмалла.

16. Ҫавракӑшӑн панӑ точки урлӑ иртекен пур хордӑсене те пӗр отношениллӗ ($m : n$) туса пайлакан точкӑсен геометрилле вырӑнне тупмалла.

17. Панă кĕтесĕн енĕсемпе точкăсен хушшисем пĕр отношениллĕ ($m:n$), çав точкăсен геометрилле вырăнне тупмалла.

18. Çак точкăсен геометрилле вырăнне тупмалла: тупмалли точкăсемпе икĕ панă точка хушшисен квадрачĕсен сумми çав точкăсемшĕн улăшăнми пысăкăш пулать (197 §).

19. Çак точкăсен геометрилле вырăнне тупмалла: вăл точкăсемпе икĕ панă точка хушшисен квадрачĕсен разноçĕ çав точкăсемшĕн улăшăнми пысăкăш пулать.

20. Çак точкăсен геометрилле вырăнне тупмалла: вăл точкăсем çавракăшăн точкисене панă O точкăпа (çаврашка ăшĕнче е унăн тулашĕнче выртакан точкăпа) пĕрлештерекен пур тӳрĕ линисене те панă отношениллĕ ($m:n$) пайлаççĕ

Чертеж тумалли задачăсем.

21. Кĕтес ăшĕнче е унăн тулашĕнче панă точка урлă тӳрĕ лини туртмалла; çав лини кĕтес енĕсемпе точка хушшинчи татăкĕсен пĕр-пĕринпе панă $m:n$ отношениллĕ пулмалла.

22. Треугольникре точка тупмалла, вăл точкăран треугольникĕн енĕсем çине антарнă перпендикулярсем пĕр-пĕринпе панă $m:n:p$ отношениллĕ пулмалла (17-мĕш упражнение пăх).

23. Панă кĕтесĕнчен, çав кĕтесĕ çумĕнчи пĕр енĕнчен тата çав енĕпе виççĕмĕш енĕ отношенийĕнчен треугольник тумалла (миçе решени пулать)?

24. Тăрринчи кĕтесĕнчен, тĕпĕнчен тата тĕпĕпе пĕр аяккинчи енĕн отношенинчен треугольник тумалла.

25. Çӳллĕшĕнчен, тăрринчи кĕтесĕнчен тата тĕпĕ татăкĕсен отношенийĕнчен треугольник тумалла.

26. Тăрринчи кĕтесĕнчен, тĕпĕнчен тата тĕпĕ çинче панă точкăран треугольник тумалла; çав тĕпĕ çинчи точка урлă тăрринчи кĕтесĕн биссектриси иртет.

27. Икĕ кĕтесĕнчен тата тĕпĕпе çӳллĕшĕ сумминчен е разноçĕнчен треугольник тумалла.

28. Тăрринчи кĕтесĕнчен тата тĕпĕпе çӳллĕшĕн сумминчен тануралла треугольник тумалла.

29. Вĕçĕмсĕр MN тӳрĕ лини çинче икĕ точка (A тата B) панă. Çак тӳрĕ лини çинче виççĕмĕш точка (C) тупмалла; $CA:CB=m:n$ пулмалла; m тата n тӳрĕ линин татăкĕсем е панă числосем пулмалла ($m\neq n$ пулсан, çакăн пек точка илнĕ пулать: пĕри A тата B хушшинче, тепри AB татăкăн тулашĕнче пулать).

30. Панă çаврашка ăшне треугольник çырмалла; вăл треугольнике тума унăн тĕпне тата ытти икĕ енĕн отношенине панă.

31. Панă çаврашка ăшне треугольник çырмалла; вăл треугольнике тума унăн тĕпне тата пĕр паллă мар енĕ патне туртнă медианине панă.

32. Панă сегмент ăшне квадрат çырмалла: унăн пĕр енĕ хорда çинче, хирĕç выртакан кĕтесĕсен тăррисем пĕкĕ çинче выртмалла.

Кăтарту: çак задачăсене пĕрьевĕрлĕх меточĕпе шутламалла (181 §).

33. Панă треугольник ăшне квадрат çырмалла, унăн пĕр енĕ треугольникĕн тĕпĕ çинче, хирĕç выртакан кĕтесĕсен тăррисем треугольникĕн аяккинчи енĕсем çинче выртмалла.

34. Панă треугольник ăшне прямоугольник çырмалла (çакăн умĕнчи задачăна пăх); унăн енĕсем $m:n$ отношениллĕ пулмалла.

35. Панă квадрат тавра панă треугольникпе пĕрьевĕрлĕ треугольник çырмалла.

36. Çавракăш тата ун çинче икĕ точка (A тата B) панă. Çак çавракăш çинче выртакан виççĕмĕш точкăна (C) тупмалла; C точкăпа A тата B точкăсен хушшисем панă отношениллĕ пулмалла.

37. Икĕ енĕнчен тата вĕсен хушшинчи кĕтесĕн биссектрисинчен треугольник тумалла (196 черт. пăх: малтан $CE:BD=AE:AB$ пропорцирен CE тӳр лини тупатпăр; унтан вара BCE треугольник чертежне тăватпăр т. ыт.те).

38. x татăкăн чертежне тумалла; x татăкпа m татăк отношенийĕ $a^2:b^2$ отн шени пек пулмалла (a тата b—панă татăксем).

39. Çаврашка тулашĕнче выртакан точкăна тупмалла; çак точкăран ту çавракăша сĕртĕнекен лини касса иртекен линирен икĕ хут кĕскерех пулма касакан лини, çав точкăранах тухса, центр урлă иртет (алгебрăпа усă малла).

40. Çаврашка тулашĕнче выртакан точка урлă касакан лини туртмалла ракăш вăл линие панă отношениллĕ пайламалла (алгебрăпа усă курмалла)

41. Виҫӗ ҫӳллӗшӗнчен (h_1, h_2 тата h_3) треугольник тумалла. Малтанах туркӗтеслӗ треугольниксен пӗрьевӗрлӗхӗпе усӑ курса ҫӳллӗшсемпе тивӗҫлӗ енсем пӗр-пӗринпе тӳртӗн пропорциллӗ пулнине кӑтартмалла; h_1, h_2 тата h_3 ҫӳллӗшсене, x_1, x_2 тата x_3 саспаллипе тивӗҫлӗ енӗсене паллӑ тусан, вара

$$x_1 : x_2 = h_2 : h_1,$$

$$x_2 : x_3 = h_3 : h_2 = 1 : \frac{h_2}{h_3} = h_1 : \frac{h_1 h_2}{h_3} \text{ пулать,}$$

ҫакӑнтан шутласан,

$$x_1 : x_2 : x_3 = h_2 : h_1 : \frac{h_1 h_2}{h_3} \text{ пулать.}$$

$\frac{h_1 h_2}{h_3}$ выражени h_3, h_2 тата h_1 пысӑкӑшсем тӗлӗшӗнчен тӑваттӑмӗш пропорциллӗ пысӑкӑш пулать. Унӑн чертежне тусан (вӑл k пултӑр), тӳрӗ линин виҫӗ татӑкӗ h_2, h_1 тата k пулса тӑрҫҫӗ; ҫак татӑксем тата тупмалли енсем пӗр-пӗринпе пропорциллӗ; апла пулсан, енӗсене ҫак татӑксенчен тунӑ треугольник тупмалли треугольникпе пӗрьевӗрлӗ пулать; ҫавӑнпа та треугольник чертежне тӑвас тесен, вӑл треугольник панӑ треугольникпе пӗрьевӗрлӗ пулса, панӑ ҫӳллӗшлӗ пулмалла.

42. Ҫак формулӑсем кӑтартакан татӑксен чертежӗсене тумалла:

$$1)\ x = \frac{abc}{de} = \frac{ab}{d} \cdot \frac{c}{e}$$

(тӑваттӑмӗш пропорциллӗ пысӑкӑш чертежне икӗ хут тума тивет);

$$2)\ x = \sqrt{a^2 + bc}$$

(малтанах $k = \sqrt{bc}$ татӑк чертежне, унтан $x = \sqrt{a^2 + k^2}$ татӑк чертежне тумалла).

Шутласа кӑлармалли задачӑсем.

43. Шӗвӗр кӗтеслӗ треугольникӗн панӑ a тӗпӗнчен тата унӑн h ҫӳллӗшӗнчен ҫак треугольник ӑшне ҫырса тунӑ квадратӑн x енне шутласа кӑлармалла; квадратӑн пӗр енӗ треугольникӗн тӗпӗ ҫинче, унӑн икӗ тӑрри треугольникӗн аяккинчи енӗсем ҫинче выртмалла.

44. Треугольникӗн енӗсем 10, 12 тата 17 метр. 17 метрлӑ енне хирӗҫ выртакан кӗтесӗн биссектриси ҫав енне икӗ татӑка уйӑрать. Ҫав татӑксене шутласа кӑлармалла.

45. Тӳркӗтес тӑрринчен гипотенуза ҫине антарнӑ перпендикуляр ҫав гипотенузӑна икӗ пая (m тата n пайсене) уйӑрать. Катетсене шутласа кӑлармалла.

46. ABC треугольникӗн панӑ (a, b тата c) виҫӗ енӗ тӑрӑх BC енӗ патне туртнӑ AD медианӑна шутласа кӑлармалла.

Кӑтартса пани. AD татӑка $DE = AD$ тӑршшӗ тӑсар та E точкӑна B тата C точкӑсемпе пӗрлештерер, ун чух вара параллелограм пулса тӑрать, параллелограм тӗлӗшӗнчен 197 §-ри теоремӑпа усӑ курмалла.

47. ABC треугольникӑн енӗсем ҫакӑн пек: $AB = 7$, $BC = 15$, тата $AC = 10$. Ҫакна тупмалла: A кӗтес епле йышши кӗтес пулать? тата B тӑрринчен антарнӑ ҫӳллӗшне шутласа кӑлармалла.

48. Ҫаврашка тулашӗнче выртакан точкӑран пуҫласа ҫаврашкана сӗртӗнсе иртекен a лини тата ӑна касса иртекен тепӗр лини туртнӑ. Касакан линин тӑршшӗне шутласа кӑлармалла; унӑн тулашӗнчи пайӗпе шалти пайӗ $m : n$ отношениллӗ.

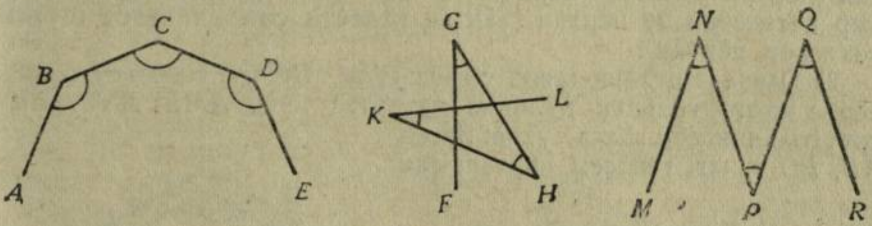
49. Икӗ ҫаврашкан радиусӗсем R тата r; вӗсен центрӗсен хушши — d; ҫак ҫаврашкасен хӑйсене сӗртӗнекен пӗрлехи линийӗ пур; ҫак сӗртӗнекен лини центрсен линине хӑш тӗлте касса иртнине шутласа кӑлармалла; пӗрре, ҫак точка центрӑн пӗр аяккинче, тепре, центрсен хушшинче выртнӑ чух хӑш тӗлте пулнине тупмалла.

ТĂВАТТĂМĔШ СЫПĂК.

ТĔРĔС МНОГОУГОЛЬНИКСЕМ ТАТА ÇАВРАКĂШ ТĂРШШĔНЕ ШУТЛАСА КĂЛАРАССИ.

I. ТĔРĔС МНОГОУГОЛЬНИКСЕМ.

212. Определенисем. Çакăнта кăтартнă виçĕ условипе килĕшсе тăракан хуçкаланчăк линие **тĕрĕс** лини теççĕ: 1) хуçкаланчăк линие кĕрекен тӳрĕ лини татăкĕсем пĕр-пĕринпе пĕртан пулмалла; 2) юнашар тăракан икĕ татăк хушшинчи кĕтессем пĕр-пĕринпе пĕртан пулмалла тата 3) йĕркерен выртакан татăксенчен пĕрремĕшĕпе виççĕмĕшĕ тӳрĕ линин—иккĕмĕш татăк выртакан линин пĕр аяккинче выртмалла.



218 черт.

Сăмахран, *ABCDE* тата *FGHKL* (218 черт.) çавăн пек линисем пулаççĕ; анчах *MNPQR* хуçкаланчăк линие тĕрĕс лини теме юрамасть, мĕншĕн тесен вăл виççĕмĕш условипе килĕшмест.

Тĕрĕс хуçкаланчăк лини **мăкăр** лини пулма пултарать, сăмахран, *ABCDE* çавăн пек лини пулать.

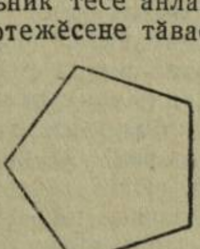
Многоугольникĕн йĕри-тавра тĕрĕс хуçкаланчăк лини пулсан, урăхла каласан, унăн енĕсем тата кĕтесĕсем пĕр-пĕринпе пĕртан пулсан, ун пек многоугольнике **тĕрĕс** многоугольник теççĕ. Сăмахран, квадрат, тан енлĕ треугольник т. ыт. çавăн пек многоугольниксем те тĕрĕс многоугольниксем пулаççĕ.

219 чертеж çинче кăтартнă многоугольник мăкăр тĕрĕс пятиугольник; 219a чертеж çинче те тĕрĕс пятиугольник ӳкернĕ, анчах вăл мăкăр многоугольник мар (ăна **çăлтăрла** пятиугольник теççĕ). Эпир геометрин çак курсĕнче мăкăр тĕрĕс многоугольниксене анчах пăхса тухатпăр, çавăнпа та „тĕрĕс многоугольник“ тенине „мăкăр“ тĕрĕс многоугольник тесе ăнланмалла.

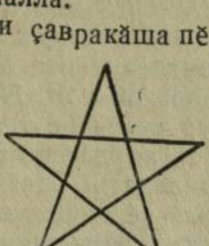
Тĕрĕс многоугольниксен чертежĕсене тăвасси çавракăша пĕртан пайсене пайлассипе тачă çыхăнса тăрать, ăна малалли теоремăсем кăтартаççĕ.

213. Теорема. ***Çавракăша мĕн чухлĕ те пулин*** (***иккĕрен ытла***) ***пĕртан пайсене пайланă пулсан, вара:***

1) ***пайлакан кашни икĕ юнашар точкăна хордăсем-***



219 черт.



219a черт.

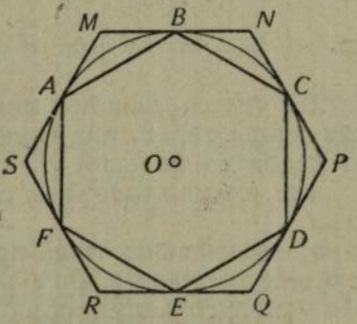
пе пĕрлештерсен, тĕрĕс многоугольник (çавракăш ăшне çырнă многоугольник) пулса тăрать;

2) пайлакан пур точкăсем урлă та сĕртĕнекен линисем туртсан тата вĕсен кашнин тăсăмĕ пайлакан юнашар точкăсен сĕртĕнӳ линийĕсемпе тĕл пулса касăлсан, тĕрĕс многоугольник (çавракăш йĕри-тавра çырса тунă многоугольник) пулса тăрать.

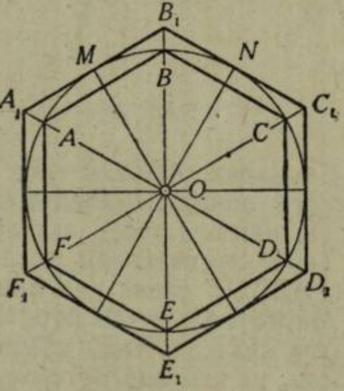
Çавракăша (220 черт.) *A*, *B*, *C* т. ыт. точкăсемпе мĕн чухлĕ те пулин пĕртан пайсене уйăрнă пултăр, çав точкăсем урлă *AB*, *BC*—хордăсем тата сĕртĕнекен *MNB*, *NCP*... линисем туртнă пултăр. Ун чух вара:

1) Çавракăш ăшне çырнă *ABCDEF* многоугольник тĕрĕс многоугольник пулса тăрать, мĕншĕн тесен унăн пур енĕсем те пĕртан (пĕртан пĕкĕсене карăнтарса тăракан хордăсем пĕртан) тата пур кĕтесĕсем те пĕртан (пĕртан пĕкĕсем çине тĕкĕнсе тăракан кĕтессем пĕртан).

2) Çавракăш йĕри-тавра çырса тунă *MNPQRS* многоугольник тĕрĕс многоугольник пулнине кăтартас тесе, *AMB*, *BNC* т. ыт. треугольниксене пăхса тухар. Вĕсен *AB*, *BC* т. ыт. тĕпĕсем пĕртан; çак тĕпсем çумĕнче выртакан кĕтессем те пĕртан, мĕншĕн тесен вĕсен кашнин пĕр пек виçе пур (сĕртĕнекен линипе хорда тунă кĕтесе хăй хушшинчи пĕккĕн çуррипе виçеççĕ). Апла пулсан, çак треугольниксем пурте тануралла тата пĕр-пĕринпе пĕртан, çавăнпа $MN=NP$ т. ыт. тата $\angle M=\angle N=\ldots$, урăхла каласан, *MNPQRS* многоугольник—тĕрĕс многоугольник пулать.



220 черт.



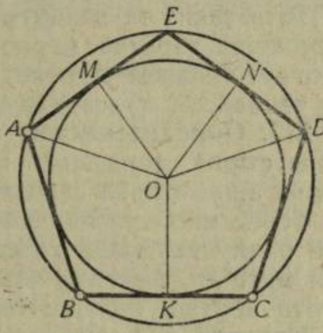
221 черт.

214. Асăрхаттарни. *O* центртан (221 черт.) *AB*, *BC* т. ыт. хордăсем çине перпендикулярсем антарсан тата вĕсен тăсăмĕсем çавракăша *M*, *N* т. ыт. точкăсенче касса иртсен, çак точкăсем пур пĕкĕсене те, пур хордăсене те çурмаран уйăраççĕ, пĕкĕсене тата хордăсене çурмаран уйăрнипе çавракăш та пĕртан пайсене пайланать. Çавăнпа, çӳлте кăтартнă пек, *M*, *N* т. ыт. точкăсем урлă сĕртĕнекен линисене пĕр-пĕринпе касăлмалла туртсан, çавракăш йĕри-тавра çырнă тĕрĕс многоугольник пулса тăрать, унăн енĕсем çавракăш ăшне çырнă многоугольник енĕсемпе параллельлĕ пулаççĕ. Кашни мăшăр тăрă (*A* тата *B*, тата т. ыт.) центр урлӑ иртекен тӳрӗ лини ҫинче выртать, тӳрех каласан, MON кӗтесӗн, ҫавӑн пекех ытти кӗтессен биссектриси ҫинче выртать.

215. Теорема. ***Многоугольник тӗрӗс пулсан, вара:***

1) ***ун йӗри-тавра ҫавракӑш ҫырма пулать;***

2) ***ун ӑшне ҫавракӑш ҫырма пулать.***



222 черт.

1) $ABCDE$ тӗрӗс многоугольникӗн юнашар выртакан пӗр-пӗр виҫӗ тӑрри урлӑ (A, B тата C, 222 черт.) ҫавракӑш ҫырсан, вӑл многоугольникӗн тӑваттӑмӗш тӑрри (D) урлӑ та иртнине кӑтартса парар. O центртан BC хорда ҫине перпендикуляр антарар та O центра A тата D точкӑсемпе пӗрлештерер. Унтан $ABKO$ четырехугольнике унӑн OK енӗ тавра $ODCK$ четырехугольник ҫине ӳкмелле ҫавӑрар. Ун чух вара (K точка ҫумӗнчи тӳрӗ кӗтессем пӗртан пирки) KB ен KC ен тӑрӑх каять. B точка C точка ҫине вырнаҫать (мӗншӗн тесен BC хордӑна K точка ҫурмаран уйӑрать), (B тата C кӗтессем пӗртан пирки) BA ен CD ен тӑрӑх каять; юлашкинчен, A точка D точка ҫине вырнаҫать (мӗншӗн тесен BA ен CD енпе пӗртан). Кунтан ҫакӑ тухса тӑрать: OA ен OD ен ҫине вырнаҫать; апла пулсан, A тата B точкӑсем центртан пӗр пек инҫӗшре тӑраҫҫӗ; ҫавӑнпа многоугольникӗн D тӑрри унӑн A, B тата C тӑррисем урлӑ иртекен ҫавракӑш ҫинче выртмалла. Малалла та ҫаплах ҫак тӗрӗссине кӑтартӑпӑр. Ку ҫавракӑш, многоугольникӗн юнашар выртакан виҫӗ тӑрри (B, C тата D) урлӑ иртсе, унӑн тӑваттӑмӗш тӑрри E тата ытти тӑррисем урлӑ та иртет; апла пулсан, вӑл ҫавракӑш многоугольникӗн пур тӑррисем урлӑ та иртет.

2) Теоремӑн пӗр пайӗ тӗрӗссине кӑтартнинчен ҫакӑ тухса тӑрать: тӗрӗс многоугольникӗн енӗсене кирек хӑҫан та пӗр ҫавракӑшӑн пӗртан хордисем вырӑнне хума пулать, ҫавӑн пек хордӑсем центртан пӗр инҫӗшре тӑраҫҫӗ; апла пулсан, O центртан многоугольник енӗсем ҫине антарнӑ OM, ON т. ыт. перпендикулярсем те пӗр-пӗринпе пӗртан пулаҫҫӗ, ҫавӑнпа та, O точкӑна центр туса, OM радиуспа ҫырнӑ ҫавракӑш $ABCDE$ многоугольник ӑшне ҫырнӑ ҫавракӑш пулса тӑрать.

216. Следстви. 215 §-ра каланинчен ҫакӑ курӑнса тӑрать: тӗрӗс многоугольник тавра ҫырнӑ ҫавракӑшпа ҫав многоугольник ӑшне ҫырнӑ ҫавракӑшӑн центрӗ пӗрре. Ҫак пӗрлехи центр многоугольникӗн пур тӑррисенчен те пӗр пек инҫӗшре тӑрать, ҫавӑнпа вӑл центр многоугольникӗн кирек хӑш енӗ варринчен тӑратнӑ перпендикуляр ҫинче выртма тивӗҫ; ҫак центр кашни кӗтес енӗсенчен пӗр пек инҫӗшре тӑрать пулсан, вӑл ҫак кӗтесӗн биссектриси ҫинче выртма тивӗҫ. Ҫавӑнпа ӗнтӗ тӗрӗс многоугольник тавра е ун ӑшне ҫырнӑ ҫавракӑшӑн центрне тупмалла пулсан, многоугольник енӗсен варринчен тӑратнӑ икӗ перпендикуляр, е кĕтессен икĕ биссектриси, е биссектрисăпа пĕр перпендикуляр пĕр-пĕринпе касăлнă тĕлти точкăна тупсан çитет: вăл точка вара центр пулать.

Тата çакна та палăртма çăмăл: тĕрĕс многоугольник енĕсен варринчен тăратнă перпендикулярсем, çавăн пекех тата тĕрĕс многоугольникĕн пур кĕтесĕсен биссектрисисем те унăн симметри тĕнĕлĕсем пулса тăраççĕ.

217. Определенисем. Тĕрĕс многоугольник тавра тата ун ăшне çырнă çавракăшăн пĕрлехи центрне многоугольник **центрĕ** теççĕ, ăшне çырнă çавракăшăн радиусне унăн **апофеми** теççĕ.

Тĕрĕс многоугольникĕн пĕр-пĕр енĕн вĕçĕсем патне туртнă икĕ радиусра пулнă кĕтесе **центрти** кĕтес теççĕ. Многоугольникĕн миçе ен, центрти кĕтесĕ те унăн çавăн чухлĕ пулать; вĕсем пурте пĕртан, мĕншĕн тесен вĕсене виçекен пĕкĕсем пĕртан.

Центрти пур кĕтессен те сумми $4d$, е $360°$, çавăнпа вĕсенчен кашни $4d:n$, е $360°:n$ пулать (n многоугольник миçе енлине пĕлтерет); сăмахран, тĕрĕс шестиугольникĕн центрти кĕтесĕ $360°:6=60°$ пулать, тĕрĕс восьмиугольникĕн $360°:8=45°$ пулать т. ыт. те.

n енлĕ многоугольникĕн шалти пур кĕтесĕсен те сумми (82 §) $2d(n-2)$ пулать, çавăнпа n енлĕ тĕрĕс многоугольникĕн шалти кашни кĕтесĕ

$$\frac{2d(n-2)}{n} \text{ пулать.}$$

Сăмахран, тĕрĕс восмиугольникĕн шалти кĕтесĕ

$$\frac{2d\,(8-2)}{8}=\frac{12d}{8}=\frac{3}{2}d=135° \text{ пулать.}$$

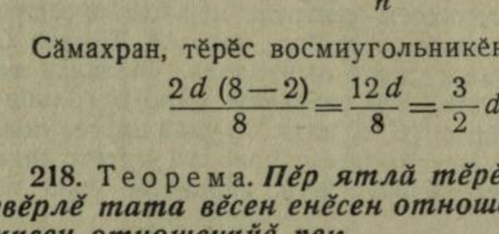
218. Теорема. ***Пĕр ятлă тĕрĕс многоугольниксем пĕрьевĕрлĕ тата вĕсен енĕсен отношенийĕ радиусĕсен е апофемисен отношенийĕ пек.***

1) Пĕр ятлă тĕрĕс многоугольниксем ($ABCDEF$ тата $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$) пĕрьевĕрлине (223 черт.) кăтартас тесен, вĕсен кĕтесĕсем пĕртан тата енĕсем пропорциллĕ пулнине палăртсан çитет.

Многоугольник кĕтесĕсем пĕртан; мĕншĕн тесен вĕсенчен кашнинче градус числи пĕртан, тӳрех каласан, $\frac{180(n-2)}{n}$ пулать (n саспалли кашни многоугольникре миçе ен пулнине пĕлтерет). $AB=BC=$ $=CD$...т. ыт; $A_1B_1=B_1C_1=$ $=C_1D_1\ldots$ т. ыт.; çавăнпа,

$$\frac{AB}{A_1B_1}=\frac{BC}{B_1C_1}=\frac{CD}{C_1D_1}=\ldots$$

пулни пăхсах курăнать, урăхла каласан, çакăн пек многоугольниксен енĕсем пропорциллĕ.



223 черт.

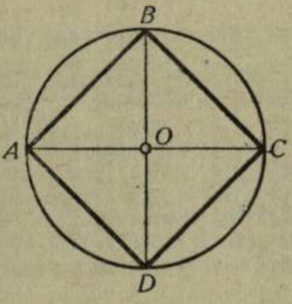
2) O тата O_1 (223 черт.) панă многоугольниксен центрĕсем, OA тата O_1A_1 вĕсен радиусĕсем, OM тата O_1M_1 вĕсен апофемисем пулччăр. OAB тата $O_1A_1B_1$ треугольниксем — пĕрьевĕрлĕ треугольниксем, мĕншĕн тесен пĕрин кĕтесĕсем теприн тивĕçлĕ кĕтесĕсемпе пĕртан.

Ку треугольниксен пĕртанлăхĕнчен çакă тухса тăрать:

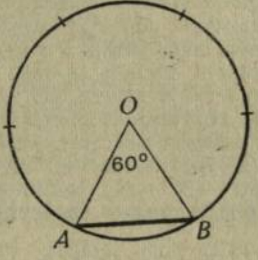
$$\frac{AB}{A_1B_1}=\frac{OA}{O_1A_1}=\frac{OM}{O_1M_1}.$$

Следстви. Пĕрьевĕрлĕ многоугольниксен периметрĕсен отношенийĕ вĕсен килĕшÿллĕ енĕсен отношенийĕ пек (172 §), çавăнпа *пĕр ятлă тĕрĕс многоугольниксен периметрĕсен отношенийĕ вĕсен радиусĕсен е апофемисен отношенийĕ пек пулать.*

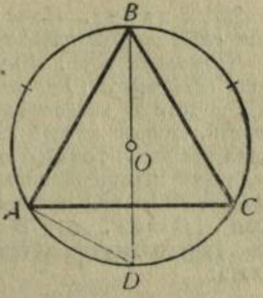
219. Задача. *Çаврашка ăшне çырнă 1) квадратăн, 2) тĕрĕс шестиугольникĕн, 3) тĕрĕс треугольникĕн енĕсене шутласа кăлармалла.*



224 черт.



225 черт.



226 черт.

n енлĕ тĕрĕс многоугольник енĕн тăршшĕне a_n саспаллипе, унăн периметрне p_n саспаллипе паллă тăвар.

Çаврашка ăшне çырнă квадратăн, шестиугольникĕн тата треугольникĕн енĕсем валли кирлĕ формулăсене 224, 225 тата 226 чертежсене пăхса тухнă хыççăн тума çăмăл пулать.

1) 224 чертеж çинче икĕ пĕрне-пĕри перпендикулярлă диаметр AC тата BD туртнă тата вĕсен вĕçĕсене хордăсемпе пĕрлештернĕ; çапла тунипе çаврашка ăшне çырнă $ABCD$ квадрат пулса тăнă.

Тÿркĕтеслĕ AOB треугольникрен çакна тупатпăр:

$$AB^2=AO^2+OB^2=2R^2,$$

çакăнтан шутласан,

$$a_4=R\sqrt{2} \text{ пулать.}$$

220. 2) 225 чертеж çинче центрти 60°-лă кĕтесе тивĕçлĕ хорда (çаврашка ăшне çырнă шестиугольникĕн енне) тунă. Тануралла AOB треугольникĕн A тата B кĕтесĕсенчен кашни кĕтесĕ $(180°-60°):2=60°$ пулсан, AOB треугольник танкĕтеслĕ треугольник пулать, çавăнпах вăл тата тан аяклă треугольник те пулать; апла пулсан,

$$AB = AO,\text{ урăхла каласан, } a_6 = R\text{ пулать.}$$

Çакăнтан çавракăша ултă пĕртан пая уйăрмалли мел тухса тăрать.

221. 3) 226 чертеж çинчи çавракăша пĕртан ултă пая уйăрнă, пайлакан точкисене пĕрне сиктерсе хордăсемпе пĕрлештернĕ; çапла тунипе çавракăш ăшне çырнă танаяклă ABC треугольник пулса тăрать. AD хордăна туртсан, тӳркĕтеслĕ ABD треугольник пулса тăрать (BAD кĕтес çавракăш ăшне çырнă кĕтес, вăл кĕтес диаметр çине тĕкĕнсе тăрать, çавăнпа вăл тӳрĕ кĕтес). ABD треугольникрен çакна тупатпăр:

$$AB = \sqrt{BD^2 - AD^2},$$

урăхла каласан,

$$a_3 = \sqrt{(2R)^2 - R^2},$$

апла пулсан вара,

$$a_3 = R\sqrt{3}\text{ пулать.}$$

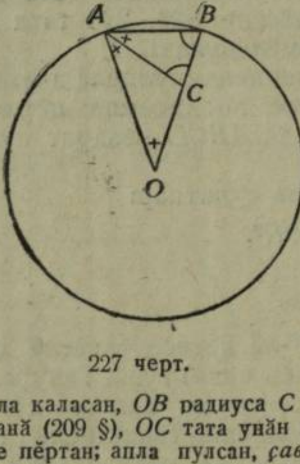
222. Задача. *Панă çаврашка ăшне тĕрĕс десятиугольник çырмалла та унăн енне радиус тĕлĕшĕнчен шутласа кăлармалла.*

Чи малтан тĕрĕс 10-угольникĕн пĕр пит кирлĕ свойствине кăтартар. AB хорда (227 черт.) 10-угольникĕн енĕ пултăр. Ун чух вара AOB кĕтес 36° пулать, A тата B кĕтессенчен кашни кĕтесĕ $^1/_2$-шер $(180° - 36°)$ пулать, урăхла каласан, кашни кĕтесĕ 72° пулать. A кĕтесе AC тӳрĕ линипе çурмаран уйăрар. Çапла тунипе A точкăра пулса тăнă кашни кĕтесĕ 36°-лă пулать; ACO треугольникĕн икĕ пĕртан кĕтес пур, çавăнпа вăл тануралла треугольник пулать, урăхла каласан, $AC = CO$ пулать; ABC треугольник те тануралла треугольник, мĕншĕн тесен $\angle B = 72°$, $\angle ACB = 180° - 36° - 72° = 72°$, çавăнпа $AB = AC = CO$ пулать. Треугольникĕн кĕтесĕн биссектрисин свойстви тăрăх (186 §) çапла çырма пулать:

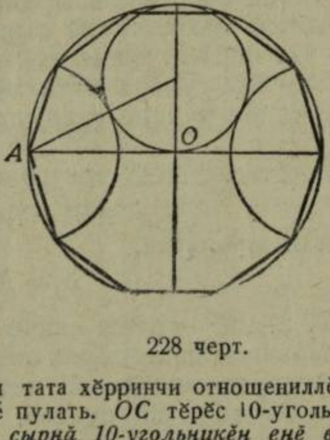
$$AO : AB = OC : CB. \qquad (1)$$

AO тата AB вырăнне вĕсемпе пĕртан OB тата OC татăксене лартсан, çакă пулса тăрать:

$$OB : OC = OC : CB, \qquad (2)$$



227 черт.



228 черт.

урăхла каласан, OB радиуса C точкăра вăтам тата хĕрринчи отношениллĕ туса пайланă (209 §), OC тата унăн пысăкрах пайĕ пулать. OC тĕрĕс 10-угольникĕн енĕпе пĕртан; апла пулсан, *çавракăш ăшне çырнă 10-угольникĕн енĕ вăтам тата хĕрринчи отношениллĕ туса пайланă радиусăн пысăкрах пайĕпе пĕртан пулать.*

Халь ёнтĕ задачăна шутлама çăмăл:

1) Çаврашка радиусне (сăмахран, *OA*, 228 черт.) вăтам тата хĕрринчи отношенillĕ туса уйăраççĕ; унтан, циркуль урисене радиусăн пысăкрах пайĕ тăршшĕ чухлĕ сарса, çавракăш тăрăх пĕрин хыççăн теприне пĕкĕсем виçе-виçе хураççĕ, уйăракан точкисене йĕркерен хордăсемпе пĕрлештереççĕ.

2) Çавракăш ăшне çырнă 10-угольник енĕн тăршшĕне x саспаллипе паллă туса, (2) пропорцие çĕнĕрен çапла çырма пултаратпăр:

$$R : x = x : (R - x),$$

çакăнтан шутласан,

$$x^2 + Rx - R^2 = 0.$$

Çак квадратлă уравнение шутласа кăларнă хыççăн, çакна тупатпăр:

$$x = a_{10} = R\,\frac{\sqrt{5} - 1}{2} = R \cdot 0{,}61803\ldots\ .$$

223. Асăрхаттарнисем. 1) Панă çавракăш ăшне тĕрĕс пятиугольник çырас тесен çавракăша (çӳлте кăтартнă пек) 10 пĕртан пая уйăраççĕ те уйăракан точкисене, пĕрре сиктерсе, хордăсемпе пĕрлештереççĕ.

$$2)\quad \frac{1}{6} - \frac{1}{10} = \frac{5}{30} - \frac{3}{30} = \frac{2}{30} = \frac{1}{15}$$

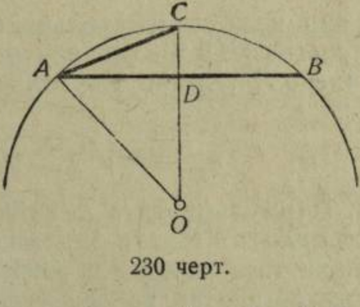
пĕртанлăхран çакă курăнса тăрать: çавракăшăн $^1/_6$ пайĕнчен $^1/_{10}$ пайне кăларсан, унăн $^1/_{15}$ пайĕ юлать. Çак пĕртанлăх çавракăш ăшне тĕрĕс 15-угольник çырма çăмăл мел туса парать, мĕншĕн тесен эпир çавракăша 5 тата 10 пĕртан пая уйăрма пĕлетпĕр.

3) Пилĕквĕçлĕ çăлтăр тăвас тесен (229 черт.), çавракăша 10 пĕртан пая уйăраççĕ те уйăракан точкисенчен пĕрремĕш точкипе тăваттăмĕш точкине (чертеж çинче кăтартнă пек, виçĕ точка сиктерсе) хордăсемпе пĕрлештереççĕ.

224. Задача. *Çавракăш ăшне çырнă тĕрĕс многоугольникĕн енĕсен хисепне икĕ хут ӳстермелле.*

Çак кĕскетсе каланинче икĕ задача пур: 1) çавракăш ăшне çырнă тĕрĕс многоугольник тăрăх çав çавракăш ăшнех тепĕр многоугольник вырнаçтармалла, иккĕмĕш многоугольник енĕсем пĕрремĕш многоугольникĕнninчен икĕ хут нумайтарах пулмалла; 2) пĕрремĕш многоугольникĕн панă енĕ тăрăх тата çаврашкан панă радиусĕ тăрăх иккĕмĕш многоугольникĕн енне шутласа кăлармалла.

229 черт.



230 черт.

1) *AB* татăк (230 черт.) çавракăш ăшне çырнă n енлĕ тĕрĕс многоугольник енĕ пултăр. *O* точка çавракăшăн центрĕ пултăр. *AB* татăкпа перпендикулярлă *OC* татăк ($OC \perp AB$) туртар та *A* точкăпа *C* точкăна пĕрлештерер. *AB* пĕкĕ *C* точкăра çурмаран уйăрăлать; çавăнпа *AC* хорда çавракăш ăшне çырнă $2n$ енлĕ тĕрĕс многоугольник енĕ пулать.

2) *ACO* треугольникре *O* кĕтес кирек хăçан та шĕвĕр кĕтес пулать (мĕншĕн тесен *ABC* пĕкĕ кирек хăçан та çурçавракăшран пĕчĕкрех, çавăнпа унăн çурри, *AC* пĕкĕ, чĕрĕк çавракăшран пĕчĕкрех); çапла вара (194 §)

$$AC^2=OA^2+OC^2-2OC\cdot OD,$$

урăхла каласан,

$$a_{2n}^2=R^2+R^2-2R\cdot OD=2R^2-2R\cdot OD \text{ пулать.}$$

Тӳркĕтеслĕ *AOD* треугольникĕн *OD* катетне шутласа кăларар:

$$OD=\sqrt{AO^2-AD^2}=\sqrt{R^2-\left(\frac{a_n}{2}\right)^2}=\sqrt{R^2-\frac{a_n^2}{4}}.$$

Çавăнпа,

$$a_{2n}^2=2R^2-2R\sqrt{R^2-\frac{a_{2n}^2}{4}} \text{ пулать.}$$

Çапла пулать ĕнтĕ çавракăш ăшне çырнă тĕрĕс многоугольникĕн енĕсене икĕ хут ӳстермелли формула (çак формулăран многоугольникĕн a_{2n} енне квадрат кореньне тупассипе усă курса шутласа кăларатпăр).

Тĕслĕх. Çавракăш ăшне çырнă 12-угольникĕн енне шутласа кăларар, шутлама çăмăл пултăр тесе $R=1$ тăвар (çавăнпа $a_6=1$ пулать.

$$a_{12}^2=2-2\sqrt{1-\frac{1}{4}}=2-2\sqrt{\frac{3}{4}}=2-\sqrt{3},$$

çакăнтан шутласан,

$$a_{12}=\sqrt{2-\sqrt{3}}=0{,}517 \text{ пулать.}$$

Тĕрĕс пĕр ятлă многоугольниксен енĕсем вĕсен радиусĕсемпе пропорциллĕ (218 §), çавăнпа радиус единицăпа танмар пулсан, урăх число *R* пулсан, 12-угольник енĕ валли çапла формула тупатпăр:

$$a_{12}=R\sqrt{2-\sqrt{3}}=R\cdot 0{,}517\ldots.$$

225. Циркульпе тата линейкăпа çавракăша миçе пĕртан пая уйăрма пулать? Малти задачăсенче кăтартнă мелсемпе усă курса циркульпе тата линейкăпа çавракăша малалли таблицăра кăтартнă число чухлĕ пĕртан пайсене уйăрма (апла пулсан, çавракăш ăшне те çавăн чухлех енлĕ тĕрĕс многоугольник çырма) пултаратпăр эпир:

3	$3\cdot 2$	$3\cdot 2\cdot 2\ldots$	пĕтĕмлетсен	$3\cdot 2^n$
4	$4\cdot 2$	$4\cdot 2\cdot 2\ldots$	"	2^n
5	$5\cdot 2$	$5\cdot 2\cdot 2\ldots$	"	$5\cdot 2^n$
15	$15\cdot 2$	$15\cdot 2\cdot 2\ldots$	"	$3\cdot 5\cdot 2^n$.

Германи математикĕ Гаусс (1855 ç. вилнĕскер) çак тĕрĕссине кăтартса панă: циркульпе тата линейкăпа çавракăша $2^{2^n}+1$

формулăра кăтартнă ахаль число чухлĕ пĕртан пая уйăрма пулать.

Сăмахран, çавракăша 17 пĕртан пая тата 257 пĕртан пая уйăрма пулать, мĕншĕн тесен 17 тата 257 числосем $2^{2^n}+1$ ($17=2^{2^2}+1$); $257=2^{2^3}+1$) йышши ахаль числосем пулаççĕ. Гаусс доказательстви элементарнăй математика картинчен тухать.

Тата çак тĕрĕссине те кăтартнă: линейкăпа тата циркульпе çавракăша составной число чухлĕ пĕртан пая уйăрма пулать; çав составной числора, $2^{2^n}+1$ йышши хутлаканнисĕр пуçне тата кирек те мĕнле степеньри 2-сĕр пуçне, урăхла нимĕнле ахаль хутлаканни те çук. Сăмахран, çавракăш ăшне циркульпе тата линейкăпа тĕрĕс 170-угольник $[170=2\cdot5\cdot17=2(2^2+1)(2^{2^3}+1)]$ çырма пулать.

Çавракăша ытти кирек мĕнле число чухлĕ пĕртан пайсене çывăхартса кăна пайлама пулать. Сăмахран, çавракăша 7 пĕртан пая пайламалла (е çавракăш ăшне тĕрĕс семиугольник çырмалла) пултăр. Ун чух чи малтан центрти кĕтесĕн пысăкăшне шутласа кăларар; вăл $\frac{360°}{7}=51\frac{3°}{7}$ пулать. Эпир шăпах çакăн пек кĕтес тума пултараймастпăр, çапах та транспортирпа çывăхартса центрта 51°-лă кĕтес тума пултаратпăр, ун чух вара çавракăшăн çывăхартса шутланă $^1/_7$ пайĕ пулса тăрать.

УПРАЖНЕНИСЕМ.

1. Çавракăш ăшне çырнă тĕрĕс 24-угольникĕн енĕ валли формула тумалла.

2. Çавракăш ăшне çырнă тĕрĕс восьмиугольник тата 16-угольник енĕсем валли формула тумалла.

3. Çавракăш тавра çырнă треугольник тата шестиугольник енĕсем валли формула тумалла.

4. *AB*, *BC* тата *CD* татăксем *O* центрлă тĕрĕс многоугольникĕн йĕркерен тăракан виçĕ енĕ пулччăр. Çак многоугольникĕн *AB* тата *CD* енĕсене, пĕр-пĕринпе *E* точкăра касăлччăр тесе, малалла тăссан, *OAEC* четырехугольник ăшне çавракăш çырма пулать.

5. Çак тĕрĕссине кăтартмалла: 1) çавракăш ăшне çырнă танаяклă кирек хăш многоугольник те—тĕрĕс многоугольник; 2) çавракăш тавра çырнă танкĕteслĕ кирек хăш многоугольник те—тĕрĕс многоугольник.

6. Çак тĕрĕссине кăтартмалла: 1) кашни *n* енлĕ тĕрĕс многоугольникĕн симметри тĕнĕлĕ *n* чухлĕ пулать, çак симметри тĕнĕлĕсем пурте унăн центрĕ урлă иртеççĕ; 2) енĕсем мăшăрлă многоугольникĕн центрĕ унăн симметри центрĕ пулать.

7. Çак тĕрĕссине кăтартмалла: тĕрĕс пятиугольникĕн пĕр тăрринчен тухман икĕ диагоналĕ, пĕр-пĕринпе касăлса, вăтам тата хĕрринчи отношениллĕ пулса уйăрăлаççĕ.

Кăтарту. *ABCDE* тĕрĕс пятиугольник, *AC* тата *BE* унăн диагоналĕсем, *F* вĕсен касăлнă тĕлти точки, $\triangle ABC \backsim \triangle ABF$ пулать т. ыт. те.

8. Панă енĕ çинче: 1) тĕрĕс восьмиугольник, 2) тĕрĕс 10-угольник тумалла.

9. Панă квадратăн кĕтесĕсене касса тĕрĕс восьмиугольник тумалла.

10. Панă квадрат ăшне тан енлĕ треугольник çырмалла, унăн пĕр тăррине е квадрат тăрри ăшне кĕртсе лартмалла, е унăн пĕр-пĕр енĕварри çине лартмалла.

11. Пĕр тан енлĕ треугольник ăшне тепĕр тан енлĕ треугольник çырмалла, иккĕмĕш треугольник енĕсем панă треугольник енĕсемпе перпендикулярлă пулмалла.

12. 18°-лă, 30°-лă, 75°-лă, 72°-лă кĕтессем тумалла.

13. Çавракăш тавра темĕнле тĕрĕс многоугольник çырнă. Çав многоугольникпе усă курса, çавракăш ăшне ун тавра çырнă многоугольникĕн енĕсенчен икĕ хут ытла енлĕ тĕрĕс многоугольник çырмалла.

ÇАВРАКĂШ ТАТА УН ПАЙĔСЕН ТĂРШШĔНЕ ШУТЛАСА КĂЛАРАССИ.

226. Малтан каласа ăнлантарни. Пĕр тӳрĕ лини татăкне виçе единици вырăнне йышăнаççĕ те ытти тӳрĕ лини татăкĕсене çавăнпа танлаштараççĕ, мĕншĕн тесен пĕр тӳрĕ лини çине тепĕр тӳрĕ лини хурсан, вĕсем пĕр-пĕрин çине вырнаçаççĕ. Чăнах та, çакăн пирки кăна мĕнле тӳрĕ лини татăкĕсем пĕр-пĕринпе пĕртаннипе танмаррине пĕлме пулать; мĕн вăл тӳрĕ лини татăкĕсен сумми; мĕнле татăк тепĕр татăкран 2, 3, 4, . . . хут пысăкрах т. ыт.те. Çавăн пекех тата пĕр пек радиуслă çавракăшсен пĕккисене танлаштарма пулать, мĕншĕн тесен ун пек пĕкĕсене пĕрле теприн çине хурсан, вĕсем пĕр-пĕрин çине вырнаçаççĕ. Çавракăшăн (е тепĕр кукăр линин) нимĕнле пайĕ те тӳрĕ лини çине вырнаçма пултараймасть, çавăнпа пĕр-пĕрин çине хунипе мĕнле кукăр лини татăкĕ панă тӳрĕ лини татăкĕпе пĕртан пулнине пĕлме çук, çавăнпах тата мĕнле кукăр лини панă тӳрĕ лини татăкĕнчен 2, 3, 4,. . . хут пысăкраххине те пĕлме çук. Çапла ĕнтĕ çавракăш (е унăн пайĕ) тăршшĕне тӳрĕ лини татăкĕпе танлаштарнă чух, çавракăш (е унăн пайĕ) тăршшĕ тесе мĕне калани çинчен хăйне уйрăм пĕлтерме кирлĕ пулать.

Çавăнпа пирĕн пĕтĕм математикăра ытла та пысăк вырăн йышăнса тăракан çĕнĕ ăнланăва, тӳрех каласан, предел ăнланăвне çак кĕнекене кĕртмелле пулать.

Числоллă последовательноçĕн пределĕ.

227. Алгебрăпа геометрин нумай ыйтăвĕсенче паллă закон тăрăх пĕрин хыççăн тепринпе çырнă числосен последовательноçне тĕл пулма тивет. Сăмахран, числосен натуральнăй ĕречĕ:

$$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5, \dots ,$$

вĕçĕмсĕр тăснă арифметикăлла тата геометрилле прогрессисем:

$$a,\ a+d,\ a+2d,\ a+3d, \dots ,$$
$$a,\ aq,\ aq^2,\ aq^3 \dots$$

числосен вĕçĕмсĕр последовательноçĕсем е вĕçĕмсĕр числоллă последовательноçсем пулаççĕ.

Çакăн пек кашни последовательность валли унăн членĕсене тумалли правило кăтартса пама пулать. Сăмахран, арифметикăлла прогрессин кашни членĕ малти членĕнчен пĕр число пысăкăшĕ чухлĕ уйрăм тăрать, геометрилле прогрессин кашни членĕ пĕрпĕр паллă число (прогрессин знаменателĕ) çине ӳстернĕ малти членĕпе пĕртан пулать. Последовательноçсене нумайăшне сложнăйрах правилăсемпе тунă. Çакна, сăмахран, $\sqrt{2}$ числона çителĕксĕрлĕхпе шутласан, малтан $\frac{1}{10}$ таран тĕрĕслĕхпе, унтан $\frac{1}{100}$ таран тĕрĕслĕхпе, унтан тата $\frac{1}{1000}$ таран тĕрĕслĕхпе шутласан, çапла пĕр вĕçĕмсĕр малалла шутласа кайсан, вĕçĕмсĕр числоллă последовательность пулса тăрать:

$$1{,}4;\ 1{,}41;\ 1{,}414;\ 1{,}4142,\dots$$

Çакăн пек шутлани $\sqrt{2}$ числона тĕрĕслĕхĕн ӳссе пыракан степенĕпе çывăхартнă пĕлтерĕшлĕ тăвать.

Çак последовательность валли унăн малта тăракан членĕсене пĕлсе, тата малалли çĕнĕ членĕсене тупмалли çăмăл правила кăтартса пама çук, çапах та çак последовательноçĕн кирек хăш членне те шутласа тупма пулать. Сăмахран, унăн 4-мĕш членне тупас тесен, $\sqrt{2}$ числона 0,0001 таран тĕрĕслĕхпе шутламалла; 5-мĕш членне тупас тесен, $\sqrt{2}$ числона 0,00001 таран тĕрĕслĕхпе шутламалла т. ыт. те.

Панă вĕçĕмсĕр последовательноçĕн членĕсем $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n \dots$ пулччăр; номерĕсем ӳссе пынăçемĕн последовательность членĕсем пĕр-пĕр A число патне вĕçĕмсĕр çывăхараççĕ. Ку акă çакна пĕлтерет: пĕр-пĕр A число пур, кирек мĕнле пĕчĕк положительнăй q число илсен те, панă последовательноçре çакăн пек член тупма пулать: вăл члентан малта тăракан пур членсем те хăйсен абсолютнăй пысăкăшĕ тĕлĕшĕнчен A числоран уйрăм тăраççĕ, вăл уйрăмлăх q числоран пĕчĕкрех. Ку свойство çинчен кĕскен çапла калар: $a_n - A$ разноçĕн абсолютнăй пысăкăшĕ n номерĕ ӳссе пынăçемĕн вĕçĕмсĕр пĕчĕкленет.

Çакăн пек чух A числона панă числосен вĕçĕмсĕр последовательноçĕн **пределĕ** теççĕ. Çакăн пек последовательность валли тĕслĕх илер. Вуншарлă ваксен последовательноçне тăвар:

$$0{,}9;\ 0{,}99;\ 0{,}999\dots$$

Кунта кашни член малти член çумне çĕнĕ вуншарлă палă 9 хушса çырнипе пулать.

Çак последовательноçĕн членĕсем единица патне вĕçĕмсĕр çывăхарса пыраççĕ, ăна астума йывăрах мар.

Тӳрех каласан, последовательноçĕн пĕрремĕш членĕ единицăран $\frac{1}{10}$ чухлĕ, иккĕмĕш членĕ $\frac{1}{100}$ чухлĕ, виççĕмĕш членĕ $\frac{1}{1000}$ чухлĕ сахалтарах, çак последовательноçе кирлĕ таран малалла тăссан, унăн çакăн пек членне тупма пулать: вăл члентан малта тăракан пур членсем те хăйсен абсолютнăй пысăкăшĕ тĕлĕшĕнчен единицăран уйрăм тăраççĕ, вăл уйрăмлăх малтанах илсе хунă пысăкăшран кирек те мĕн чухлĕ таран та пĕчĕккĕ пулма пултарать. Çавăнпа эпир çапла калама пултаратпăр: числосен эпир илнĕ вĕçĕмсĕр последовательноçĕн пределĕ единица пулать. Вăрăмăш единиципе (150 §) виçме май çук татăк тăршшĕн çителĕксĕрлĕхпе шутласа çывăхартнă, малтан $\frac{1}{10}$ таран тĕрĕслĕхпе, унтан $\frac{1}{100}$ таран тĕрĕслĕхпе, унтан тата $\frac{1}{1000}\dots$ таран тĕрĕслĕхпе шутласа çывăхартнă пĕлтерĕшĕсен последовательноçĕ числосен пределлă последовательноçĕ валли тепĕр тĕслĕх пулса тăрать.

Панă татăкăн тăршшĕне виçмелли тĕрĕс виçе пулакан вĕçĕмсĕр вуншарлă вак çак последовательноçĕн пределĕ пулса тăрать. Чăнах та, вĕçĕмсĕр вуншарлă вакăн пысăкăшĕ унăн çывăхартнă икĕ пĕлтерĕшĕ хушшинче тăрать, вăл пĕлтерĕшсене пĕр пек тĕрĕслĕхпе шутласа кăларнă—пĕрне çителĕксĕр илсе, теприне ытлашши илсе шутланă.

Çывăхартнă пĕлтерĕшсен тĕрĕслĕх степенĕ пысăкланнăçемĕн çак разность вĕçĕмсĕр пĕчĕкленсе пынине эпир малта кăтартнăччĕ. Çавăнпа вĕçĕмсĕр вуншарлă вакăн çывăхартнă пĕлтерĕшĕсен тĕрĕслĕх степенĕ пысăкланнăçемĕн çак вуншарлă вакпа унăн çывăхартнă пĕлтерĕшĕсен разноçĕ те вĕçĕмсĕр чакса пыма тивĕç. Апла пулсан, вĕçĕмсĕр вуншарлă вак унăн çителĕксĕр (е ытлашши) илсе çывăхартнă пур пĕлтерĕшĕсен те последовательноçĕн пределĕ пулса тăрать.

Çакна асăрхама йывăрах мар: хăшпĕр вĕçĕмсĕр последовательноçĕн пределĕ пулмасть; сăмахран, числосен натуральнăй ĕречĕн

$$1, 2, 3, 4, 5, \ldots,$$

нимĕнле предел та çук пулмалла, мĕншĕн тесен унăн членĕсем, вĕçĕмсĕр ÿссе пырса, нимĕнле число патне те çывăхармаççĕ.

28. Теорема. ***Числосен кирек хăш вĕçĕмсĕр последовательноçĕн те пĕр предел кăна пулма пултарать.***

Çак теорема тĕрĕссине хирĕçле доказательствăран курма пултаратпăр. Чăнах та,

$$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots,$$

панă последовательноçĕн икĕ тĕрлĕ A тата B предел пултăр. Ун чух вара, панă последовательноçĕн пределĕ A пулнипе, $a_n - A$ разноçĕн абсолютлă пысăкăшĕ n ÿссе пынăçемĕн вĕçĕмсĕр чакса пыма тивĕç. Панă последовательноçĕн пределĕ B те пулнипе $a_n - B$ разноçĕн абсолютлă пысăкăшĕ те n ÿссе пынăçемĕн вĕçĕмсĕр чакса пыма тивĕç. Апла пулсан,

$$(a_n - A) - (a_n - B)$$

разноçĕн абсолютлă пысăкăшĕ те е вĕçĕмсĕр чакса пыма, е нульпе пĕртан пулма тивĕç. Çак хыçри разность $B - A$ числосен разноçĕпе пĕртан, çавăнпа вара нуль пек мар пĕр-пĕр пит паллă число пур пулать. Вăл число n номерĕпе çыхăнмасть, n ÿссе пынă чух вăл пĕртте улăшăнаймасть. Çапла вара числоллă последовательноçĕн икĕ предел пур тени хирĕçлĕх патне илсе çитерчĕ.

229. Ÿссе пыракан числосен вĕçĕмсĕр последовательноçĕн пределĕ. Çакăн пек последовательность пăхса тухар: $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$, кунта кашни малти член хăй умĕнчи малалли члентан пысăкрах, урăхла каласан, $a_{n+1} > a_n$ çав вăхăтрах тата последовательноçĕн пур членĕсем те пĕр-пĕр паллă M числоран пĕчĕкрех, урăхла каласан, кирек хăш номер та n $a_n < M$.

Ун пек чух последовательноçĕн паллă пределĕ пур пулать (Вейерштрасс теореми).

230. **Доказательство.** Вĕçĕмсĕр числоллă последовательность панă пултăр:

$$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots, \qquad (1)$$

кунта кашни член хăйĕнчен малта тăракан члентан пысăкрах е унпа пĕртан ($a_{n+1} \geqq a_n$) тата последовательность членĕсен хушшинче панă M числоран пысăкрах член çук, сăмахран, 10-ран пысăк член çук. 9 илер те пăхар: последовательность (1) членĕсен хушшинче 9-тан пысăкрах член пур-и е çук-и? Ун пек членсем çук тейĕпĕр. 8 илер те пăхар: последовательность (1) членĕсен хушшинче 8-тан пысăкрах числосем пур-и е çук-и? Ун пек числосем пур тейĕпĕр. Ун чух вара 8 çырса хуратпăр, унтан 8-па 9 хушшине 10 пая уйăратпăр та çак числосене 8,1; 8,2; 8,3; ... йĕркерен тĕпчесе сăнар, урăхла каласан, последовательность членĕсен хушшинче 8,1 числоран пысăкрах член пуррипе çуккине пăхар. Пур пулсан, 8,2 число тĕлĕшĕнчен те çак ыйтăвах лартатпăр т. ыт. те. (1) последовательноçре 8,6 числоран пысăкрах число пур пултăр, 8,7 числоран пысăкки çук пултăр. Ун чух вара иккĕмĕш хут çапла çырса хуратпăр: çыратпăр 8,6 число, 8,6-пе 8,7 хушшине 10 пая уйăратпăр та çак числосене: 8,61; 8,62; 8,63; ... çаплах йĕркерен тĕпчесе сăнатпăр. (1) последовательноçре 8,64 числоран пысăкрах число пур пултăр, 8,65 числоран пысăкки çук пултăр. Ун чух вара виççĕмĕш хут çапла çырса хуратпăр: 8,64 число çыратпăр та 8,64-пе 8,65 хушшине малта кăтартнă пекех уйăратпăр. Çапла малалла вĕçĕмсĕр туса кайсан, эпир вĕçĕмсĕр десятичнăй вак патне çитсе тухатпăр: 8,64..., урăхла каласан, пĕр-пĕр чăн-чăн число патне çитсе тухатпăр. Эпир ăна α саспаллипе паллă тăвар та унăн çителĕксĕр тата ытлашши туса çывăхартнă вуншарлă палăллă пĕлтерĕшĕсене илер. Пĕрне α_n саспаллисемпе, теприне α'_n саспаллисемпе паллă тăвар. Ун чух вара, малта каланă пек (150 §),

$$\alpha_n < \alpha < \alpha'_n \text{ тата } \alpha'_n - \alpha_n = \frac{1}{10^n} \text{ пулаççĕ.}$$

Чăн-чăн число α тунинчен çакă тухса тăрать: последовательность (1) членĕсен хушшинче α'_n члентан пысăкраххисем çук, α_n члентан пысăкраххисем пур. Çакăн пек числосенчен пĕри α_k пултăр:

$$\alpha_n < \alpha_k < \alpha'_n.$$

Последовательность (1) ӳссе пынă пирки тата унтан α'_n члентан пысăкраххисем çук пирки, çакăн пек заключени тăватпăр: последовательноçĕн малалли ытти пур членĕсем те α_{k+1}, тата α_{k+2}, ... çаплах тата α'_n членсен хушшинче тăраççĕ; урăхла каласан, $m > k$ пулсан, $\alpha_n < \alpha_m < \alpha'_n$ пулать.

Чăн-чăн число α та α_n тата α'_n числосен хушшинче тăрать, çавăнпа $\alpha_m - \alpha$ разноçĕн абсолютлă пысăкăшĕ α'_n тата α_n числосен разноçĕнчен пĕчĕкрех. Анчах $\alpha'_n - \alpha_n = \frac{1}{10^n}$, çавăнпа,

$$| a_m - \alpha | < \frac{1}{10^n} \text{ пулать.} \qquad (2)$$

Çапла вара n-ăн кирек хăш пĕлтерĕшĕ валли те çакăн пек число кăтартма пулать: $m \geqq k$ выражени пур чух танмарлăх (2) пур пулать. n вĕçĕмсĕр ӳссе пынă чух $\frac{1}{10^n}$ вак вĕçĕмсĕр чакса пырать, çавăнпа танмарлăхран (2) çакă тухса тăрать: чăн-чăн число α последовательноçĕн (1) пределĕ пулать. Çапла вара, числоллă последовательноçĕн (1) паллă пределĕ пур пулать.

231. Улăшăнакан пысăкăшăн пределĕ.

$$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots.$$

последовательность панă пулсан, унăн n-мĕш членне (a_n) *улăшăнакан пысăкăш* теме пулать; улăшăнакан пысăкăшăн числоллă пĕлтерĕшĕ унăн n номерĕпе çыхăнса тăрать. „Улăшăнакан пысăкăш“ текен сăмах çаврăнăшне калаçăва çăмăллатасшăн калаççĕ. Çапла вара, „числосен вĕçĕмсĕр последовательноçне $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$ панă“ тесе калас вырăнне „йĕркерен пыракан пĕлтерĕшсен ĕретне

$a_1, a_2, a_3, \ldots$ йышăнакан ушăлăнуллă пысăкăшне панă" теççĕ. Çак сăмах çаврăнăшĕпе усă курас тесен, последовательность пределĕ çинчен мар, улăшăнакан пысăкăш пределĕ çинчен каламалла пулать.

Апла пулсан, 228 §-ра тĕрĕслĕхне кăтартнă предложение çапла формăпа калама пулать: „Кирек хăш улăшăнакан пысăкăшăн та пĕр предел кăна пулма пултарать". Çак предложение час-час çапла калаççĕ: „Икĕ улăшăнакан a_n тата b_n пысăкăш панă пулсан, вĕсенчен пĕрин пур пĕлтерĕшĕсем те теприн тивĕçлĕ пĕлтерĕшĕсемпе пĕртан: $a_1 = b_1$, $a_2 = b_2$, $a_n = b_n, \ldots$ пулсан, вара пĕр пысăкăшĕн пределĕ, паллах, вăл пур пулсан, теприн пределĕпе пĕртан пулать" е çакна кĕскен: „Икĕ улăшăнакан пысăкăш пĕртан пулсан, вĕсен пределĕсем те пĕртан пулаççĕ", теççĕ.

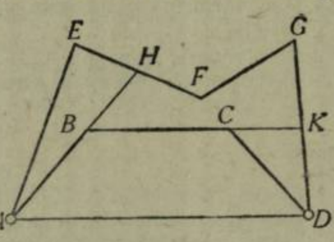
Ӳссе пыракан числолла последовательноçĕн пределĕ çинчен пĕлтерекен предложение (229 §) акă çапла калама пулать: ***улăшăнакан a_n пысăкăшăн п номерĕ ӳссе пырать пулсан, çавăнпа a_n пысăкăш хăй те ӳссе пырать пулсан, тата çав вăхăтрах вăл пĕр-пĕр улăшăнми числоран пĕчĕкрех пулсан, вара çак улăшăнакан пысăкăшăн пределĕ пур пулать.***

Çавракăш тăршшĕ.

Предел çинчен ăнлантарни çавракăш тăршшĕ тесе мĕне каламалли тĕрĕс пĕлмелли май туса парать. Чи малтан çак леммăсем тĕрĕссине кăтартар.

232. 1-мĕш лемма. ***Мăкăр хуçкаланчăк лини*** (*ABCD*, 231 черт.) ***хăйне çавăрса илекен ытти кирек хăш хуçкаланчăк линирен те*** (*AEFGD*) ***пĕчĕкрех.***

„Çавăрса илекен хуçкаланчăк лини", „çавăрса илĕннĕ хуçкаланчăк лини" тени акă çакна пĕлтерет. Икĕ хуçкаланчăк линин (чертеж çинче кăтартнă пеккисем) вĕçĕсем пĕр çĕрте (*A* тата *D*) пулччăр тата вĕсенчен пĕр хуçкаланчăк линийĕ (*ABCD*) тепĕр хуçкаланчăк линирен тата унăн *A*-па *D* вĕçĕсене пĕрлештерекен *AD* татăкран пулнă многоугольник ăшĕнче выртать пултăр; ун чух вара тулашĕнчи хуçкаланчăк линие—**çавăрса илекен хуçкаланчăк** лини, теççĕ, варринчи хуçăк линие—**çавăрса илĕннĕ хуçкаланчăк** лини, теççĕ.



231 черт.

Çак тĕрĕссине кăтартмалла пулать: çавăрса илĕннĕ *ABCD* хуçкаланчăк лини (мăкăр пулсан) кирек хăш çавăрса илекен *AEFGD* линирен те (мăкăр-и е мăкăр мар-и — пур-пĕрех) кĕскерех, урăхла каласан,

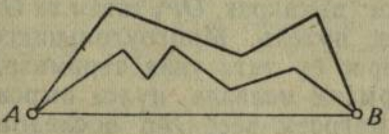
$$AB + BC + CD < AE + EF + FG + GD.$$

Мăкăр линин енĕсене чертеж çинче кăтартнă пек малалла тăсар. Ун чух вара эпир, тӳрĕ лини татăкĕ унăн вĕçĕсемпе пĕрлешсе тăракан кирек хăш хуçкаланчăк линирен те кĕскерех тенине асра тытса, çакăн пек танмарлăхсем çырма пултаратпăр:

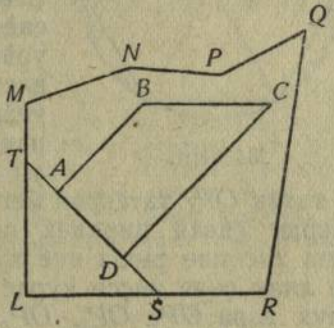
$$AB + BH < AE + EH;$$
$$BC + CK < BH + HF + FG + GK;$$
$$CD < CK + KD.$$

Çак танмарлăхсене пурне те членăн-членăн хушар, унтан хушнă хыççăн пулнă танмарлăхăн икĕ пайĕнчен те пулăшу татăкĕсене BH тата CK кăларар; малалла, $EH + HF$ сумма вырăнне EF татăк тата $CK + KD$ сумма вырăнне GD татăка çырса хуратпăр та, пире кирлĕ танмарлăх пулса тăрать.

Асăрхаттарни. Çавăрса илĕннĕ лини мăкăр пулман пулсан (232 черт.), малта кăтартнă доказательствăпа усă курма юраман пулĕччĕ. Ун пек чух вара çавăрса илĕннĕ хуçкаланчăк лини çавăрса илекен линирен вăрăмрах та пулма пултарать.



232 черт.



233 черт.

233. 2-мĕш лемма. ***Мăкăр многоугольникĕн*** ($ABCD$) ***периметрĕ хăйне çавăрса илекен ытти кирек хăш многоугольникĕн*** $MNPQRL$ ***периметрĕнчен те*** (233 черт.) ***кĕскерех.***

Çак тĕрĕссине кăтартмалла:

$$AB + BC + CD + DA < LM + MN + NP + PQ + QK + RL.$$

Мăкăр многоугольникĕн пĕр-пĕр аякне AD икĕ еннелле тăсар та A тата D точкăсене пĕрлештерекен $ABCD$ тата $ATMNPQRSD$ хуçăк линисем телĕшĕнчен 232-мĕш параграфри леммăпа усă курар; ун чух вара çакăн пек танмарлăх пулать:

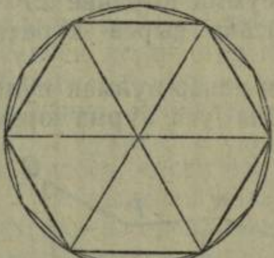
$$AB + BC + CD < AT + TM + MN + NP + PQ + QR + RS + SD.$$

Тепĕр енчен, ST татăк SLT хуçăк линирен кĕскерех, çавăнпа çапла çырма пултаратпăр:

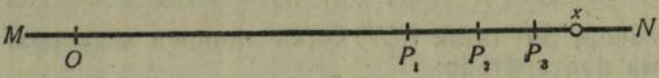
$$TA + AD + DS < TS + LS.$$

Çак икĕ танмарлăха членăн-членăн хушар тата унăн икĕ пайĕнчен те пулăшакан AT тата DS татăксене кăларар; малалла $TL + TM$ сумма вырăнне LM татăк тата $LS + RS$ сумма вырăнне LR татăк çырса хуратпăр, вăл вара лемма тĕрĕссине кăтартни пулать.

234. Çавракăш тăршшĕн определенийĕ. Панă çавракăш ăшне (234 черт.) тĕрĕс многоугольник, сăмахран, шестиугольник çырар та, пĕр-пĕр MN тӳрĕ лини çине (235 черт.) шестиугольник периметрĕ тăршшĕ OP_1 татăк (чертеж çинче çак периметра вырăн сахал пирки пĕчĕклетсе ӳкернĕ) виçсе хурар. Халь ĕнтĕ çавракăш ăшне çырнă шестиугольникĕн енĕсен хисепне икĕ хут ӳстерер, урăхла каласан, шестиугольник вырăнне çавракăш ăшне çырнă тĕрĕс 12-угольник илер. Çаплах унăн периметрне те тупар, унтан ăна çав MN тӳрĕ лини çинех çав O точкăранах пуçласа виçсе хурар; ун чух вара OP_2 татăк пулса тăтăр, вăл OP_1 татăкран пысăкрах пулма тивĕç, мĕншĕн тесен халь ĕнтĕ эпир шестиугольникĕн кашни енĕ вырăнне (12-угольникĕн икĕ енĕнчен тăракан) хуçăк лини илетпĕр, вăл хуçăк лини тӳрĕ линирен вăрăмрах пулать. Çавракăш ăшне çырнă 12-угольникĕн енĕсен хисепне каллех икĕ хут ӳстерер, урăхла каласан, халь тĕрĕс 24-угольник илетпĕр (ăна чертеж çинче кăтартман); унăн периметрне тупар та, çав O точкăранах тытăнса, MN çине виçсе хурар; ун чух вара OP_3 татăк пулса тăрать; OP_2 татăк OP_1 татăкран мĕн пирки пысăкрах, OP_3 татăк та OP_2 татăкран çавăн пиркиех пысăкрах пулать. Многоугольниксен енĕсен хисепне çапла икĕ хут ӳстерес ĕç тата унăн периметрне тӳрĕ лини çине виçсе хурас ĕç пĕрмаях малалла пулса пырсан, ун чух вара OP_1, OP_2, OP_3 периметрсен вĕçĕмсĕр последовательноçĕ пулса тăрать; ку последовательность ӳссе пыракан последовательность пулать. Анчах вăл ӳсни вĕçĕмсĕр пулма пултараймасть, мĕншĕн тесен çавракăш ăшне çырнă кирек хăш (мăкăр) многоугольникĕн те енĕсем кирек мĕн чухлĕ пулсан та, ун периметрĕ çавракăш тавра çырнă кирек хăш многоугольникĕн çавракăш ăшне çырнă (многоугольнике çавăрса илекенскерĕн) периметрĕнчен те яланах пĕчĕкрех пулать. Çавăнпа çавракăш ăшне çырнă тĕрĕс многоугольниксен периметрĕсен последовательноçĕн паллă пределĕ пур (229 §). Çак предел çавракăш тăршшĕ пулать. Çапла ĕнтĕ, акă çакăн пек определени йышăнатпăр: *çавракăш ăшне çырнă многоугольник енĕсен хисепне вĕçĕмсĕр иккĕлетнĕ чух унăн улшăнакан периметрĕ туртăнакан (çывăхаракан) предела çавракăш тăршшĕ тесе йышăнаççĕ.*



234 черт.



235 черт.

Асăрхаттарни. Çак тĕрĕссине кăтартма пулать: ку предел многоугольник енĕсене иккĕлетессине мĕнле многоугольникрен тапратнинчен килмест. Ку тĕрĕссине кăна мар, тата акă çакă тĕрĕссине те кăтартма пулать. Çавракăш ăшне çырнă многоугольниксем тĕрĕс многоугольниксем пулмасан та, пур-пĕрех вĕсен периметрĕсем те тĕрĕс многоугольниксен периметрĕсем туртăнакан предел патнех туртăнаççĕ, анчах вĕсен енĕсем вĕçĕмсĕр пĕчĕкленсе пымалла (çав вăхăтра вĕсен енĕсен шучĕ вĕçĕмсĕр ӳссе пымалла); многоугольник енĕсене, тĕрĕс многоугольник енĕсене иккĕлетсе пĕчĕклетнĕ пек, е тата пĕр-пĕр урăх закон тăрăх пĕчĕклетмелле (ку доказательствăна эпир сиктерсе хăваратпăр).

Çапла ĕнтĕ кашни çавракăшăн пĕртен-пĕр предел кăна пур; çавракăш ăшне çырнă мăкăр многоугольникĕн енĕсене вĕçĕмсĕр пĕчĕклетнĕ чух, унăн периметрĕ çав предел патне туртăнать; çак предела çавракăш тăршшĕ тесе шутлаççĕ.

Çавăн пекех çавракăшăн пĕр-пĕр *AB* пĕккине (236 черт.) унăн ăшне çырнă хуçкаланчăк линин вĕçĕсем пĕр çĕрте пулсан, тата çав хуçкаланчăк линин енĕсене вĕçĕмсĕр иккĕлетсен, вара çак линин улшăнакан периметрĕ предел патне туртăнать; вăл предел çак пĕккĕн тăршшĕ пулать.

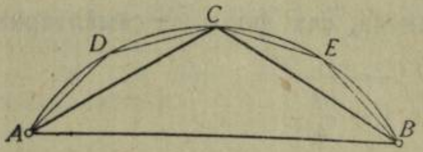
235. Йышăнусем. Каласа пама çăмăл пултăр тесе, тĕрĕслĕхĕ курăнса тăракан çак предложенисене доказательствăрах йышăнар:

Çавракăш пĕкки тăршшĕ: 1) *ăна карăнтарса тăракан хордăран вăрăмрах, анчах* 2) *çак пĕкĕ хăй тавра çырнă кирек хăш хуçкаланчăк лини периметрĕнчен те кĕскерех*; *çак пĕкĕпе хуçăк линин вĕçĕсем пĕр çĕрте пулмалла* (237 черт.).

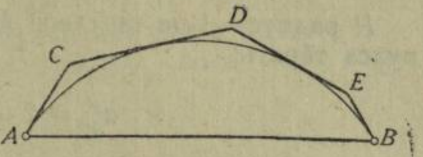
236. Çак предложенисен доказательстви.

1) *ACB* (236 черт.) çавракăш пĕкки пултăр, *AB* — ăна карăнтарса тăракан хорда пултăр; çак тĕрĕссине кăтартмалла: пĕкĕ тăршшĕ çак хордăран вăрăмрах.

Малтанах çакна каласа хурар: пĕкĕ ăшне тĕрĕс хуçкаланчăк линисем акă çапла çырар: пирвайхи хуçкаланчăк линие икĕ хордăран *AC* тата *CB* тунă пултăр; иккĕмĕш хуçкаланчăк линие пирвайхи хуçкаланчăк линин енĕсен шутне иккĕлетнипе тăвăпăр; ку хуçкаланчăк лини *ADCEB* пулать, вăл тăвата хордăран пулнă; виççĕмĕш хуçкаланчăк лини иккĕмĕш хуçкаланчăк линин енĕсен хисепне



236 черт.



237 черт.

иккĕлетнинчен пулать: вăл хуçкаланчăк линире сакăр хорда. Çак хуçкаланчăк лини енĕсен хисепне иккĕлетес ĕç малалла вĕçĕмсĕр пулса пытăр. Ун чух вара кашни иккĕлетмессерен хуçăк линин периметрĕ ÿссе пырать; сăмахран:

$$AD + DC + CE + EB > AC + CB,$$

мĕншĕн тесен

$$AD + DC > AC \text{ тата } CE + EB > CB.$$

Çавăнпа çак периметрăн пределĕ пирвайхи хуçкаланчăк лини периметрĕнчен пысăкрах пулма тивĕç, урăхла каласан, *AC* + *BC* суммăран пысăкрах пулмалла; апла пулсан вара, паллах, вăл предел *AB* хордăран пысăкрах пулать Çак предела *ABC* пĕкĕ тăршшĕ тесе йышăнаççĕ, çавăнпа ун тăршшĕ *AB* хордăран вăрăмрах пулать.

2) Пĕкĕ тавра пĕр-пĕр хуçкаланчăк лини (тĕрĕс хуçкаланчăк лини-и е тĕрĕс марри-и — пур-пĕрех) (237 черт.) çырнă пултăр. Хуçкаланчăк линин вĕçĕсем пĕкĕ вĕçĕсемпе пĕр-пĕрин çине вырнаçаççĕ пулсан, çак пĕкке вара темиçе пĕкĕ сумми теме пулать; вĕсене кашнине икĕ татăклă хуçăк лини анчах çавăрса илсе тăрать. Çак пайсенчен пĕри *AB* пĕкĕ (238 черт.) пултăр. Çак тĕрĕссине кăтартар: *AB* пĕккĕн тăршшĕ *AC* + *CB* суммăран пĕчĕкрех; кĕскетсе эпир ăна *S* саспаллипе паллă тăвăпăр. Доказательство валли пулăшуллă хуçкаланчăк лини (*AmnB*) илер, вăл *C* кĕтесе пĕр-пĕр *mn* татăкпа касса илнинчен пулать; *mn* татăк *AB* пĕкке касса иртмелле мар (хуçăк линие пĕкĕ тавра çырнă пулсан, урăхла

238 черт.

каласан, ăна сĕртĕнекен линисенчен тунă пулсан, mn татăк нихăçан та AB пĕкке касса иртмест). Çак пулăшуллă хуçкаланчăк линин тăршшĕне ($AmnB$) S_1 саспаллипе паллă тăвар. $mn < mC + Cn$ пулсан, вара $S_1 < S$ пулать.

Халь ĕнтĕ çак тĕрĕссине кăтартар: AB пĕкĕ ăшне çырнă тĕрĕс хуçкаланчăк линин енĕсене вĕçĕмсĕр иккĕлетсен, унăн улшăнакан периметрĕн пределĕ S_1-рен пысăкрах пулма пултараймасть. Çав предела L саспаллипе паллă тăвар та $L > S_1$ пултăр тесе калар. Улшăнакан периметр хăй пределĕ патне çав тери çывăха пыма пултарать, çавăнпа L-пе çак периметр хушшинчи разность $L - S_1$ разноçрен пĕчĕкрех пулма пултарать; апла вара ун чух пĕкĕ ăшне çырнă хуçкаланчăк лини S_1-рен пысăкрах пулса тăрать. Анчах ку пулма пултараймасть, мĕншĕн тесен AB пĕкĕ ăшне çырнă кирек хăш мăкăр лини те, çавăрса илекен $AmnB$ хуçкаланчăк лини тĕлĕшĕнчен, çавăрса илĕннĕ хуçкаланчăк лини пулса тăрать; çавăнпа та вăл S_1-рен пĕчĕкрех пулать. Çавăнпа ĕнтĕ $L > S_1$ теме юрамасть. Анчах ун чух вара L предел S_1-рен е пĕчĕкрех е S_1-пе пĕртан пулмалла. Анчах $S_1 < S$, çавăнпа та L предел S_1-рен пĕчĕкрех е унпа пĕртан пулсан та, $L < S$ пулать; çак тĕрĕссине кăтартса памаллаччĕ те ĕнтĕ пирĕн.

237. Çавракăш тăршшĕне тупни. Çавракăш тăршшĕне тупас тесен иккĕлетӳ формулипе усă курма пулать; вăл формулăна эпир (224 §) кăтартнăччĕ, урăхла каласан, çак формулăпа усă курмалла:

$$a_{2n}^2 = 2R^2 - 2R\sqrt{R^2 - \frac{a_n^2}{4}}.$$

R радиуса 1-пе тан тесе йышăнсан, çак формула çăмăлтарах пулса тăрать:

$$a_{2n}^2 = 2 - 2\sqrt{1 - \frac{a_n^2}{4}}.$$

Çавракăш ăшне çырнă тĕрĕс многоугольник n енлĕ пулсан, унăн пĕр енне a_n саспаллипе паллă тусан, акă çакă тухса тăрать: $a_6 = R = 1$.

Иккĕлетӳ формулипе усă курса, çакна тупатпăр:

$$a_{12}^2 = 2 - 2\sqrt{1 - \frac{1}{4}} = 2 - \sqrt{3};$$

$$a_{24}^2 = 2 - 2\sqrt{1 - \frac{a_{12}^2}{4}};\ a_{48}^2 = 2 - 2\sqrt{1 - \frac{a_{24}^2}{4}} \text{ т. ыт. те.}$$

Многоугольник енĕсен хисепне иккĕлетесси 96 кĕтеслĕ многоугольник тусан чарăннă пултăр. Унăн периметрне тупас тесен, унăн пĕр енне 96 çине ӳстермелле. Çак периметра çавракăш тăршшĕн çывăхартнă пĕлтерĕшĕ вырăнне йышăнма пулать. Ăна p_{96} саспаллипе паллă туса шутласа кăларсан, çакна тупатпăр:

$$p_{96} = 6{,}2820638\ldots.$$

Радиус R-па тан пулсан, çакă пулса тăрать:

$$p_{96} = R \cdot 6{,}2820638\ldots,\ \text{е}\ p_{96} = 2R \cdot 3{,}1410319\ldots.$$

Çавракăш тăршшĕне C саспаллипе паллă тусан, ун валли çакăн пек çывăхартнă формула пулса тăрать:

$$C = 2R \cdot 3{,}1410319\ldots.$$

Многоугольник енĕсене иккĕлетессине 192 кĕтеслĕ многоугольник тунӑ хыççӑн чарас пулсан, çавракӑш тӑршшĕ тата тĕрĕсрех пулĕччĕ, тӳрех каласан, çапла пулĕччĕ:

$$C = 2R \cdot 3{,}14145247\ldots\ .$$

Многоугольник енĕсене малалла иккĕлетсе пынӑçемĕн çавракӑш тӑршшĕ ытларах та ытларах тĕрĕс пулса пырать.

238. Çавракӑш тӑршшĕпе унӑн диаметр хушшинчи отношени. Çавракӑш тӑршшĕне епле тупнине пӑхса тухсан, çакна астума пулать: çавракӑш тӑршшĕне тупас тесе диаметр çине хутланӑ число диаметрӑн пысӑкӑшĕпе çыхӑнмасть; çапла акӑ пĕр-пĕр çавракӑшӑн тӑршшĕ хӑйĕн пĕр-пĕр число çине хутланӑ диаметрĕпе пĕртан пулсан, ытти кирек хӑш çавракӑшӑн тӑршшĕ те хӑйĕн çав число çинех хутланӑ диаметрĕпе пĕртан пулать.

Чӑнах та, икĕ çавракӑш илер, пĕри R радиуслӑ, тепри r радиуслӑ пулччӑр. Пирвайхи çавракӑшӑн тӑршшĕ пысӑк C пултӑр, теприн пĕчĕк c пултӑр. Вĕсенчен кашнин ӑшне пĕр хисеп енлĕ тĕрĕс многоугольник çырар та кашни многоугольник енĕсен хисепне иккĕлетер.

Пирвайхи çавракӑш ӑшне çырнӑ тĕрĕс многоугольникĕн улшӑнакан периметрне пысӑк P_n саспаллипе паллӑ тӑвар, иккĕмĕш çавракӑш ӑшне çырнӑ çав хисеп енлех тĕрĕс многоугольникĕн улшӑнакан периметрне пĕчĕк p_n саспаллипе паллӑ тӑвар.

Ун чух вара 218 §-ри теорема тӑрӑх çапла çырса хума пултаратпӑр:

$$\frac{P_n}{R} = \frac{p_n}{r}, \text{ е } \frac{P_n}{2R} = \frac{p_n}{2r}.$$

Пирвайхи çавракӑшӑн C тӑршшĕ—улшӑнакан P_n периметрӑн пределĕ пулать. Иккĕмĕшĕн c тӑршшĕ—улшӑнакан p_n периметрӑн пределĕ пулать. Çавӑнпа ĕнтĕ $\frac{P_n}{2R} = \frac{p_n}{2r}$ пĕртанлӑхран çакӑ тухса тӑрать: $\frac{C}{2R} = \frac{c}{2r}$ (228 тата 231 §). Çапла вара эпир: *çавракӑш тӑршшĕпе унӑн диаметрĕ хушшинчи отношени пур çавракӑшсем тĕлĕшĕнчен те улшӑнми число пулать,* теме пултаратпӑр.

Çак улшӑнми числона грексен π[1] саспаллийĕпе паллӑ тума йышӑннӑ. Çапла вара эпир C çавракӑш тӑршшĕ валли çакӑн пек формула çырса хума пултаратпӑр:

$$C = 2R \cdot \pi, \text{ е } C = 2\pi R.$$

Çакӑ тĕрĕссине кӑтартса панӑ: π число вӑл—**иррациональнӑй число,** апла пулсан, вара ӑна нимĕнле рациональнӑй числопа та тĕрĕс кӑтартса пама май килмест. Анчах унӑн çывӑхартнӑ пĕлтерĕшĕсене кирек те хӑш таран тĕрĕслĕхпе тĕрлĕ мелпе тупма

---

[1] Çапла паллӑ тӑвасси ахӑртнех XVII ĕмĕрте тапраннӑ пулмалла π (пи) саспалли грексен περιφερὲια (çавракӑш) сӑмахӑн пуçламĕш саспалли пулать.

пулать. Çавракăш ăшне çырнă 96 кĕтеслĕ многоугольник периметрне çавракăшăн çывăхартнă тăршшĕ выранне йышăнса, π валли 3,14 çывăхартнă пĕлтерĕш тупатпăр; çак 3,14 пĕлтерĕш 0,01 таран тĕрĕслĕхпе çителĕксĕр илсе тупнă пĕлтерĕшĕ пулать. Çак тĕрĕслĕх практика валли кирек хăçан та çителĕклĕпе пĕрех. Уйрăмах ытла тĕрĕс тумалла чухне, çакăн пек (ытлашши илсе) çывăхартнă пĕлтерĕшпе усă курсан çитет: $\pi = 3{,}1416$.

Пысăк вĕреннĕ çынсем, çав тери лайăхлатнă мелсемпе усă курса, π числона тĕрлĕ практика требованийĕсенчен аякка иртсе кайнă тĕрĕслĕхпе шутласа кăларнă (сăмахран, Англири Шенкс математик 1873 çулта π числон 707 вуншарлă паллисене тупнă[1].

Акă çакна астуни те усăллă: пирĕн эра тапраниччен III ĕмĕр малтан Сиракузăри паллă геометр Архимед π валли пит ансат число $^{22}/_7$, урăхла каласан, $3^1/_7$ число тупнă. Çак число π-рен кăшт пысăкрах, вĕсен хушши 2 пинмĕш числоран пĕчĕкрех.

Геометрилле задачăсене шутланă чух π (пие) тӳртĕн, урăхла каласан $^1/\pi$ вакпа пĕртан число час-час тĕл пулать. Çак числон темиçе цифрине асра тытни усăллă:

$$\frac{1}{\pi} = 0{,}3183098\ldots.$$

239. *n* градуслă пĕкĕ тăршшĕ. Çавракăш тăршшĕ $2\pi R$ пулать, апла пулсан, 1°-лă пĕкĕ тăршшĕ $\frac{2\pi R}{360} = \frac{\pi R}{180}$ пулать; çавăнпа n градуслă s пĕкĕ тăршшĕ акă çапла пулать:

$$s = \frac{\pi R_n}{180}.$$

Пĕкке минутăпа (n') е секундăпа (n'') виçнĕ пулсан, унăн тăршшĕне çакăн пек тивĕçлĕ формулăсемпе тупаççĕ:

$$s \doteq \frac{\pi Rn}{180 \cdot 60}, \text{ е } s = \frac{\pi Rn}{180 \cdot 60 \cdot 60},$$

кунта n миçе минутăна е секундăна пĕлтерет.

240. Задача. *Çавракăш пĕккинче* 81°21′36″, *пĕкĕ тăршшĕ* 0,452 *м*; *çак çавракăш радиусне* 1 *мм таран тĕрĕслĕхпе шутласа кăлармалла.*

---

[1] π числона кăтартакан цифрăсен вăрăм ĕретне асра тытас тесен, французла икĕ стихпа усă курма пулать:

Que j'aime à faire apprendre
Un nombre utile aux hommes!

е тата (вăтам шкул преподавателĕ Шенрок шухăшласа кăларнă) вырăсла икĕ стихпа усă курма пулать:

Кто и шутя и скоро пожелает (ъ)
Пи узнать число уж (ъ) знает (ъ)!

Çак (кивĕ орфографипе çырнă) фразăсенчи кашни сăмахри саспаллисен числисене ĕретĕн çырса тухсан, π валли (ытлашши илсе) çывăхартнă число тупатпăр: 3,1415926536, çак числона 1 вунбиллионмĕшĕн çурри таран тĕрĕслĕхпе илнĕ.

8 1°21′36″ числона вакласан, 292 896 секунда пулать.

$$0{,}452 = \frac{\pi R \cdot 292\,896}{180 \cdot 60 \cdot 60}$$

ку уравненирен ҫакна тупатпӑр:

$$R = \frac{0{,}452 \cdot 180 \cdot 60 \cdot 60}{292\,896 \pi} = \frac{1}{\pi} = 0{,}318 \text{ м}.$$

241. Задача. *Радиус тӑршшӗ пӗкӗре миҫе градус пулнине тупмалла.* n°-ла пӗкӗ тӑршшӗне тупмалли формулӑра s пысӑкӑш выранне R лартсан, ҫак уравнени пулса тӑрать:

$$R = \frac{\pi R n}{180}, \text{ е } 1 = \frac{\pi n}{180},$$

ҫакӑнтан шутласан,

$$n^\circ = \frac{180^\circ}{\pi} = 180^\circ \cdot \frac{1}{\pi} = 180^\circ \cdot 0{,}3183098 = 57^\circ{,}295764 = 57^\circ 17' 44'',8.$$

Ҫакна палӑртса хӑварар: радиус тӑршшӗ пӗкке радиан теҫҫӗ.

УПРАЖНЕНИСЕМ.

1. Ҫакна кӑтартмалла: икӗ ҫаврашкан центрти кӗтесӗсен килӗшӳллӗ пӗкӗсем пӗр вӑрӑмӑшлӗ; ҫак кӗтессен отношенийӗ радиуссен тӳртӗн отношенийӗпе пӗртан.

2. Ҫавракӑш ҫинче A точка илнӗ те ун урлӑ ҫаксене туртнӑ: AB диаметр, унтан ӑшне ҫырнӑ тӗрӗс шестиугольникӗн AC енне тата сӗртӗнекен MN лини туртнӑ. O центртан AC ҫине перпендикуляр антарнӑ та ҫав перпендикуляра малалла тӑснӑ; тӑснӑ перпендикуляр сӗртӗнекен линие D точкӑра касса иртет. Ҫак точкӑран пуҫласа, сӗртӗнекен лини тӑрӑх (A точка урлӑ) виҫӗ радиус тӑршшӗ DE татӑк виҫсе хунӑ. E точкӑна диаметрӑн B вӗҫӗпе пӗрлештернӗ. B тӳрӗ линие ҫурҫавракӑш тӑршшӗ выранне йышӑнсан, мӗн пысӑкӑш йӑнӑш пулнине пӗлмелле.

3. Панӑ ҫурҫавракӑш диаметрӗ ҫине икӗ пӗр пек ҫурҫавракӑш туса хунӑ, тӳремҫин виҫӗ ҫурҫавракӑш хушшинчи пайӗ ӑшне ҫаврашка ҫырнӑ. Ҫакна кӑтартса памалла: ҫак ҫаврашка диаметрӗ хушшинчи отношени 2:3 отношенипе пӗртан.

4. Ҫавракӑш ӑшне ҫырнӑ квадрат енӗпе пӗртан пӗкӗре миҫе градус, миҫе минута тата миҫе секунда пулнине шутласа кӑлармалла.

5. Ҫӗр радиусӗ 6400 *км* пулсан, ҫӗр экваторӗн тӑршшӗне шутласа кӑлармалла.

ПИЛЛӖКМӖШ СЫПӐК.

ЛАПТӐКСЕНЕ ВИҪЕССИ.

1. МНОГОУГОЛЬНИКСЕН ЛАПТӐКӖСЕМ.

242. Лаптӑк ҫинчен ӑнлантарни. Кулленхи пурӑнӑҫ кӑтартнине пула эпир кашниех лаптӑк ҫинчен мӗн чухлӗ те пулин пӗлсе тӑратпӑр.

Фигурӑн лаптӑкӗ ҫинчен тӗрӗсрех ӑнлантарар тата ӑна виҫмелли мелсене палӑртса хурар.

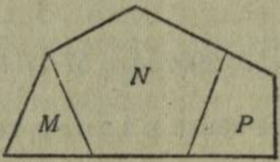
243. Лаптӑк тӗлӗшӗнчи тӗп йышӑнусем. Многоугольник ӑшӗнчи тӳремҫи пайӗ пысӑкӑшне е пӗр-пӗр йӗри-тавра пӳлнӗ лаптӑк фигурӑн тӳремҫи пайӗ пысӑкӑшне ҫав фигурӑн **лаптӑкӗ** теҫҫӗ.

Эпир хамăр умма задача лартатпăр: пирĕн çак пысăкăша кăтартакан пĕр-пĕр число тупмалла, урăхла каласан, лаптăка виçмелли число тупмалла. Пирĕн требовани пур: фигурăсен лаптăкĕсемпе вĕсене виçекен числосем хушшинчи çыхăну çак условисемпе килĕшсе тăмалла:

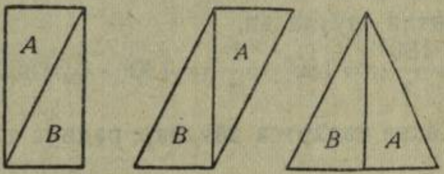
1) икĕ пĕртан фигурăсен лаптăкĕсене виçекен числосем пĕрпĕринпе пĕртан пулмалла;

2) панă фигурăна темиçе пая (*M*, *N*, *P*, 239 черт.) уйăрнă пулсан, çав кашни пайĕ йĕри-тавра пӳлнĕ фигура пулсан, пĕтĕм фигурăн лаптăкне виçекен число унăн уйрăм пайĕсен лаптăкĕсене виçекен числосен суммипе пĕртан пулмалла.

Асăрхаттарни. Юлашки требовани тĕлĕшĕнчен питĕ пысăккăн асăрхаттарни кирлĕ. Лаптăксене эпир положительнăй числосемпе виçетпĕр. Икĕ положительнăй числон сумми кашни хушăнакан числинчен кирек хăçан та пысăкрах, çавăнпа 2-мĕш условие йышăнма май пултăр тесен, фигурăсен лаптăкĕсен тивĕçлĕ свойстви пулма кирлĕ. Çакна ăнлантарса парар. Çапла калар: панă фигурăна темиçе пая уйăрар та çав пайсене (240-мĕш чертеж çинче *A* тата *B* пайсене куçарса лартнă пек куçара-куçара лартар, çапла вара çĕнĕ фигурăсем пулса тăраççĕ, тесе калар. Çапла ыйтар: капла куçарса лартнипе малтанхи фигура ăшне пĕтĕмĕшпех вырнаçса ларма пултаракан фигура тума пулать-ши? Çак пулма пултарсан, пĕр фигура тепĕр фигура ăшĕнче выртакан икĕ фигура пулнă пулĕччĕ, тата вĕсен лаптăкĕсене виçекен числосем, 2-мĕш услови тăрăх, пĕр-пĕринпе пĕртан пулĕччĕç.



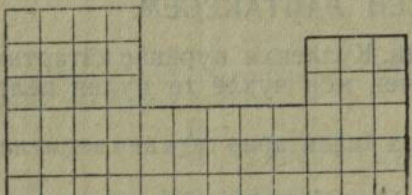
239 черт



240 черт.

Çапла вара пĕтĕм фигурăн лаптăкне виçекен число çак фигурăн пĕр-пĕр пайĕн лаптăкне кăна виçекен числопа пĕртан пулнă пулĕччĕ, урăхла каласан, сумма хушăнакан числосенчен пĕр хушăнаканнипе пĕртан пулĕччĕ, вăл — положительнăй числосем тĕлĕшĕнчен пулма пултараймасть. Çавăнпа ĕнтĕ çакăн пек чух 2-мĕш условие йышăнма май пулмĕччĕ. Çак ыйтăва чи пирвай Итали математикĕ Децольт асăрханă (1881). Фигурăн пайĕсене кунта кăтартнă пек куçарса лартма юраманнине малтан пĕр-пĕр постулат вырăнне йышăннă, каярахпа çак юраманлăха Шур, Киллинг, Шатуловский тата Гильберг пит лайăх кăтартса панă. Фигурăсен лаптăкĕсен çак свойстви 2-мĕш условие йышăнмалла тăвать те ĕнтĕ.

Пĕртан лаптăклă фигурăсене пĕртан пысăкăшлĕ теме йышăннă. Паллах, пĕртан фигурăсем кирек хăçан та пĕр пысăкăшлĕ, анчах пĕр пысăкăшлĕ фигурăсем тан мар та пулма пултараççĕ (240-мĕш чертеж çинче кăтартнă пеккисем).



241 черт.

224. Лаптăка виçессин ăнланăвĕ. Панă фигурăн лаптăкне виçмелле пулсан, чи малтан лаптăк виçин единицине суйласа илеççĕ. Çавăн пек единица квадрат лаптăкĕ пулать, унăн енĕ линиллĕ единицăпа пĕртан; сăмахран, квадратăн енĕ 1 метр, 1 сантиметр пулать т. ыт. те. Çăмăл йышши фигурăсем валли лаптăк виçине акă çапла шыраса тупма пулать. Виçсе пĕлмелли лаптăк çине лаптăк единицине миçе хут хума май пулать, çавăн чухлĕ хураççĕ. Çак майпа пĕчĕк лаптăксене виçме пулать, вăл лаптăксене миллиметрла хутпа (вăл витĕр курăнать) тепĕр хут çине ӳкереççĕ: миллиметрла хут çине пĕр инçĕшре тăракан параллельлĕ тӳрĕ линисенчен пĕчĕк квадратсем тунă; çав квадратсем лаптăк единицисем пулаççĕ. Сăмахран, лаптăка виçсе пĕлмелли фигура çине çав квадратсемлĕ (витĕр курăнакан) хута хунă пултăр. Ун чух вара, панă фигура контурĕ хуçкаланчăк лини пулсан (241 черт.), çав линин енĕсем квадратсем тунă тӳрĕ линисен пайĕсем çине вырнаççан, фигура ăшĕнче выртакан квадратсен хисепĕ виçсе пĕлмелли лаптăкăн тĕрĕс виçи пулса тăрать.

Чăннипе каласан, лаптăксене виçес ĕçе лаптăк единицине е унăн пайне тӳрех виçсе пĕлмелли лаптăк çине хурса тумаççĕ, фигурăн хăшпĕр линисене виçни урлă тăваççĕ. Ăна епле тунине малалли параграфсенчен курăпăр.

245. Фигурăсен тĕпĕ тата çӳллĕшĕ. Треугольникĕн е параллелограмăн пĕр енне çак фигурăсен **тĕпĕ** тейĕпĕр, треугольникĕн тăрринчен çак енĕ çине антарнă е параллелограмăн тĕпне хирĕç выртакан енĕ çинче илнĕ пĕр-пĕр точкăран унăн тĕпĕ çине антарнă перпендикуляра вĕсен **çӳллĕшĕ** тейĕпĕр.

Прямоугольникĕн тĕпĕпе перпендикулярлă енĕ унăн çӳллĕшĕ пулать.

Трапецин параллельлĕ енĕсем иккĕшĕ те унăн тĕпĕсем пулаççĕ, тĕпĕсен хушшинчи перпендикуляр трапецин çӳллĕшĕ пулать.

Прямоугольникĕн тĕпĕпе çӳллĕшне унăн **виçисем** теççĕ.

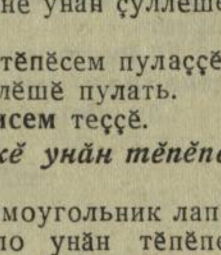
246. Теорема. ***Прямоугольникĕн лаптăкĕ унăн тĕпĕпе çӳллĕшĕн произведенийĕпе пĕртан.***

Çак кĕске предложение çапла ăнланмалла: прямоугольник лаптăкне квадратла единицăсемпе кăтартакан число унăн тĕпĕпе çӳллĕшне линиллĕ единицăсемпе кăтартакан числосен произведенийĕпе пĕртан.

Доказательствăра виçĕ тĕслĕх пулма пултарать:

1) Фигурăн тĕпĕпе çӳллĕшĕн (пĕр единицăпа виçнĕ) тăршшĕсене тулли числосемпе кăтартнă.

Панă прямоугольникĕн (242 черт.) тĕпĕ линиллĕ единицăсемпе кăтартнă b тулли числопа пĕртан пултăр, çӳллĕшĕ унăн çав единицăсемпех кăтартнă h тулли числопа пĕртан пултăр. Прямоугольник тĕпне b тата çӳллĕшне h пĕр пек пая уйăрар; уйăракан точкăсем урлă тĕпĕпе тата çӳллĕшĕпе параллельлĕ тӳрĕ линисем туртар. Çак тӳрĕ линисем пĕрпĕрне касса иртнипе хăшпĕр четырехугольниксем пулса тăраççĕ. Вĕсенчен пĕрне, сăмахран, K (штрихленĕ) четырехугольнике илер.



242 черт.

Çак четырехугольник енĕсем панă прямоугольникĕн килĕшӳллĕ енĕсемпе параллельлĕ (чертежне ҫапла тунӑ), ҫавӑнпа унӑн пур кӗтесӗсем те тӳрӗ кӗтессем пулаҫҫӗ, апла пулсан, вара k четырехугольник прямоугольник пулать. Тепӗр енчен, ҫак прямоугольникӗн кашни енӗ юнашар тӑракан параллельлӗ тӳрӗ линисен хушшипе пӗртан, урӑхла каласан, вӗсен линиллӗ единици пурин те пӗрре. Апла пулсан, k прямоугольник квадрат пулать; тӳрех каласан, k прямоугольник квадратла единица пулать, вӑл единица линиллӗ единицӑпа килӗшсе тӑрать (сӑмахран, тӗпӗпе ҫӳллӗшне линиллӗ сантиметрпа виҫнӗ пулсан, k квадрат квадратла сантиметр пулать). Пӗр четырехугольник ҫинчен калани кирек хӑш четырехугольникшӗн те тӗрӗс пулать; ҫавӑнпа вара эпир, параллельлӗ тӳрӗ линисем туртса, панӑ прямоугольникӗн пӗтӗм лаптӑкне квадратла единицӑсем ҫине уйӑратпӑр. Вӗсен хисепне тупар. Пӑхсах ҫакӑ курӑнса тӑрать: прямоугольникӗн ҫӳллӗшӗнче линиллӗ единица миҫе, унӑн тӗпӗпе параллельлӗ тӳрӗ лини туртнипе пулнӑ горизонтальлӗ пӗртан йӑрӑм та ҫавӑн чухлӗ пулать, урӑхла каласан, h чухлӗ пӗртан йӑрӑм пулать. Тепӗр енчен, прямоугольникӗн тӗпӗнче линиллӗ единица миҫе, унӑн ҫӳллӗшӗпе параллельлӗ тӳрӗ линисем туртнипе пулнӑ кашни горизонтальлӗ йӑрӑмри квадратла единицӑсем те ҫавӑн чухлех пулаҫҫӗ, урӑхла каласан, b чухлӗ квадратла единица пулать. Апла пулсан, мӗнпур квадратла единица $b \cdot h$ чухлӗ пулать. Ҫапла ӗнтӗ:

$$\text{прямоугольникӗн лаптӑкӑшӗ} = bh \text{ пулать,}$$

урӑхла каласан, вӑл тӗпӗпе ҫӳллӗшӗн произведенийӗпе пӗртан пулать.

2) Фигурӑн тӗпӗпе ҫӳллӗшӗн (пӗр единицӑпа виҫнӗ) тӑршшӗсене вак числосемпе кӑтартнӑ.

Сӑмахран, панӑ прямоугольникӗн:

$$\text{тӗпӗ} = 3\frac{1}{2} = \frac{7}{2} \text{ линиллӗ единицӑпа пӗртан,}$$

$$\text{ҫӳллӗшӗ} = 4\frac{3}{5} = \frac{23}{5} \text{ линиллӗ единицӑпа пӗртан пулччӑр.}$$

Ҫак ваксене пӗр пек знаменательлӗ тусан, вӗсем ҫакӑн пек пулса тӑраҫҫӗ:

$$\text{тӗпӗ} = \frac{35}{10}, \text{ ҫӳллӗшӗ} = \frac{46}{10} \text{ пулаҫҫӗ.}$$

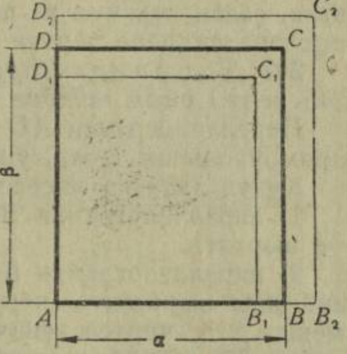
Линиллӗ единицӑн $^1/_{10}$ пайне вӑрӑмӑшӗн ҫӗнӗ единици вырӑнне йышӑнар. Ун чух вара эпир ҫапла калама пултаратпӑр: прямоугольникӗн тӗпӗ 35 ҫӗнӗ единицӑллӑ, ҫӳллӗшӗ 46 ҫавӑн пекех единицӑллӑ пулать. Апла пулсан, малта кӑтартса панипе (1-мӗш тӗслӗх) прямоугольник лаптӑкӗ $35 \cdot 46$ квадратла единицӑпа пӗртан пулать, вӑл единицӑсем вӑрӑмӑшӗн ҫӗнӗ единиципе килӗшсе тӑраҫҫӗ. Анчах ҫак квадратла единица малтанхи линиллӗ единицӑпа килӗшсе тӑракан квадратла единицӑн $^1/_{100}$ пайӗ пулать; апла пулсан, прямоугольникӗн лаптӑкӑшӗ малтанхи квадратла единицӑпа виҫсен ҫакӑнпа пӗртан пулса тӑрать:

$\frac{35\cdot 46}{100}=\frac{35}{10}\cdot\frac{46}{10}=3\frac{1}{2}\cdot 4\frac{3}{5}$ (квадратла единица).

3) Фигурӑн тӗпӗпе ҫӳллӗшне (е вӗсенчен пӗрне кӑна) вӑрӑмӑш единиципе виҫсе пӗлме май ҫук пулсан, вӗсен тӑршшӗсене иррациональнӑй числосемпе кӑтартаҫҫӗ.

Ҫакӑн пек чух фигурӑн лаптӑкӑшне кирлӗ таран ҫывӑхартнӑ тӗрӗслӗхпе виҫсе пӗлеҫҫӗ.

Анчах кун пек чух та прямоугольникӗн лаптӑкӑшӗ валли тӗрӗс виҫе тупма пулать. $ABCD$ прямоугольникӗн (243 черт.) AB тӗпӗн тӑршшӗне α иррациональнӑй числопа, AD ҫӳллӗшӗн тӑршшӗне β иррациональнӑй числопа кӑтартнӑ пултӑр. Вӗсенчен, кашни числине периодлӑ мар вӗҫӗмсӗр вуншарлӑ вакпа ҫырса хума пулать (150 §). Ҫак числосене h вуншарлӑ палӑллӑ ваксем туса, вӗсен пӗлтерӗшӗсене малтан ҫителӗксӗр, унтан ытлашшипе ҫывӑхартса илер. Ҫителӗксӗр илсе ҫывӑхартнӑ (пӗрремӗш числин) пӗлтерӗшне α_n саспаллипе, (иккӗмӗш числин) пӗлтерӗшне β_n саспаллипе паллӑ тӑвар; ҫав числосенех ытлашши илсе ҫывӑхартнӑ пӗлтерӗшӗсене α'_n тата β'_n саспаллисемпе паллӑ тӑвар. Прямоугольникӗн AB тӗпӗ ҫине A точкӑран пуҫласа малтан AB_1 татӑк виҫсе хурар, унӑн числоллӑ пысӑкӑшӗ α_n пысӑкӑшпе пӗртан, унтан AB_2 татӑк виҫсе хурар, унӑн числоллӑ пысӑккӑшӗ α'_n пысӑкӑшпе пӗртан. Пӑхсах паллӑ, $AB_1 < AB$ тата $AB_2 > AB$ пулаҫҫӗ. Малалла AD ҫӳллӗш ҫине A точкӑран пуҫласа AD_1 тата AD_2 татӑксем виҫсе хурар, вӗсен числоллӑ пысӑкӑшӗсем β_n тата β'_n пысӑкӑшсемпе пӗр тан. Пӑхсах паллӑ, $AD_1 < AD$ тата $AD_2 > AD$ пулаҫҫӗ.



243 черт.

Пулӑшакан икӗ прямоугольник тӑвар $AB_1C_1D_1$ тата $AB_2C_2D_2$. Вӗсен кашнин тӗпӗпе ҫӳллӗшне ҫак рациональнӑй числосемпе кӑтартнӑ:

$$AB_1=\alpha_n,\ AB_2=\alpha'_n,\ AD_1=\beta_n,\ AD_2=\beta'_n.$$

Ҫавӑнпа иккӗмӗш тӗслӗхре кӑтартнӑ тӑрӑх.

$$AB_1C_1D_1 \text{ лаптӑкӑшӗ} = a_n\beta_n,$$
$$AB_2C_2D_2 \text{ лаптӑкӑшӗ} = \alpha'_n\beta'_n \text{ пулаҫҫӗ.}$$

Халь ӗнтӗ n вӗҫӗмсӗр пысӑкланать тейӗпӗр. Ун чух вара α_n тата α'_n числосен пределӗ иррациональнӑй число α пулать, β_n тата β'_n числосен пределӗ иррациональнӑй число β пулать. Алгебра вӗрентнӗ тӑрӑх, $\alpha_n\beta_n$ тата $\alpha'_n\beta'_n$ произведенисен пӗрлехи пределӗ пур, вӑл α тата β числосен произведенийӗ пулать (154 §).

$\alpha_n\beta_n$ тата $\alpha'_n\beta'_n$ произведенисен ҫак пӗрлехи пределне, урӑхла каласан, $\alpha\beta$ произведение, $ABCD$ лаптӑкӑн виҫи вырӑнне йышӑнаҫҫӗ. Ҫакна тӳрех ӑнланса илме ҫӑмӑл: ку виҫе икӗ условипе килĕшет, лаптăка виçекен число вăл условисемпе килĕшсе тăмалла (243 §), тӳрех каласан: 1) пĕртан прямоугольниксен лаптăкĕсене виçекен числосем пĕртан пулаççĕ: 2) прямоугольнике темиçе прямоугольник çине пайласан, пĕтĕм прямоугольникĕн лаптăкне виçекен число унăн пайланă хыççăн пулнă прямоугольниксен лаптăкĕсене виçекен числосен суммипе пĕртан пулать. Çапла вара, çакăн пек чух та прямоугольник лаптăкĕ тĕпĕпе çӳллĕшĕн произведенийĕпе пĕртан пулать:

247. Теорема. ***Параллелограм лаптăкĕ*** ($ABCD$, 244 тата 245 черт.) ***унăн тĕпĕпе çӳллĕшĕн произведенийĕпе пĕртан.***

Параллелограмăн AD тĕпĕ çинче (икĕ чертеж çинче те) $AEFD$ прямоугольник тăвар, унăн EF енĕ BC енĕн тăсăмĕ пулать.

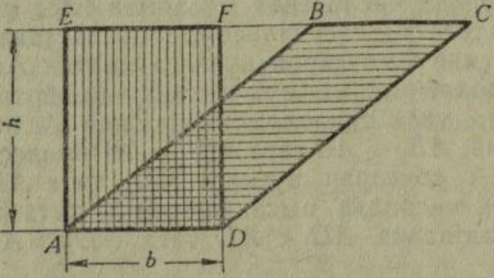
Кунта лаптăка виçесси икĕ тĕрлĕ пулма пултарать:

1) параллелограмăн BC енĕ прямоугольникĕн EF енĕ тулашĕнче выртать.

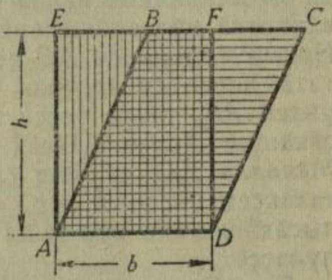
2) параллелограмăн BC енĕн пĕр пайĕ прямоугольникĕн EF енĕ çине вырнаçать (пĕрремĕш тĕслĕхе 244 чертеж çинче, иккĕмĕшне 245 чертеж çинче кăтартнă). Çак тĕрĕссине кăтартар: пĕрремĕш тĕслĕхре те, иккĕмĕшĕнче те

$ABCD$ лаптăкĕ $=$ $AEFD$ лаптăкĕпе пĕртан.

Параллелограм çумне AEB треугольник, прямоугольник çумне DFC треугольник хушсан, икĕ хутчен те пĕр $AECD$ трапециех пулса тăрать. Хушăнакан треугольниксем пĕртан (вĕсен икшер пĕр пек ен тата çав енсен хушшинче пĕрер пĕр пек кĕтес пур), çавăнпа параллелогрампа прямоугольник пĕртан пысăкăшлĕ пулмалла. $AEFD$ лаптăкĕ $= bh$, çавăнпа $ABCD$ лаптăкĕ те $= bh$ пулать, кунта параллелограмăн тĕпĕ b пулать, h унăн çӳллĕшĕ пулать.



244 черт.



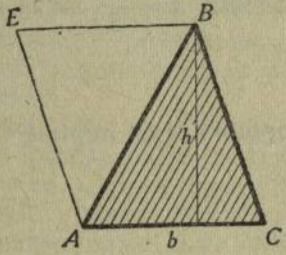
245 черт.

248. Теорема. ***Треугольник лаптăкĕ*** (ABC, 246 черт.) ***ун тĕпĕпе çӳллĕшĕн çур произведенийĕпе пĕртан.***

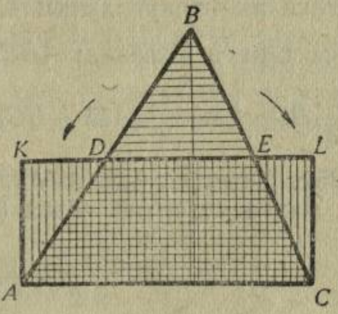
Треугольникĕн AC тĕпĕпе тата BC енĕпе параллельлĕ татăксем туртар ($BE \parallel AC$, $AE \parallel BC$) Ун чух вара $AEBC$ параллелограм пулса тăрать, унăн лаптăкĕ, малта кăтартни тăрăх, bh пĕртан. Анчах ABC треугольникĕн лаптăкĕ $AEBC$ лаптăкăн çуррипе пĕртан,

çавăнпа ABC треугольникĕн лаптăкĕ $=\frac{1}{2}b\cdot h$ пулать.

Асăрхаттарни. Çакна ăнланса илме çăмăл: кирек хăш треугольник те пайăн-пайăн уйăрăлать; çак пайсене вырăнĕсенчен куçарнипе прямоугольник тума пулать; ку прямоугольникĕн тĕпĕ треугольникĕн тĕпĕпе пĕртан тата прямоугольникĕн çӳллĕшĕ треугольник çӳллĕшĕнчен икĕ хут пĕчĕкĕрех (247 черт.).



246 черт.

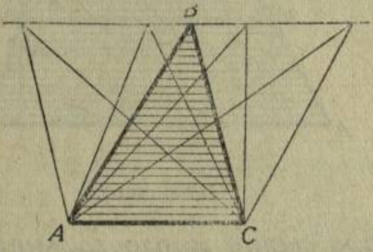


247 черт.

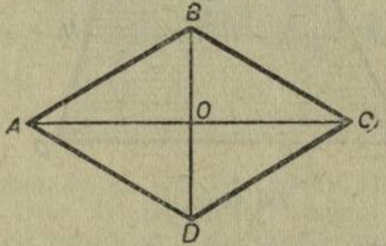
249. Следствисем. *Тан тĕплĕ, тан çӳллĕшлĕ треугольниксем пĕртан пысăкăшлĕ треугольниксем пулаççĕ.*

Сăмахран, ABC треугольникĕн (248 черт.) B тăррине AC тĕпĕпе параллельлĕ туртнă тӳрĕ лини тăрăх куçарса пырсан тата унăн AC тĕпĕ хăй вырăнĕнчех юлсан, треугольник лаптăкĕ улшăнмасть.

2) *Тӳрĕ кĕтеслĕ треугольникĕн лаптăкĕ хăйĕн катечĕсен çурпроизведенийĕпе пĕртан,* мĕншĕн тесен унăн пĕр катечĕ тĕпĕ, тепри çӳллĕшĕ пулать.



248 черт.



249 черт.

3) *Ромб лаптăкĕ хăйĕн диагоналĕсен çурма произведенийĕпе пĕртан.* Чăнах та, $ABCD$ (249 черт.) ромб пулсан, унăн диагоналĕсем пĕр-пĕринпе перпендикулярлă. Çавăнпа

$$\triangle ABC \text{ лаптăкĕ} = \frac{1}{2} AC \cdot OB \text{ пулать.}$$

$$\triangle ACD \text{ лаптăкĕ} = \frac{1}{2} AC \cdot OD \text{ пулать.}$$

$$ABCD \text{ лаптăкĕ} = \frac{1}{2} AC \cdot (OB + OD) = \frac{1}{2} AC \cdot BD \text{ пулать.}$$

4) *Икĕ треугольник лаптăкĕсен отношенийĕ хăйсен тĕпĕсемпе çӳллĕшĕсен произведенийĕсен отношенийĕпе пĕртан* (хутлаканни $^1/_2$ кĕскелет).

250. Теорема. ***Трапеци лаптăкĕ хăйĕн тĕпĕсен çурсуммипе çӳллĕшĕн произведенийĕпе пĕртан.***

$ABCD$ трапецире (250 черт.) AD диагональ туртсан, унăн лаптăкĕ икĕ треугольник CAD тата ABC лаптăкĕн сумми пек пулса тăрать. Çавăнпа: $ABCD$ трапеци лаптăкĕ $s=\frac{1}{2}\ AD\cdot h+$ $+\frac{1}{2}BC\cdot h=\frac{1}{2}(AD+BC)\cdot h.$

251. Следстви. MN (251 черт.) трапецин вăтам линийĕ пулсан, малта кăтартнă тăрăх (99 §),

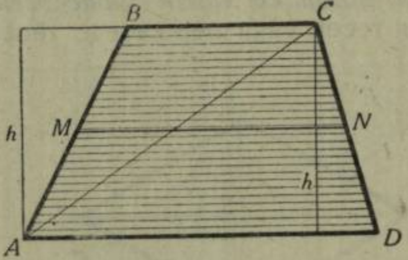
$$MN=\frac{1}{2}(DA+BC).$$

Çавăнпа

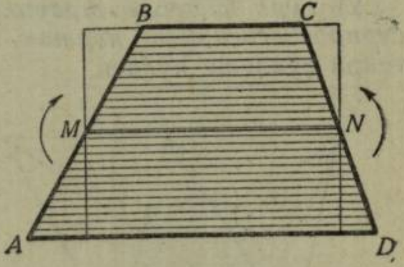
$$ABCD \text{ трапеци лаптăкĕ} = MN\cdot h \text{ пулать.}$$

урăхла каласан, *трапецин лаптăкĕ хăйĕн вăтам линийĕпе çуллĕшĕн произведенийĕпе пĕртан* пулать.

Çакна 251 чертеж çинче тӳрех курма пулать.



250 черт.



251 черт.

252. Теорема. ***Çавракăш тавра çырнă многоугольникĕн лаптăкĕ хăйĕн периметрĕпе çур радиусĕн произведенийĕпе пĕртан.***

Çавракăш тавра çырнă многоугольникĕн тăррисене пурне те O центрпа (252 черт.) пĕрлештерсен, многоугольникрен треугольниксем пулса тăраççĕ; ун чух вара многоугольникĕн енĕсем çав треугольниксен тĕпĕсем пулаççĕ, çавракăш радиусĕ треугольниксен çӳллĕшĕ вырăнне пулать.

Ку радиуса R саспаллипе паллă тăвар та, çакă пулса тăрать:

$\triangle AOB$ лаптăкĕ $=AB\cdot\frac{1}{2}R$, $\triangle BOC$ лаптăкĕ $=BC\cdot\frac{1}{2}R$ т. ыт. те.

Çавăнпа,

$ABCDE$ лаптăкĕ $=(AB+BC+CD+DE+EA)\cdot\frac{1}{2}R=P\cdot\frac{1}{2}R$

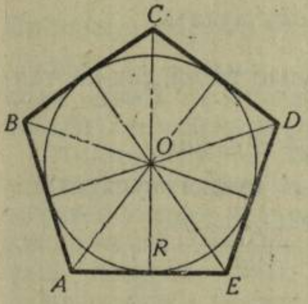
пулать, кунта P саспалли многоугольникĕн периметрне пĕлтерет.

Следстви. *Тĕрĕс многоугольникĕн лаптăкĕ хăйĕн периметрĕпе çурапофемин произведенийĕпе пĕртан,* мĕншĕн тесен тĕрĕс многоугольнике кирек хăшне те çаврашка тавра çырнă многоугольник теме, унăн радиусне апофема теме пулать.

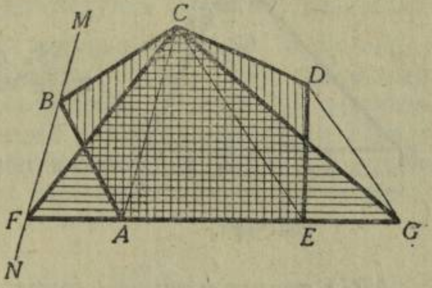
253. Тĕрĕс мар многоугольникĕн лаптăкĕ. Пĕр-пĕр тĕрĕс мар многоугольникĕн лаптăкне тупмалла пулсан, ăна (сăмахран, диагональсемпе) треугольниксем çине уйăраççĕ; унтан кашни треугольникĕн лаптăкне хăйне уйрăм шутлаççĕ те результачĕсене пĕрле хушаççĕ.

254. Задача. *Панă многоугольникпе (ABCDE,* 253 черт.) *пĕртан пысăккăшлĕ треугольник тумалла.*

Панă многоугольникрен пĕр-пĕр AC диагональпе кастарса $\triangle ABC$ уйăрса илетпĕр. Треугольникĕн B тăрри урлă AC диагональпе параллельлĕ MN тӳрĕ лини туртатпăр: $MN \parallel AC$, B тăрă AC диагонале хирĕç выртать. Унтан касса уйăрнă треугольник çӳмĕнче выртакан енсенчен пĕрне тăсатпăр (чертеж çинче EA ене малалла тăснă); вăл ен MN тӳрĕ линие касса иртет. Касса иртнĕ тĕлти F точкăна C точкăпа пĕрлештерер. CBA треугольникпе CFA треугольник пĕртан пысăкăшлĕ, мĕншĕн тесен вĕсем иккĕшĕ те пĕр тĕплĕ (AC). B тата E тăррисем вĕсен AC тĕппе параллельлĕ тӳрĕ лини çинче выртаççĕ. Панă многоугольникрен $\triangle CBA$ уйăрса илсе, ун вырăнне унпа пĕртан пысăкăшлĕ $\triangle CFA$ хурсан, лаптăк пысăкăшĕ улшăнмасть: çавăнпа панă многоугольник $FCDE$ многоугольникпе пĕртан пысăкăшлĕ пулать; $FCDE$ многоугольник кĕтесĕсем панă многоугольникĕн кĕтесĕсенчен пĕр кĕтес сахалтарах. Çапла майпа ку многоугольникĕн кĕтесĕсенче тата тепĕр кĕтес сахалтарах тума пулать, çапла многоугольникрен треугольник (пирĕн чертеж çинчи FCG) пуличченех многоугольникĕн кĕтесĕсене пĕрерĕн-пĕрерĕн чакарса пыма пулать.



252 черт.



253 черт.

255. Задача. *Многоугольникпе пĕртан пысăкăшлĕ квадрат тумалла.*

Малтан многоугольникрен унпа пĕртан пысăкăшлĕ треугольник тăваççĕ, унтан çав треугольникрен квадрат тăваççĕ. Треугольникĕн тĕпĕпе çӳллĕшĕ b тата h пулччăр, тумалли квадратăн енĕ x пултăр. Ун чух вара треугольникĕн лаптăкăшĕ $^1/_2\, bh$, квадрат лаптăкăшĕ x^2 пулать; çавăнпа,

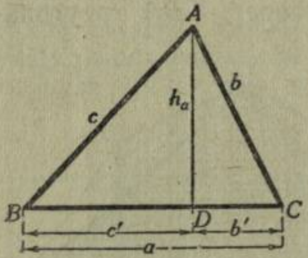
$\frac{1}{2}bh = x^2$ пулать, çакăнтан шутласан, $\frac{1}{2}b : x = x : h$ пулать,

урăхла каласан, $^1/_2\, b$ тата h пысăкăшсем хушшинче x вăтам пропорциллĕ пысăкăш пулать. Апла пулсан, квадрат енне вăтам пропорциллĕ пысăкăш тумалли малта кăтартнă (190 §) мелпе тума пулать.

Асăрхаттарни. Многоугольникрен треугольниксем тăвасси хăш чух кăна кирлĕ пулать. Сăмахран, панă трапецие квадрата куçарасси çинчен калаçу пырать пулсан, трапеци çӳллĕшĕпе унăн вăтам линийĕ хушшинчи вăтам пропорциллĕ пысăкăша тупсан çитет. Тупнă татăк çинче вара квадрат тумалла.

256. **Задача.** *Треугольникĕн пĕр енĕ a, тепĕр енĕ b, виççĕмĕш енĕ c тăршшĕ; çак треугольникĕн лаптăкăшне S шутласа кăлармалла.*

ABC треугольникĕн (254 черт.) a енĕ çине антарнă çӳллĕшĕ h_a пултăр:



254 черт.

Ун чух вара

$$S = \frac{1}{2}ah_a \text{ пулать.}$$

h_a çӳллĕшне тупас тесен, çак пĕртанлăха илер (194 §):

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac',$$

çак пĕртанлăхран c' татăка тупатпăр:

$$c' = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2a}.$$

ABD треугольникрен çакна тупатпăр:

$$h_a = \sqrt{c^2 - \left(\frac{a^2+c^2-b^2}{2a}\right)^2} = \frac{1}{2a}\sqrt{4a^2c^2 - (a^2+c^2-b^2)^2}.$$

Корень айĕнчи выражение çапла улăштаратпăр:

$$\begin{aligned}(2ac)^2 - (a^2+c^2-b^2)^2 &= (2ac+a^2+c^2-b^2)(2ac-a^2-c^2+b^2) = \\ &= [(a^2+c^2+2ac)-b^2]\,[b^2-(a^2+c^2-2ac)] = \\ &= [(a+c)^2-b^2]\,[b^2-(a-c)^2] = \\ &= (a+c+b)(a+c-b)(b+a-c)(b-a+c).\end{aligned}$$

Çавăнпа,

$$S = \frac{1}{2}ah_a = \frac{1}{4}\sqrt{(a+b+c)(a+b-c)(a+c-b)(b+c-a)}^{1}$$

пулать.

$a+b+c = 2p$ пулсан, вара

$a+c-b = (a+b+c) - 2b = 2p - 2b = 2(p-b)$ пулать.

---

[1] Треугольникĕн кирек те хăш икĕ енĕн сумми виççĕмĕш енĕнчен пысăкрах, çавăнпа çак $a+b-c$, $a+c-b$ тата $b+c-a$ пур разноçсем те положительнăй числосем пулаççĕ.

Çакăн пекех

$$b+a-c=2(p-c) \text{ пулать;}$$
$$b+c-a=2(p-a) \text{ пулать.}$$

Ун чух вара

$$S=\frac{1}{4}\sqrt{2p\cdot 2(p-a)\cdot 2(p-b)\cdot 2(p-c)},$$

урăхла каласан,

$$S=\sqrt{p(p-a)\ \ (p-b)\ \ (p-c)} \text{ пулать.}$$

Çак выражение (Александрия хулинче пирĕн эра пуçланиччен III — II ĕмĕрсем вăхăтнелле пурăннă Герон математик ячĕпе) **Герон формули** теççĕ.

Хайне уйрăм тĕслĕх. Тан енлĕ, енĕ a тăршшĕ треугольникĕн лаптăкне çак формулăпа çырса кăтартаççĕ:

$$S=\sqrt{\frac{3a}{2}\cdot\frac{a}{2}\cdot\frac{a}{2}\cdot\frac{a}{2}}=\frac{a^2\sqrt{3}}{4}.$$

Пифагор теореми тата ун çинче никĕсленсе тăракан задачăсем.

257. Теорема. ***Тӳркĕтеслĕ треугольникĕн катечĕсем çине тунă квадратсен лаптăкĕсен сумми çак треугольникĕн гипотенузи çине тунă квадратăн лаптăкĕпе пĕртан.***

Ку предложени Пифагор теоремин тепĕр форми пулса тăрать, вăл тĕрĕссине эпир малта (191 §) кăтартнă: гипотенуза тăршшĕне виçекен числон квадрачĕ катетсен тăршшĕсене виçекен числосен квадрачĕсен суммипе пĕртан. Чăнах та, татăк тăршшĕне виçекен числон квадрачĕ çак татăк çине тунă квадрат лаптăкĕн виçи пулса тăрать те ĕнтĕ. Çавăнпа 191 §-ри теорема Пифагорăн çак теоремипе пĕр пек пулать. Пифагор теоремин тепĕр доказательствине илсе кăтартар, вăл доказательство лаптăксене шутласа кăларни çинче мар, вĕсене тӳрех танлаштарни çинче никĕсленсе тăрать.

255 черт.

Доказательство (Эвклидăн). *ABC* (255 черт.) тӳрĕкĕтеслĕ треугольник пултăр; *BDEA*, *AFGC* тата *BCKH* унăн катечĕсемпе гипотенуза çине тунă квадратсем пулччăр. Çакна кăтартмалла: пирвайхи икĕ квадрат лаптăкĕсен сумми виççĕмĕш квадрат лаптăкĕпе пĕртан пулать.

Треугольникĕн BC енĕпе перпендикулярлă AM татăк туртар: $AM \perp BC$, ун чух $BCKH$ квадратран икĕ прямоугольник пулса тăрать. Çакна кăтартар: $BLMH$ прямоугольник $BDEA$ квадратпа пĕртан пысăкăшлĕ, $LCKM$ прямоугольник $AFGC$ квадратпа пĕртан пысăкăшлĕ пулаççĕ.

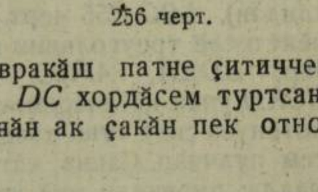
Пулăшакан тӳрĕ линисем (DC тата AH) туртар. Чертеж çинче штрихпа витнĕ икĕ треугольнике пăхса тухар. DCB треугольникпе $BDEA$ квадратăн тĕпĕсем пĕрре (BD), $\triangle DCB$-ĕн CN çӳллĕшĕ çак квадратăн AB çӳллĕшĕпе пĕртан: DCB треугольник $BDEA$ квадратăн çуррипе пĕртан пысăкăшлĕ пулать. ABH треугольникпе $BLMN$ прямоугольникĕн тĕпĕсем пĕрре (BH), $\triangle ABH$-ĕн AP çӳллĕшĕ çак прямоугольник BL çӳллĕшĕпе пĕртан: ABH треугольник $BLMN$ прямоугольникĕн çуррипе пĕртан пысăкăшлĕ пулать. Çак треугольниксене пĕр-пĕринпе танлаштарсан, çакна куратпăр: вĕсен $BD = BA$ тата $BC = BH$ пулаççĕ (квадрат енĕсем пĕр-пĕринпе пĕртан); кунсăр пуçне, вĕсен $\angle DBC = \angle ABH$, мĕншĕн тесен çак кĕтессенчен кашнине вĕсен пĕрлехи пайĕнчен (ABC) тата тӳрĕ кĕтесрен тунă. Апла пулсан, ABH тата BDC треугольниксем пĕр-пĕринпе пĕртан пулаççĕ. Кунта çакă тухса тăрать: $BLMH$ прямоугольник $BDEA$ квадратпа пĕртан пысăкăшлĕ пулать. G точкăна B точкăпа, A точкăна K точкăпа пĕрлештерер те $LCKM$ прямоугольник $AFGC$ квадратпа пĕртан пысăкăшлĕ пулнине шăп малти пекех кăтартса парар. Кунтан çакă тухса тăрать: $BCKH$ квадрат $BDEA$ тата $DFGC$ квадратсен суммипе пĕртан пысăкăшлĕ пулать.

258. Задачăсем. *Квадрат тумалла, унăн лаптăкĕ икĕ панă квадрат лаптăкĕсен суммипе пĕртан пулмалла.*

Тӳркĕтеслĕ треугольник тăватпăр, унăн катечĕсем панă квадратсен енĕсем пулччăр. Çак треугольникĕн гипотенузи çине тунă квадрат лаптăкĕ панă квадратсен лаптăкĕсен суммипе пĕртан пулать.

2) *Квадрат тумалла, унăн лаптăкĕ икĕ панă квадрат лаптăкĕсен разноçĕпе пĕртан пулмалла.* Тӳркĕтеслĕ треугольник тăвар, унăн гипотенузи—панă квадратсенчен пысăкрах квадрачĕн енĕ пултăр, катечĕ унăн—панă квадратсенчен пĕчĕкрех квадрачĕн енĕ пултăр. Çак треугольникĕн тепĕр катечĕ çине тунă квадрат эпир шыракан квадрат пулса тăрать.

3) *Квадрат тумалла, унăн лаптăкĕпе панă квадрат лаптăкĕ хушшинчи отношени $m : n$ отношени пек пулмалла.*



256 черт.

Пĕр-пĕр тӳрĕ лини (256 черт.) çине $m = AB$ тата n(эн) $= BC$ татăксем виçсе хурар, диаметр пулса тăракан AC татăк çине çурçавракăш çырар. B точкăран çавракăш патне çитиччен BD перпендикуляр тăрататпăр. AD тата DC хордăсем туртсан, тӳркĕтеслĕ треугольник пулса тăрать, унăн ак çакăн пек отношенисем пур (192 §):

$$AD^2 : DC^2 = AB : BC = m : n.$$

Çак треугольникĕн DC катечĕ çине DE татăк виçсе хурар, DE татăк панă квадратăн енĕпе пĕртан; унтан CA енпе параллельлĕ EF татăк туртар: $EF \parallel CA$[1], DF татăк эпир шыракан квадратăн енĕ пулать, мĕншĕн тесен

$\frac{DF}{DE}=\frac{AD}{DC}$, кунтан шутласан, $\left(\frac{DF}{DE}\right)^2=\left(\frac{AD}{DC}\right)^2$ пулать;

çавăнпа,

$$DF^2:DE^2=AD^2:DC^2=m:n \text{ пулать.}$$

Пĕрьевĕрлĕ фигурăсен лаптăкĕсен отношенийĕ.

259. Теорема. ***Икĕ треугольникĕн пĕрер пĕртан кĕтес пулсан, вĕсен лаптăкĕсен хушшинчи отношенийĕ çав пĕртан кĕтессен енĕсен произведенийĕсен отношенийĕпе пĕртан.***

ABC тата $A_1B_1C_1$ треугольниксен A тата A_1 кĕтесĕсем пĕртан пулччăр (черт. 257).

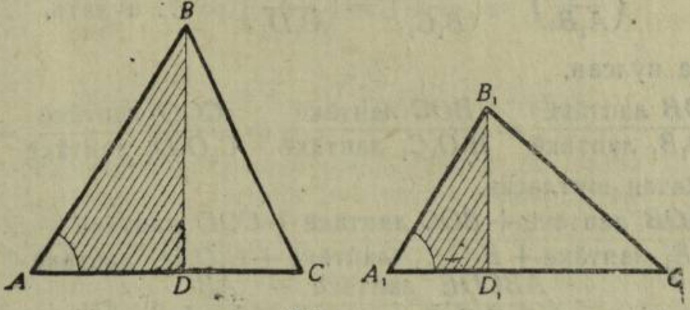
Треугольниксен BD тата B_1D_1 çӳллĕшсене туртатпăр та çакăн пек çырса хуратпăр:

$$\frac{ABC \text{ лаптăкĕ}}{A_1B_1C_1 \text{ лаптăкĕ}}=\frac{AC \cdot BD}{A_1C_1 \cdot B_1D_1}=\frac{AC}{A_1C_1}\cdot\frac{BD}{B_1D_1}.$$

ABD тата $A_1B_1D_1$ треугольниксем — пĕрьевĕрлĕ треугольниксем (вĕсен $\angle A=\angle A_1$ тата $\angle D=\angle D_1$), çавăнпа $BD:B_1D_1$ отношени $AB:A_1B_1$ отношенипе пĕртан; пĕрремĕш отношени вырăнне иккĕмĕш отношение лартсан, çакăн пек пĕртанлăх пулса тăрать:

$$\frac{ABC \text{ лаптăкĕ}}{A_1B_1C_1 \text{ лаптăкĕ}}=\frac{AC}{A_1C_1}\cdot\frac{AB}{A_1B_1}=\frac{AC \cdot AB}{A_1C_1 \cdot A_1B_1} \text{ пулать.}$$

260. Теорема. ***Пĕрьевĕрлĕ треугольниксен е многоугольниксен лаптăкĕсен отношенийĕ вĕсен килĕшӳллĕ енĕсен квадрачĕсен отношенийĕпе пĕртан.***



257 черт.

1) ABC тата $A_1B_1C_1$ пĕрьевĕрлĕ треугольниксем пулсан, вĕсен килĕшӳллĕ кĕтесĕсем пĕртан пулаççĕ; $\angle A=\angle A_1$, $\angle B=\angle B_1$

---

[1] Панă квадратăн енĕ DC енрен пысăкрах пулсан, E тата F точкăсем DC тата DA катетсен тăсăмĕсем çинче выртаççĕ.

тата $\angle C = \angle C_1$ пулччăр. 259 параграфри теоремăпа усă курса çапла çырар:

$$\frac{ABC \text{ лаптăкĕ}}{A_1B_1C_1 \text{ лаптăкĕ}} = \frac{AB \cdot AC}{A_1B_1 \cdot A_1C_1} = \frac{AB}{A_1B_1} \cdot \frac{AC}{A_1C_1}. \qquad (1)$$

Треугольниксен пĕрьевĕрлĕхĕнчен çакă тухса тăрать:

$$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{AC}{A_1C_1} = \frac{BC}{B_1C_1} \text{ пулать.} \qquad (2)$$

Çавăнпа эпир (1) пĕртанлăхра $\frac{AB}{A_1B_1}$ тата $\frac{AC}{A_1C_1}$ отношенисенчен кашнин вырăнне (2) ĕретри отношенисене кирек хăшне те лартма пултаратпăр; çавăнпа

$$\frac{ABC \text{ лаптăкĕ}}{A_1B_1C_1 \text{ лаптăкĕ}} = \left(\frac{AB}{A_1B_1}\right)^2 = \left(\frac{AC}{A_1C_1}\right)^2 = \left(\frac{BC}{B_1C_1}\right)^2 = \frac{AB^2}{A_1B_1{}^2} = \frac{AC^2}{A_1C_1{}^2} = \\ = \frac{BC^2}{B_1C_1{}^2} \text{ пулать.}$$

2) $ABCDE$ тата $A_1B_1C_1D_1E_1$ (258 черт.) пĕрьевĕрлĕ многоугольниксем пулсан, вĕсенчен, 171 § кăтартнă пек, пĕр хисеп чухлĕ тата пĕр пек выртакан треугольниксем тума пулать. AOB тата $A_1O_1B_1$ BOC тата $B_1O_1C_1$, т. ыт. çавăн пек треугольниксем пулччăр. Çак теоремăн пĕрремĕш пайĕ тĕрĕссине кăтартнипе усă курса, çакăн пек пропорцисем çыратпăр:

$$\frac{AOB \text{ лаптăкĕ}}{A_1O_1B_1 \text{ лаптăкĕ}} = \left(\frac{AB}{A_1B_1}\right)^2; \quad \frac{BOC \text{ лаптăкĕ}}{B_1O_1C_1 \text{ лаптăкĕ}} = \left(\frac{BC}{B_1C_1}\right)^2 \text{ т. ыт. те.}$$

Многоугольниксен пĕрьевĕрлĕхĕнчен çакă тухса тăрать:

$$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{CD}{C_1D_1} = \ldots$$

çавăнпа та

$$\left(\frac{AB}{A_1B_1}\right)^2 = \left(\frac{BC}{B_1C_1}\right)^2 = \left(\frac{CD}{C_1D_1}\right)^2 = \ldots \text{ пулать.}$$

Апла пулсан,

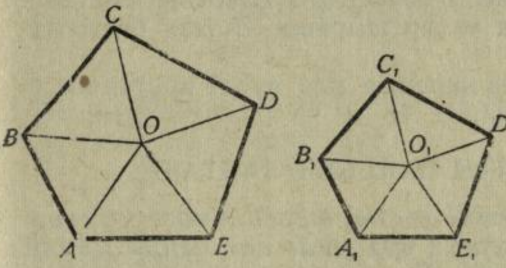
$$\frac{AOB \text{ лаптăкĕ}}{A_1O_1B_1 \text{ лаптăкĕ}} = \frac{BOC \text{ лаптăкĕ}}{B_1O_1C_1 \text{ лаптăкĕ}} = \frac{COD \text{ лаптăкĕ}}{C_1O_1D_1 \text{ лаптăкĕ}} = \ldots,$$

çакăнтан шутласан,

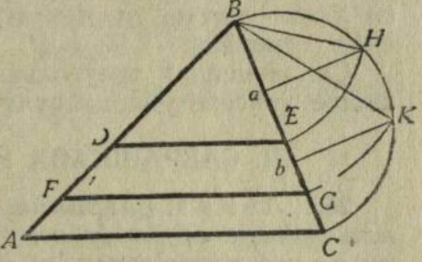
$$\frac{AOB \text{ лаптăкĕ} + BOC \text{ лаптăкĕ} + COD \text{ лаптăкĕ} + \ldots}{A_1O_1B_1 \text{ лаптăкĕ} + B_1O_1C_1 \text{ лаптăкĕ} + C_1O_1D_1 \text{ лаптăкĕ} + \ldots} = \\ = \frac{ABCDE \text{ лаптăкĕ}}{A_1B_1C_1D_1E_1 \text{ лаптăкĕ}} = \frac{AB^2}{A_1B_1{}^2} \text{ пулать.}$$

Следстви. *Пĕр ятлă тĕрĕс многоугольниксен лаптăкĕсен отношенийĕ вĕсен енĕсен квадрачĕсен отношенийĕпе, е вĕсем тавра çырнă çавракăш радиусĕсен квадрачĕсен отношенийĕпе, е вĕсен апофемисен квадрачĕсен отношенийĕпе пĕртан пулать.*

261. **Задача.** *Панă треугольнике унăн енĕсемпе параллельлĕ тӳрĕ линисем туртса т пĕртан пысăкăшлĕ пая уйăрмалла.*



258 черт.



259 черт.

Сăмахран, ABC треугольнике (259 черт.) AC тĕпĕпе параллельлĕ татăксем туртса, виçĕ пĕртан пысăкăшлĕ пая уйăрмалла пултăр.

Малтанах каласа хурар, эпир шыракан татăксем DE тата FG татăксем пулччăр. BE тата BG татăксене тупсан, DE тата FG татăксем те паллă пулаççĕ. BDE, BFG тата BAC треугольниксем — пĕрьевĕрлĕ треугольниксем; çавăнпа

$$\frac{BDE\text{ лаптăкĕ}}{BAC\text{ лаптăкĕ}}=\frac{BE^2}{BC^2}\text{ тата }\frac{BFG\text{ лаптăкĕ}}{BAC\text{ лаптăкĕ}}=\frac{BG^2}{BC^2}\text{ пулаççĕ.}$$

Анчах

$$\frac{BDE\text{ лаптăкĕ}}{BAC\text{ лаптăкĕ}}=\frac{1}{3}\text{ тата }\frac{BFG\text{ лаптăкĕ}}{BAC\text{ лаптăкĕ}}=\frac{2}{3}.$$

Çавăнпа,

$$\frac{BE^2}{BC^2}=\frac{1}{3}\text{ тата }\frac{BG^2}{BC^2}=\frac{2}{3}\text{ пулаççĕ,}$$

çакăнтан шутласан,

$$BE=\sqrt{\frac{1}{3}BC^2}=\sqrt{\frac{1}{3}BC\cdot BC}\text{ пулать}$$

тата

$$BG=\sqrt{\frac{2}{3}BC^2}=\sqrt{\frac{2}{3}BC\cdot BC}\text{ пулать.}$$

Ку выраженисенчен çакă курăнса тăрать: BE татăк BC татăкпа унăн $^1/_3$ пайĕ ($^1/_3BC$) хушшинче вăтам пропорциллĕ пысăкăш пулса тăрать, BG татăк BC татăкпа унăн $^2/_3$ пайĕ ($^2/_3BC$) хушшинче вăтам пропорциллĕ пысăкăш пулса тăрать. Çавăнпа ку задачăн чертежне çапла тума пулать: треугольникĕн BC енне a тата b точкăсене виçĕ пĕр пек пая уйăратпăр, ун çинех (BC) çурçавракăш çыратпăр; a тата b точкăсенчен BC енпе перпендикулярлă aH тата bK татăксем туртатпăр. HB тата KB хордăсем эпир шыракан вăтам пропорциллĕ татăксем пулса тăраççĕ; пĕрремĕш хорда пĕтĕм диаметрпа (BC) унăн $^1/_3$ пайĕ (Ba) хушшинче вăтам пропорциллĕ пысăкăш пулать, иккĕмĕш хорда BC

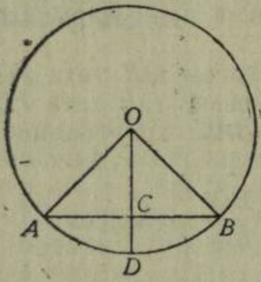
диаметрпа Bb татăк хушшинче, урăхла каласан, BC диаметрпа унăн $^{2}/_{3}$ пайĕ ($^{2}/_{3}$ BC) хушшинче вăтам пропорциллĕ пысăкăш пулать. Çак хордăсене BC çине B точкăран пуçласа виççе хурасси анчах юлать, ун чух вара хамăр шыракан E тата G точкăсене тупатпăр.

Çапла майпах треугольнике кирек те мĕн чухлĕ пĕртан пысăкăшлĕ пайсене уйăрма пулать.

II. ÇАВРАШКАПА УНĂН ПАЙĔСЕН ЛАПТĂКĔ.

262. Лемма. ***Çавракăш ăшне çырнă тĕрĕс многоугольникĕн енĕсене вĕçĕмсĕр иккĕлетнĕ чух унăн енĕ мĕнле кирлĕ, ун чухлĕ пĕчĕкленме пултарать.***

Çавракăш ăшне çырнă тĕрĕс многоугольникĕн енĕсен хисепĕ n пултăр, p — унăн периметрĕ пултăр; ун чух вара çак многоугольникĕн пĕр енне $\frac{p}{n}$ вакпа çырса кăтартма пулать. Многоугольникĕн енĕсене вĕçĕмсĕр иккĕлетнĕ чух, çак вакăн знаменателĕ вĕçĕмсĕр пысăкланать; числитель, урăхла каласан, p пысăкланать пулин те, пределсăр пысăкланмасть (мĕншĕн тесен çавракăш ăшне çырнă кирек хăш мăкăр многоугольник периметрĕ те çавракăш тулашне çырнă кирек хăш многоугольник периметрĕнчен те ялан пĕчĕкрех пулать). Пĕр-пĕр вакăн знаменателĕ вĕçĕмсĕр ÿссе пырать пулсан, унăн числителĕ пĕр-пĕр улшăнми пысăкăшран ялан пĕчĕк тăрать пулсан, ун пек вак мĕн чухлĕ кирлĕ, çавăн чухлĕ пĕчĕк пулма пултарать. Апла пулсан, çавракăш ăшне çырнă тĕрĕс многоугольник енĕ çинчен те çакнах калама пулать: унăн енне вĕçĕмсĕр иккĕлетнĕ чух, вăл ен мĕн чухлĕ кирлĕ, çавăн чухлĕ пĕчĕк пулма пултарать.



260 черт.

263. Следстви. AB татăк (260 черт.) çавракăш ăшне çырнă тĕрĕс многоугольникĕн енĕ, OA унăн радиусĕ тата OC унăн апофеми пулччăр. OAC треугольникрен çакна тупатпăр (50 §):

$$OA - OC < AC \text{ пулать,}$$

урăхла каласан,

$$OA - OC < \frac{1}{2} AB \text{ пулать.}$$

Çавракăш ăшне çырнă тĕрĕс многоугольниксене вĕçĕмсĕр иккĕлетнĕ чух, халь анчах эпир кăтартнă пек, вăл ен мĕнле кирлĕ çавăн чухлĕ пĕчĕккĕ пулма пултарать; апла пулсан, $OA - OC$ разность çинчен те çавнах калама пулать. Çапла ĕнтĕ çавракăш ăшне çырнă тĕрĕс многоугольникĕн енне вĕçĕмсĕр иккĕлетнĕ чух, *радиуспа апофема хушшинчи разность мĕнле кирлĕ, çавăн чухлĕ пĕчĕккĕ пулма пултарать.* Çакнах урăхла сăмахсемпе çапла калама пулать: çавракăш ăшне çырнă тĕрĕс многоугольникĕн енĕсене иккĕлетнĕ чух, *апофема туртăнакан предел радиус пулать.*

264. Çаврашка лаптăкĕ. R радиуслă çаврашка ăшне пĕр-пĕр тĕрĕс многоугольник çырар.

Çак многоугольникĕн лаптăкĕ q,
" периметрĕ p,
" апофеми a пулччăр.

Эпир (252 §-ри следствире) куртăмăр, ку пысăкăшсем хушшинче çакăн пек çыхăну пур:

$$q = \frac{1}{2}p \cdot a.$$

Çапла каласа хурар: çак многоугольникĕн енĕсем вĕçĕмсĕр иккĕленеççĕ, тейĕпĕр. Ун чух вара p периметрпа a апофема (çавăнпа q лаптăкĕ те) ÿсме тытăнаççĕ: периметр çавракăш тăршшĕ (C) пулса тăракан предел патне туртăнать, апофема çаврашка радиусĕпе (R) пĕртан тăракан предел патне туртăнать. Кунтан çакă тухса тăрать: многоугольник лаптăкĕ, унăн енĕсене иккĕлетнĕ чух ÿссе пырса, $\frac{1}{2}C \cdot R$ числопа пĕртан предел патне туртăнать. Çак предел çаврашка лаптăкĕн числоллă пысăкăшĕ пулать. Çапла вара, çаврашка лаптăкне K саспаллипе паллă туса, çапла çырма пулать:

$$K = \frac{1}{2}C \cdot R,$$

урăхла каласан, *çаврашка лаптăкĕ çавракăш тăршшĕпе радиус произведенийĕн çуррипе пĕртан пулать.*

Çавракăш тăршшĕ $C = 2\pi R$, çавăнпа

$$K = \frac{1}{2} \cdot 2\pi R \cdot R = \pi R^2,$$

урăхла каласан, *çаврашка лаптăкĕ радиус квадратне çавракăшпа диаметр хушшинчи отношени çине хутласан пулать.*

265. Следстви. *Çаврашкасен лаптăкĕсен отношенийĕ вĕсен радиусĕсен е диаметрĕсен квадрачĕсен отношенийĕсемпе пĕртан пулать.*

Чăнах та, K тата K_1 икĕ çаврашкан лаптăкĕсем, R тата R_1 вĕсен радиусĕсем пулсан,

$$K = \pi R^2$$

тата

$$K_1 = \pi R^2{}_1,$$

çакăнтан шутласан,

$$\frac{K}{K_1} = \frac{\pi R^2}{\pi R_1{}^2} = \frac{R^2}{R^2{}_1} = \frac{4R^2}{4R^2{}_1} = \frac{(2R)^2}{(2R_1)^2} \text{ пулаççĕ.}$$

266. Задача 1. *Çавракăш тăршшĕ 2 метр çаврашкан лаптăкне шутласа кăлармалла.*

Çакна шутласа кăларма чи малтан R тупатпăр:

$$2\pi R = 2,$$

çakăntan шутласан,

$$R = \frac{1}{\pi} = 0{,}3183\ldots \text{ пулать.}$$

Унтан çаврашка лаптăкне шутласа кăларатпăр:

$$K = \pi R^2 = \pi \left(\frac{1}{\pi}\right)^2 = \frac{1}{\pi} = 0{,}3183\ldots\ м^2 \text{ пулать.}$$

267. Задача 2. *Панă çаврашкапа пĕртан пысăкăшлĕ квадрат тумалла.*

Ку задачăна **çаврашка квадратури** теççĕ, ăна линейкăпа циркуль пулăшнипе шутласа кăларасси пулмасть. Чăнах та, тупмалли квадратăн енне x саспаллипе, çаврашка радиусне R саспаллипе паллă тусан, çакăн пек уравнени пулса тăрать:

$$x^2 = \pi R^2,$$

çакăнтан шутласан,

$$\pi R : x = x : R \text{ пулать,}$$

урăхла каласан, x çурçавракăшпа радиус хушшинче вăтам пропорциллĕ пысăкăш пулать. Çавăнпа, çур çавракăш тăршшĕ татăк паллă пулсан, панă çаврашкапа пĕртан пысăкăшлĕ квадрат тума çăмăл; тӳртĕн: çаврашкапа пĕртан пысăкăшлĕ квадрат енĕ паллă пулсан, çурçавракăш тăршшĕ татăк тума пулать. Анчах циркульпе линейка пулăшнипе çурçавракăш тăршшĕ татăк тума май çук; çавăнпа çаврашкапа пĕртан пысăкăшлĕ квадрат тумалли задачăна тĕрĕс шутласа кăларма май çук. Малтан çурçаврашка тăршшĕне çывăхартса тусан, унтан тата çак çурçаврашка тăршшĕ татăкпа радиус хушшинчи вăтам пропорциллĕ татăка тусан, çак задачăн çывăхартнă ответне тупма пулать.

268. Теорема. ***Сектор лаптăкĕ унăн пĕкки тăршшĕпе çур радиусĕн произведенийĕпе пĕртан.***

AOB секторăн *AB* пĕккинче (261) n° пултăр. Пăхсах паллă, 1°-лă пĕкĕ секторĕн лаптăкĕ çаврашкан $^1/_{360}$ пайĕ пулать, урăхла каласан, вăл $\frac{\pi R^2}{360}$ пулать. Çавăнпа n°-лă пĕкĕн S секторĕн лаптăкĕ çакă пулать:

$$S = \frac{\pi R^2 n}{360} = \frac{\pi R n}{180} \cdot \frac{R}{2}.$$

$\frac{\pi R n}{180}$ çак *AB* пĕкĕ (239 §) тăршшĕне кăтартать, S çавăнпа ăна s саспаллипе паллă тусан, çакăн пек пĕртанлăх пулать.

$$S = s \cdot \frac{R}{2}.$$

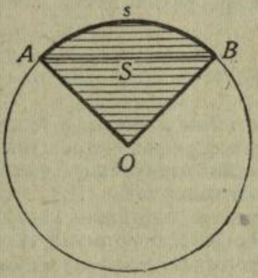
269. Сегмент лаптăкĕ. *S* пĕкĕпе тата *AB* хордăпа йĕри-тавра пӳлнĕ (261 §) сегмент лаптăкне тупас тесен, *AOBsA* сектор тата

AOB треугольник лаптăкĕсене кашнине хăйне уйрăм шутласа кăлармалла, унтан сектор лаптăкĕнчен треугольник лаптăкне кăлармалла.

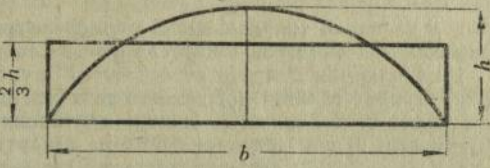
s пĕккĕн градусĕ пысăк мар пулсан, сегмент лаптăкне çак çывăхартнă формула тăрăх шутласа кăларма пулать (ку формулăпа доказательствăсăрах усă куратпăр):

$$\text{сегмент лаптăкĕ} = \frac{2}{3} bh, \qquad (1)$$

кунта *b* сегмент тĕпĕ пулать (262 черт.); *h*—унăн çӳллĕшĕ (ăна сегмент стрелки теççĕ). *h* : *b* отношени пĕчĕкленнĕçемĕн çак çывăхартнă формулăпа шутласа кăларнă результат йăнăшĕ те пĕчĕкленет; сăмахран, *h* çӳллĕш *b* тĕпĕн $^{1}/_{9}$ пайĕнчен пĕчĕкрех пулсан (вăл пĕкĕ 50°-ран пĕчĕкрех чухне пулать), çак йăнăш лаптăкăн 1%-чен пĕчĕкрех пулать.



261 черт.



262 черт.

Тĕрĕсрех результатсем çак сложнăйрах формула парать:

$$\text{сегмент лаптăкĕ} = \frac{2}{3} bh + \frac{h^3}{2b} \text{ пулать.}$$

УПРАЖНЕНИСЕМ.

Çак теоремăсем тĕрĕссине кăтартмалла:

1. Параллелограмăн диагоналĕ çинчи кирек те хăш точкипе диагональ çумĕнче выртакан икĕ енĕ хушшисем çак енĕсемпе тӳртĕн пропорциллĕ.

2. Трапеци лаптăкĕ хăйĕн пĕр параллельлĕ мар енне тепĕр параллельлĕ мар енĕ варринчен пĕрремĕш енĕ çине антарнă перпендикуляр çине ӳстернĕ хыççăн пулнă произведенипе пĕртан.

3. Икĕ четырехугольникĕн диагоналĕсем тата вĕсен хушшинчи кĕтесĕсем пĕр-пĕринпе килĕшӳллĕн пĕртан пулсан, ун пек четырехугольниксем пĕртан пысăкăшлĕ.

4. Трапецин диагоналĕсем пĕр-пĕрне касса иртнипе пулнă икĕ треугольник трапецин тĕпĕ çумĕнче выртаççĕ пулсан тата çав треугольниксен лаптăкĕсем килĕшӳллĕн p^2 тата q^2 пысăкăшсемпе пĕртан пулсан, пĕтĕм трапецин лаптăкĕ $(p+q)^2$ пулать.

5. Çавракăш ăшне çырнă тĕрĕс шестиугольникĕн лаптăкĕ çавракăш тавра çырнă тĕрĕс шестиугольникĕн $^{3}/_{4}$ лаптăкĕпе пĕртан.

6. *ABCD* четырехугольникĕн *BD* диагоналĕ варри урлă тепĕр диагоналĕпе *AC* параллельлĕ тӳрĕ лини туртнă; çак тӳрĕ лини *AD* ене *E* точкăра иртет. Çакна кăтартмалла: *CE* татăк четырехугольнике çурмаран уйрать.

7. Треугольник медианисене тепĕр треугольник енĕсем вырăнне шутласан, иккĕмĕш треугольникĕн лаптăкĕ пирвайхи треугольникĕн $^{3}/_{4}$ лаптăкĕпе пĕртан.

8. *O* центрлă çаврашкара *AB* хорда туртнă. *OA* радиус çине, ăна диаметр вырăнне шутласа, çавракăш çырнă. Çакна кăтартмалла: *AB* хорда икĕ çаврашкаран та касса илнĕ икĕ сегмент лаптăкĕсен отношенийĕ 4 : 1 отношенипе пĕртан.

9. Тӳркĕтеслĕ трапеци лаптăкне шутласа кăлармалла: унăн пĕр кĕтесĕ 60°-лă, кунсăр пуçне тата е икĕ тĕпĕ паллă, е пĕр тĕпĕ те çӳллĕшĕ паллă, е пĕр тĕпĕ те çав тĕпĕ енне тайлăк тăракан айккинчи енĕ паллă.

10. Трапецин тĕпĕсене (B тата b) тата çӳллĕшне (H) панă, унăн параллельлĕ мар енĕсене малалла тăснă та, вĕсем пĕр-пĕрне касса иртнĕ чух, треугольник пулса тăнă, çав треугольникĕн çӳллĕшне шутласа кăлармалла.

11. Пĕр треугольник ăшне тепĕр треугольник çырнă, иккĕмĕш треугольник тăррисем пĕрремĕш треугольник енĕсене çурмаран уйăраççĕ; иккĕмĕш треугольник ăшне çапла майпах виççĕмĕш треугольник çырнă, виççĕмĕшĕн ăшне тăваттăмĕш треугольник çырнă, çапла вĕçĕмсĕр çырса кайнă. Çак треугольниксен лаптăкĕсен суммин пределне тупмалла.

12. Треугольник ăшне çырнă çаврашкан радиусне r треугольникĕн виçĕ панă енĕ a, b тата c тăрăх шутласа кăлармалла.

Кăтартса пани. Треугольник лаптăкĕ S пулсан, çакна пăхса пĕлме çăмăл:

$$S = \frac{1}{2}ar + \frac{1}{2}br + \frac{1}{2}cr = pr \text{ пулать,}$$

кунта p саспалли треугольникĕн çурпериметрне пĕлтерет. Тепĕр енчен, S лаптăкăша 256 §-ри формула кăтартса тăрать. Çакăнтан r валли формула тупма пулать.

13. Сегментăн центрти кĕтесĕ 60°-лă пулсан, çаврашка радиусĕпе r çыхăнтарса, сегмент сăннине (çӳллĕшне) тата лаптăкне шутласа кăлармалла. Шутласса виçĕ мелпе шутламалла: 1) сектор лаптăкĕнчен треугольник лаптăкне кăларса шутламалла; 2) çак кĕнекери 269 §-ра кăтартнă пĕрремĕш кĕске формула тăрăх шутламалла тата 3) çавăнтах кăтартнă иккĕмĕш кĕске формула тăрăх шутламалла. Çывăхартнă результатсен абсолютнăй тата относительнăй йăнăшĕсене тупас тесе, шутласа кăларнă результатсене пĕр-пĕринпе танлаштармалла.

Шутлани:

$$b = r;$$

$$h = r - \frac{1}{2} r \sqrt{3} = \frac{1}{2} r (2 - \sqrt{3}) = 0{,}1340\, r;$$

1) p_1 лаптăкĕ $= \frac{\pi r^2}{6} - \frac{r^2 \sqrt{3}}{4} = r^2 \left(\frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{4} \right) = 0{,}0906 r^2;$

2) p_2 лаптăкĕ $= \frac{2}{3} bh = \frac{2}{3} \,.\, r \,.\, 0{,}1340 r = 0{,}0893\, r^2,$

3) p_3 лаптăкĕ $= \frac{2}{3} bh + \frac{h^3}{2b} = 0{,}0893 r^2 + 0{,}0012 r^2 = 0{,}0905 r^2.$

Абсолютнăй йăнăш:

p_2 лаптăкĕ валли $= 0{,}0906 r^2 - 0{,}0893 r^2 = 0{,}0013 r^2;$
p_3 лаптăкĕ валли $= 0{,}0906 r^2 - 0{,}0905 r^2 = 0{,}0001 r^2.$

Относительнăй йăнăш (урăхла каласан, абсолютнăй йăнăша виçмелли пысăкăшпа танлаштарни):

p_2 лаптăкĕ валли $= \frac{p_1 - p_2}{p_1} = \frac{0{,}0013 r^2}{0{,}0906 r^2} = 0{,}014 = 1{,}4\%;$

p_3 лаптăкĕ валли $= \frac{p_1 - p_3}{p_1} = \frac{0{,}0001 r^2}{0{,}0906 r^2} = 0{,}001 = 0{,}1\%.$

Çапла ĕнтĕ çывăхартнă пĕрремĕш формула тăрăх шутласа кăларнă результат чăн-чăн результатран 1,4% (яхăн) пĕчĕкрех, çывăхартнă иккĕмĕш формула тăрăх шутласа кăларнă результат чăн-чăн результатран 0,1% чухлĕ пĕчĕкрех.

14. 1) Сегмент тĕпне b тата унăн çӳллĕшне h (стрелкăна) пĕлнипе çаврашкан r радиусне шутласа кăлармалла.

Кăтарту. r гипотенузăллă, пĕр катечĕ $\frac{b}{2}$, тепĕр катечĕ r (эр) $- h$ илсе тунă тӳркĕтеслĕ треугольникрен çак уравнение тупатпăр:

$$\left(\frac{b}{2}\right)^2+(r-h)^2=r,$$

çак уравненирен гипотенузăна шутласа кăларма çăмăл.

2) Сегментăн тĕпĕ 67,2 *см* чух унăн стрелки 12,8 *см*. Çаксене пĕлнипе çаврашка диаметрне шутласа кăлармалла (маларах кăтартса панине пăхăр).

Чертеж тумалли задачăсем.

15. Тăрри урлă иртекен тӳрĕ линисемпе треугольнике виçĕ пая уйăрмалла. Çак пайсен лаптăкĕсен отношенийĕ $m:n:p$ отношенипе пĕртан пулмалла.

16. Треугольникĕн пĕр-пĕр енĕ çинче панă точка урлă тӳрĕ лини туртса, треугольнике икĕ пĕртан пысăкăшлĕ пая уйăрмалла.

17. Треугольник варринче точка тупмалла; вăл точкăна треугольник тăррисемпе пĕрлештерсен, треугольник виçĕ пĕртан пысăкăшлĕ пая уйăрăлмалла.

Кăтарту. Треугольникĕн AC енне D тата E точкăсенче виçĕ пĕртан пая уйăратпăр. D точка урлă треугольникĕн AB енĕпе, E точка урлă BC енĕпе параллельлĕ тӳрĕ линисем туртатпăр. Çак тӳрĕ линисем пĕр-пĕрне касса иртнĕ точка эпир шыракан точка пулать.

18. Ку та çавăн пекех — виçĕ пая уйăрмалла, пайĕсен отношенийĕ $2:3:4$ (е пĕтĕмлетсе каласан, $m:n:p$) пулмалла.

19. Параллелограма унăн тăрринчен тухакан тӳрĕ линисемпе виçĕ пĕр пысăкăш пая уйăрмалла.

20. Параллелограма панă точка урлă иртекен тӳрĕ линипе икĕ пая уйăрмалла, вĕсен лаптăкĕсен отношенийĕ $m:n$ отношенипе пĕртан пулмалла.

Кăтарту. Параллелограмăн вăтам линине $m:n$ отношенилле туса уйăрмалла, уйăракан точкине панă точкăпа тӳрĕ лини туртса пĕрлештермелле.

21. Параллелограма, унăн диагоналĕпе параллельлĕ тӳрĕ линисем туртса, виçĕ пĕртан пысăкăш пая уйăрмалла.

22. Треугольникĕн лаптăкне вăтам тата хĕррингчи отношенилле туса пайламалла.

Кăтарту. Çак задачăна алгебрăпа усă курса шутласа кăлармалла.

23. Треугольнике, унăн тĕпĕпе перпендикулярлă тӳрĕ линисем туртса, пĕртан пысăкăшлĕ виçĕ пая уйăрмалла.

24. Концентрически çавракăшсем çырса, панă çаврашкана 2 е 3... пĕртан пысăккăш пая уйăрмалла.

25. Трапецие, унăн тĕпĕсемпе параллельлĕ тӳрĕ лини туртса, пĕртан пысăкăш икĕ пая уйăрмалла.

Кăтарту. Трапецин параллельлĕ мар енĕсене малалла тăссан, вăл енсем пĕр-пĕрне касса иртеççĕ; тупмалли лини вĕçĕпе треугольник тăрри хушши паллă мар пысăкăш пулмалла; пĕрьевĕрлĕ треугольниксен лаптăкĕсемпе усă курса, пропорцисем çырса хумалла.

26. Панă прямоугольникрен тата панă тĕпĕнчен пĕртан пысăкăш тепĕр прямоугольник тумалла.

27. Панă квадратăн $^{2}/_{3}$ пайĕпе пĕртан пысăкăш квадрат тумалла.

28. Квадратран пĕртан пысăкăш прямоугольник тумалла; прямоугольникĕн икĕ юнашар енĕсен суммине е разноçне d панă.

29. Панă икĕ концентрически çавракăшсем хушшинче тăраканункăпа пĕртан пысăкăш çаврашка тумалла.

30. Треугольник тумалла, вăл панă икĕ треугольникрен пĕринпе пĕрьевĕрлĕ, тепринпе пĕртан пысăкăш пулмалла.

31. Панă треугольникрен тан енлĕ пĕртан пысăкăш треугольник тумалла (алгебрăпа усă курмалла).

32. Панă çаврашка ăшне панă лаптăклă m^2 прямоугольник çырмалла (алгебрăпа усă курмалла).

33. Панă треугольник ăшне панă лаптăклă m^2 прямоугольник çырмалла (алгебрăпа усă курмалла, тĕпчемелле).

0°-РАН ПУÇЛАСА КАШНИ ГРАДУС УРЛĂ 90°-А ÇИТЕКЕН КĔТЕССЕН ТРИГОНОМЕТРИЛЛЕ ФУНКЦИЙĔСЕН ТАБЛИЦИ.

Градуссем	Синуссем	Косинуссем	Тангенссем	Котангенссем	Градуссем
0	0,00000	1,00000	0,00000	∞	90
1	0,01745	0,99985	0,01746	57,28996	89
2	0,03490	0,99939	0,03492	28,63625	88
3	0,05234	0,99863	0,05241	19,08114	87
4	0,06976	0,99756	0,06993	14,30067	86
5	0,08716	0,99619	0,08749	11,43005	85
6	0,10453	0,99452	0,10510	9,51436	84
7	0,12187	0,99255	0,12278	8,14435	83
8	0,13917	0,99027	0,14054	7,11537	82
9	0,15643	0,98769	0,15838	6,31375	81
10	0,17365	0,98481	0,17633	5,67128	80
11	0,19081	0,98163	0,19438	5,14455	79
12	0,20791	0,97815	0,21256	4,70463	78
13	0,22495	0,97437	0,23087	4,33148	77
14	0,24192	0,97030	0,24933	4,01078	76
15	0,25882	0,96593	0,26795	3,73205	75
16	0,27564	0,96126	0,28675	3,48741	74
17	0,29237	0,95630	0,30573	3,27085	73
18	0,30902	0,95106	0,32492	3,07768	72
19	0.32557	0,94552	0,34433	2,90421	71
20	0,34202	0,93969	0,36397	2,74748	70
21	0,35837	0,93358	0,38386	2,60509	69
22	0,37461	0,92718	0,40303	2,47509	68
23	0,39073	0,92050	0,42447	2,35585	67
24	0,40674	0,91355	0,44523	2,24604	66
25	0,42262	0,90631	0,46631	2,14451	65
26	0,43837	0,89879	0,48773	2,05030	64
27	0,45399	0,89101	0,50953	1,96261	63
28	0,46947	0,88295	0,53171	1,88073	62
29	0,48481	0,87462	0,55431	1,80405	61
30	0,50000	0,86603	0,57735	1,73205	60
31	0,51504	0,85717	0,60086	1,69428	59
32	0,52992	0,84805	0,62487	1,60033	58
33	0,54464	0,83867	0,64941	1,53987	57
34	0,55919	0,82904	0,67451	1,48256	56
35	0,57358	0,81915	0,70021	1,42815	55
36	0,58779	0,80902	0,72654	1,37638	54
37	0,60182	0,79864	0,75355	1,32704	53
38	0,61566	0,78801	0,78129	1,27994	52
39	0,62932	0,77715	0,80978	1,23490	51
40	0,64279	0,76604	0,83910	1,19175	50
41	0,65606	0,75471	0,86929	1,15037	49
42	0,66913	0,74314	0,90040	1,11031	48
43	0,68200	0,73135	0,93252	1,07237	47
44	0,69466	0,71114	0,96569	1,03553	46
45	0,70711	0,70711	1,00000	1,00000	45
	Косинуссем	Синуссем	Котангенссем	Тангенссем	

Задачăсем шутланă чух час-часах тĕл пулакан хăшпĕр числосем.

$\pi = 3{,}1416$ $\left(3\frac{1}{7}\text{ яхăн}\right)$ $\frac{\pi}{180} = 0{,}01745$ $\sqrt{2} = 1{,}4142$ $\sqrt{5} = 2{,}2361$

$\frac{1}{\pi} = 0{,}3183$ $\frac{180}{\pi}$ (радиан) $= 57°17'44''$ $\sqrt{3} = 1{,}73205$ $\sqrt{6} = 2{,}4495.$

ТУПМАЛЛИ.

Пиллĕкмĕш сыпăк. ЛАПТĂКСЕНЕ ВИÇЕССИ.

Ответств. редактор *Ф. К. Кузьмин.*

Подписано к печати 8/IX—41 г.
НТ 6609. Зак. № 616. Тир. 13.000 экз.
Объем 12 п. л. Знаков в печ. л. 46.200

Г. Чебоксары, Володарского, 5, Дом
печати. Типография № 1 Управления
издательств и полиграфии при СНК
ЧАССР.

2

Цена 1 руб. 55 коп.

А. П. КИСЕЛЕВ

ГЕОМЕТРИЯ

Часть I

На чувашском языке

Госиздат ЧАССР
1941